УДК 624.04

ПОСТРОЕНИЕ СХЕМЫ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ РАМЫ

Монахов Владимир Андреевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Булавина Дарья Андреевна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Аннотация

Предложена процедура автоматизированного построения геометрической матрицы рамы на основе графа её дискретной модели, полученной при дискретизации стержневой системы. Сформировав матрицу инцидентности графа, характеризующую топологическую структуру расчётной схемы рамы, с помощью матричного преобразования векторов узловых перемещений при переходе от глобальных координат к локальным удаётся установить приращения перемещений каждого конечного элемента в направлении оси элемента (абсолютные удлинения или укорочения) и перпендикулярном ему (перекосы). Композиция всего лишь двух исходных матриц стержневой системы: матрицы инцидентности графа и матрицы узловых координат механической модели рамы, решает проблему автоматического формирования геометрической матрицы с использованием ПЭВМ. Знание геометрической матрицы позволяет наряду с конфигурацией рамы в деформированном положении определить также и усилия стержневой системы.

Ключевые слова: стержневая система, конечные элементы, граф рамы, матрица инцидентности, матрица координат узлов, вектор узловых перемещений, геометрическая матрица.

CONSTRUCTION OF THE FRAME GEOMETRIC MATRIX ON THE BASIS OF THE GRAPH

Monakhov Vladimir Andreevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Bulavina Darya Andreevna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Student.

Abstract

The procedure of automated construction of the frame geometric matrix on the basis of the graph of its discrete model obtained by discretization of the rod system is proposed. Having formed the incidence matrix of the graph characterizing the topological structure of the computational scheme of the frame, using the matrix transformation of the vectors of nodal displacements in the transition from global to local coordinates, it is possible to establish the increments of the displacements of each finite element in the direction of the axis of the element (absolute elongation or shortening) and perpendicular to it (distortions). The composition of only two initial matrices of the rod system: the incidence matrix of the graph and the matrix of nodal coordinates of the mechanical model of the frame, solves the problem of automatic formation of the geometric matrix using a PC. Knowledge of the geometric matrix allows, along with the configuration of the frame in the deformed position also to determine the forces of the rod system.

Keywords: bar system, finite elements, frame count, a matrix of incidence, matrix of coordinates of the nodes, the vector of nodal displacements, geometric matrix.

Представляя стержневую систему в виде набора ограниченного числа отрезков упругих стержней (конечных элементов), связанных в точках дискретизации (узлах) (рисунок 1а, б), деформированное состояние модели механической системы можно описать матричным соотношением

$$\bar{\gamma} = [\Gamma]\bar{\zeta}$$

где $\bar{\gamma}$ – вектор, состоящий из абсолютных удлинений λ_i $(i = 1,2,...,6)$ и перекосов χ_i $(i = 1,2,...,6)$ элементов, $[\Gamma]$ – матрица преобразования перемещений, $\bar{\zeta}$ – вектор-столбец узловых перемещений, заданный в глобальной системе координат $\eta\Omega\theta$ (рисунок 1,г); порядок вектора $\bar{\zeta}$ равен удвоенному числу узлов принятой дискретной модели стержневой системы; удвоенное количество узлов, включая и опорные, определяет число компонент вектора $\bar{\gamma}$.

В статье на примере анализа деформированного состояния рамы показано, что формирование матрицы $[\Gamma]$, являющейся ключом к разработке оригинального метода расчёта стержневых систем не только по прочности и жёсткости, но и на устойчивость, может совершаться в матричной форме и, как следствие, выполняться в автоматическом режиме. Геометрическая матрица $[H]$, построение которой осуществляется на основе матрицы $[\Gamma]$, позволяет установить не только деформированное состояние, но и распределение усилий (изгибающих моментов) стержневой системы. При расчёте любых стержневых систем, в том числе и статически неопределимых систем, рекомендуется использовать изложенный в настоящей работе матричный подход к расчёту рам, поскольку на его основе можно вообще избежать применения классических методов строительной механики, в том числе и метода конечных элементов. Если для некоторой стержневой системы известна матрица $[\Gamma]$, то несложно перейти к геометрической матрице $[H]$, связывающей, в частности, узловые перемещения $\bar{\zeta}$ с сосредоточенными деформациями изгиба согласно $\bar{\varkappa} = [H]\bar{\zeta}$. В этом случае обусловленные изгибом перемещения узлов стержневой системы $\bar{Y}$ под действием внешних нагрузок, находятся по формуле $\bar{Y} = [\Delta]\bar{P}$, где $[\Delta]$ – матрица (внешней) податливости, равная $[\Delta] = \left([H]^T [T]\right)^{-1}$, а изгибающие моменты $\bar{M}$ в расчётных сечениях могут быть вычислены по формуле $\bar{M} = [T]\bar{Y}$, где $[T]=[r][H]$ – матрица единичных узловых усилий; $[r]$ – квазидиагональная матрица внутренней жёсткости, состоящая из блок-матриц второго порядка (ячеек жёсткости конечных элементов) вида

$$[r] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{E\,I}{l},$$

E – модуль упругости материала, I – момент инерции поперечного сечения элемента, l – его длина; $\overline{P}$ – вектор внешних воздействий, сосредоточенных в узлах[4], [5].

Алгоритм построения геометрической матрицы состоит в следующем. На расчётной схеме рамы (показана на рисунке 1,а) осуществляется дискретизация системы: намечаются расчётные сечения (узлы) и конечные элементы; первые обозначаются арабскими цифрами $(i=1,2,...,10)$, вторые – римскими (j=I,II,…,VIII). Одновременно вводятся локальные системы координат $x_j O_j y_j$ $(j=1,2,...,6)$, оси абсцисс которых совмещается с осями элементов, и глобальная система $\eta\Omega\theta$ (рисунок 1,б). Для описания структуры расчётной схемы рамы строят граф дискретной модели рамы (рисунок 1,в) и составляют сопутствующую ему матрицу инцидентности [7], [8]

$$[S]_{(8\times 10)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

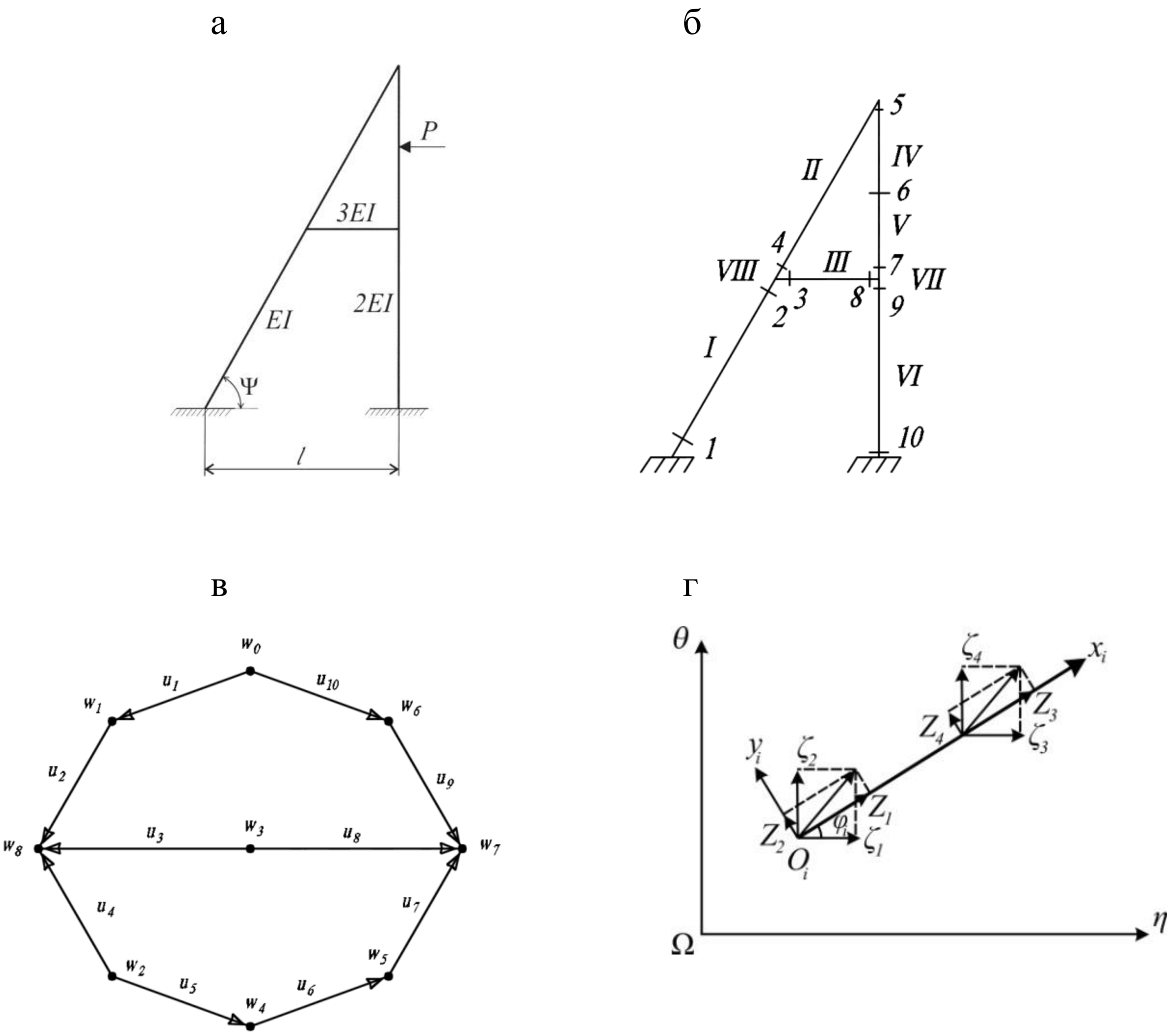

Рисунок 1 – Расчетная схема рамы, её граф и обозначения узловых перемещений

Разместив локальные системы координат на элементах рамы, как показано на рисунке 1,г, с помощью блочных матриц поворота

$$[\Psi_i] = \begin{bmatrix} [\psi_i] & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & [\psi_i] \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,...,8),$$

где $[\psi_i] = \begin{bmatrix} \cos\psi_i & \sin\psi_i \\ -\sin\psi_i & \cos\psi_i \end{bmatrix}$ $(i = 1,2,...,8)$ – ячейка поворота вектора перемещений одного из торцов i-го элемента, для каждого элемента несложно осуществить переход от глобальных перемещений $\bar{\zeta}$ к локальным, согласно матричному преобразованию $\bar{Z}^{(i)} = [\Psi_i]\bar{\zeta}^{(i)}$ $(i = 1,2,...,8)$ (рисунок 1,в). Совокупность подобных преобразований для всех элементов рамы, представленная квазидиагональной матрицей вида

$$[\Psi]_{(24\times 12)} = \begin{bmatrix} [\Psi_1] & & & & & \\ & [\Psi_2] & & & 0 & \\ & [\Psi_3] & & & & \\ & & [\Psi_4] & & & \\ 0 & & [\Psi_5] & & & \\ & & & [\Psi_6] & & \end{bmatrix}.$$

где, например,

$$[\Psi_1] = [\Psi_2] = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0 & 0 \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ 0 & 0 & -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix},$$

$$[\Psi_4] = [\Psi_5] = [\Psi_6] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

– матрицы поворота узловых перемещений для первого, второго и других элементов (для горизонтальных она будет единичной), позволяет установить зависимость между локальными и глобальными перемещениями узлов всей рамы в матричной форме.

В дополнение к матрице инцидентности должна быть сформирована ещё развёрнутая матрица инцидентности $[\tilde{S}]$ графа, которая получается на основе матрицы $[S]$ путём её *расширения*. Данная процедура заключается в перебрасывании значащих элементов матрицы $[S]$ в виде диагональных подматриц второго порядка на места, соответствующие их степеням свободы [6]

$$
\left[\tilde{S}\right]_{(12\times24)}=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots & 21 & 22 & 23 & 24
\end{array}\\
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & -1 & 0 & 1 & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & -1 & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & -1 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ldots\ \ldots & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & -1 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Зависимость приращений перемещений непосредственно от перемещений в глобальной системе характеризуется, как сказано выше, преобразованием $\bar{\gamma}_{(12)}=[\Gamma]_{(12\times12)}\bar{\zeta}_{(12)}$, где $\bar{\gamma}_{(12)}=(\lambda_1,\ \chi_1,\ \lambda_2,\ \chi_2,\ \ldots,\lambda_6,\ \chi_6)$ – вектор-столбец узловых приращений перемещений конечного элемента в продольном направлении $\lambda_i\ (i=1,2,\ldots,6)$ и перпендикулярном ему $\chi_i\ (i=1,2,\ldots,6)$. Матрица преобразования $[\Gamma]$, которая находится по формуле $[\Gamma]_{(12\times14)}=\left[\tilde{S}\right]_{(12\times24)}[\Psi]_{(24\times12)}$, в дальнейшем корректируется путём вычёркивания в ней нечётных строк. Тем самым при определении внутренних усилий рамы исключаются продольные силы. После удаления указанных строк приходят к матрице

$$
[G]_{(6\times12)}=\begin{bmatrix}
c & -s & -c & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -c & s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Здесь приняты сокращения для функций заданного угла наклона левой стойки рамы: $c=\cos 60^\circ$, $s=\sin 60^\circ$. Данная матрица позволяет найти *перекосы стержней* в зависимости от узловых перемещений $\bar{\chi}_{(6)}=[G_0]_{(6\times12)}\bar{\zeta}_{(12)}$; Принимая во внимание неподвижность опор $(\zeta_1=\zeta_2=\zeta_{11}=\zeta_{12}=0)$, в матрице $[G]_{(6\times12)}$ следует опустить два крайних столбца с каждой стороны; кроме того исключить пятый, седьмой и девятый столбцы, т . к. продольные деформации стержней пренебрежимо малы. Таким образом, остаётся прямоугольная матрица размером 6×5

$$[G_0]_{(6\times5)}=\begin{bmatrix} -s & c & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & -s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

В результате умножения транспонированной матрицы инцидентности $[S]^T_{(8\times6)}$ на матрицу $[L]^{-1}{}_{(6\times6)}$, ($[L]_{(6\times6)}$ – матрица длин КЭ) находят матрицу $[U]$ с размерностью 8 на 6. Геометрическая матрица, с помощью которой можно определить сосредоточенные деформации изгиба в узлах стержневой системы согласно $\overline{\varkappa}_{(8)}=[H_0]_{(8\times5)}\bar{\zeta}_{(5)}$, вычисляется по формуле $[H_0]_{(8\times5)}=[U]_{(8\times6)}[G_0]_{(6\times5)}$

$$[H_0]_{(8\times5)}=\begin{bmatrix} 0{,}002 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}002 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}002 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}002 & 1 & 2{,}31 & -2{,}31 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}31 & 4{,}62 & 2{,}31 \\ 0 & 0 & 0 & -2{,}31 & -2{,}31 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица характеризует схему деформаций рамы, возникающую вследствие узловых *линейных* перемещений. Данную матрицу следует дополнить двумя столбцами, соответствующими ещё двум возможным схемам деформаций. Последние обусловлены поворотами узлов на углы $\vartheta_7,\ \vartheta_8$; их индексы соответствуют общей нумерации конечных элементов (рисунок 1,б).

Если линейные перемещения узлов переобозначить, приняв $\vartheta_1=\zeta_1,\ \vartheta_2=\zeta_2,\ \vartheta_3=\zeta_3,\ \vartheta_4=\zeta_4,\ \vartheta_5=\zeta_5$, а для угловых $\vartheta_7,\ \vartheta_8$ символы сохранить, поменяв лишь индексы, т. е. $\vartheta_6=\vartheta_7,\ \vartheta_7=\vartheta_8$, то сосредоточенные деформации изгиба в расчётных сечениях рамы можно будет вычислить по формуле

$$\overline{\varkappa}_{(10)}=[H]_{(10\times7)}\bar{\vartheta}_{(7)},$$

где

$$[H]_{(10\times 7)} = \begin{bmatrix} 0{,}002 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}002 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -0{,}002 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0{,}002 & 1 & 2{,}31 & -2{,}31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}31 & 4{,}62 & -2{,}31 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2{,}31 & -2{,}31 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{\zeta} = (\zeta_1,\ \vartheta_2, ..., \vartheta_7)$ – полный вектор узловых перемещений. На рисунке 2 приводится схема сосредоточенных изгибных деформаций рамы.

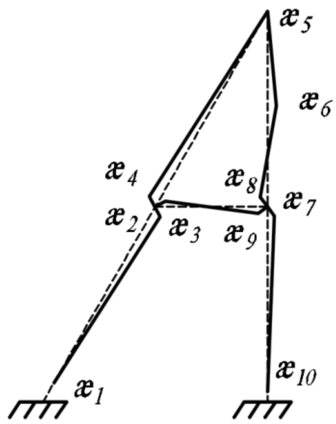

Рисунок 2 – Схема сосредоточенных изгибных деформаций рамы

Руководствуясь изложенной последовательностью формирования геометрической матрицы $[H]$, несложно разработать программу её автоматического составления с помощью ПЭВМ. Построение графа рамы и схемы сосредоточенных деформаций изгиба, а также формирование сопутствующей ему матрицы инцидентности, матриц координат узлов, направляющих косинусов КЭ вместе с геометрической матрицей могут быть выполнен в автоматическом режиме [1].

Библиографический список:

1. Зубов В.С. Справочник программиста. Базовые методы решения графовых задач и сортировки [Текст]. М.: Изд. дом «Филинъ», 1999. 256 с.

1. Монахов В.А. Дискретная механика стержневых систем [Текст]. Пенза: ПГУАС, 2017. 402 с.

2. Строительная механика. Книга 2. Стержневые системы: Учеб. для вузов [Текст] / В.Д. Потапов, А.В. Александров, К.П. Долотказин и др. М.: Стройиздат, 2007. 512 с.

3. Проценко А.М. Теория идеально-упругопластических систем [Текст]. М.: Наука, 1982. 287 с.

4. Ржаницын А.Ф. Расчёт стержневых систем с применением принципа двойственности // Исследования по теории сооружений. 1980. Вып. XXIV. С. 10-23.

5. Рекша В.В. Применение теории графов в матричной форме метода перемещений // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. № 1. С. 33-35.

6. Харари А. Теория графов [Текст]. М: Изд. УРСС Эудиториал, 2003. 322 с.

7. Fenves S.J., Branin F.H. Network-topological formulation of structures analysis // Journal of structural division. 1963. Vol. 89. ST4. P. 189-214.