

УДК 624.072.31

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЁТА ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО СОВОКУПНОСТЬЮ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Казаков Даниил Анатольевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Рассматривается прямолинейный упругий стержень, нагруженный совокупностью n сосредоточенных сил, действующих параллельно его продольной оси. Стержень находится в условиях внецентренного нагружения. Даются формулы для определения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня, а также формулы для построения нейтральной линии. Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат X и Y , являющихся главными центральными осями инерции поперечного сечения, определяются не только геометрией сечения и точками приложения сосредоточенных сил, но также и соотношениями между сосредоточенными силами. Отмечено, что понятие "ядро сечения", введённое Ж. Брессом, для стержня внецентренно нагруженного совокупностью n сосредоточенных сил, действующих параллельно его продольной оси, теряет смысл. При заданной величине действующих сил F_1, F_2, \dots, F_n можно путём элементарного перебора подобрать такое их месторасположение, при котором нейтральная линия будет располагаться за контуром поперечного сечения. Определение несущей способности внецентренно нагруженного совокупностью n сосредоточенных

сил стержня выполняется по нормальным напряжениям, возникающим в точках поперечного сечения, наиболее удалённых от нейтральной линии. В качестве примера рассматривается колонна, находящаяся в условиях внецентренного сжатия под действием четырёх сосредоточенных сил, действующих параллельно её продольной оси.

Ключевые слова: внецентренное нагружение, прямолинейный упругий стержень, нормальные напряжения, нейтральная линия, несущая способность.

THEORETICAL BASES OF CALCULATION PATANDS COMPRESSED ROD LOADED COMBINATION OF CONCENTRATED FORCES

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Technical Sciences, Professor, chair "Mechanics".

Kazakov Daniil Anatolevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Student.

Abstract

Seen straight elastic rod loaded combination n of concentrated forces acting in parallel its longitudinal axis. The rod is in the midst of off-center loading. Given a formula to determine normal stress in the cross section of the stem, as well as a formula for building a neutral line. Otsekaemye lines of neutral line in the coordinate axes, and are the principal central axes of inertia of the cross section are defined not only the Geometry section and application points concentrated forces, but also to relations between concentrated forces. Noted that the notion of "core section" entered J. Bresson, for the Web patands the loaded combination of concentrated forces acting in parallel its longitudinal axis lose meaning. When the specified value, you can force F_1, F_2, \dots, F_n through elemental busting pick is their location, where the neutral line will be for cross-sectional contour. Determination of bearing capacity of patands loaded combination n of concentrated forces rod runs on normal tensions arising in

the points of the equatorial section, the most remote of the neutral line. As an example, located in the Center under the influence of compression conditions four concentrated forces operating in parallel with its longitudinal axis.

Keywords: loading out of Center, rectilinear elastic rod, normal voltage, neutral line, load-bearing capacity.

Введение

Внецентренно нагруженные стойки или стержни находят широкое применение в области строительства. Достаточно вспомнить металлические [1] или железобетонные [2] колонны промышленных зданий, воспринимающих крановую нагрузку, а также нагрузку от балок и ферм покрытия. В условиях внецентренного сжатия находятся кирпичные стены и стеновые простенки жилых и общественных зданий [3], воспринимающие нагрузку от плит перекрытия и вышележащих стен.

Колонна, воспринимающая только крановую нагрузку или нагрузку только от одной балки или фермы покрытия, находится в условиях внецентренного сжатия под действием одной сосредоточенной силы. Колонна, воспринимающая нагрузку с одной стороны от, например 24-метровой фермы, а с противоположной стороны от 9-метровой балки будет находиться в условиях внецентренного сжатия под действием двух сосредоточенных сил. Если на колонну, кроме того опираются балки с третьей и четвертой сторон, то она будет находиться в условиях внецентренного сжатия под действием трёх или четырёх сосредоточенных сил.

В данной работе даются теоретические основы и приводится пример расчёта внецентренно нагруженного упругого стержня, находящегося под действием совокупности n сосредоточенных сил, действующих параллельно его продольной оси.

Следует отметить, что вопросы расчёта стержней, находящихся в условиях сложного сопротивления, в том числе в условия внецентренного сжатия, продолжают будоражить умы исследователей и инженеров. И это несмотря на

то, что теория расчёта внецентренно нагруженного стержня была разработана ещё в первой половине XIII – го столетия работами Т. Юнга и Ж. Бресса.

В работе [4] предложена методика расчёта надёжности внецентренно сжатого стержня с учётом наличия в математической модели предельного состояния случайных величин (в понятиях теории вероятностей) и нечётких переменных (в понятиях теории возможностей). В работе [5] описываются алгоритм и программа расчёта несущей способности внецентренно сжатого стержня на основе нелинейного деформационного алгоритма, в котором используется гипотеза плоских сечений. Диаграммы деформирования материалов принимаются кусочно-линейными: для бетона – трёхлинейными, для арматуры – двухлинейными. Работа [6] посвящена вопросам расчёта внецентренно сжатого стержня из нелинейно-упругого материала и построения эпюры деформаций из условия минимума потенциальной энергии. В работе [7] рассмотрены результаты теоретических исследований напряжённо-деформированного состояния внецентренно сжатого элемента, усиленного железобетонной обоймой. В качестве теоретической основы использована теория составных стержней. В результате решения теоретической задачи получены аналитические выражения для определения нормальных напряжений в поперечном сечении усиленного элемента и касательных напряжений по контактному шву.

Теоретические основы

Нормальные напряжения σ_z в прямолинейном упругом стержне с площадью поперечного сечения A , внецентренно нагруженного только сосредоточенной силой F (рисунок 1), определяются по формуле [8]:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} + \frac{Fy_0}{I_x} y + \frac{Fx_0}{I_y} x. \quad (1)$$

Здесь I_x, I_y – осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции X и Y поперечного сечения стержня;

x_0, y_0 – координаты точки приложения силы F ;

x, y – координаты точки, в которой определяется нормальное напряжение.

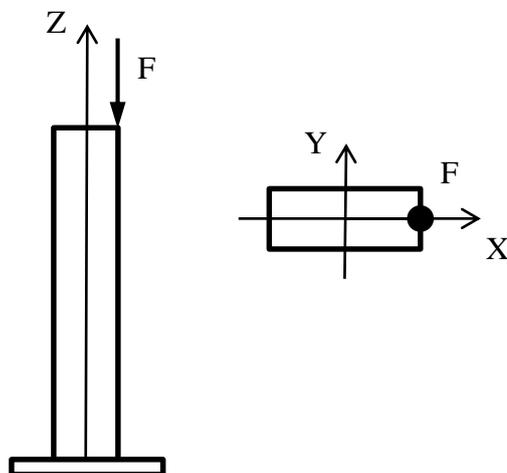


Рисунок 1 – Стержень, внецентренно нагруженный силой F

Если стержень находится в условиях внецентренного нагружения под действием только двух сосредоточенных сил F_1 и F_2 (рисунок 2), приложенных в точках с координатами (x_1, y_1, z_0) и (x_2, y_2, z_0) , то нормальные напряжения σ_z в поперечном сечении для $z \leq z_0$ определяются, на основании принципа независимости действия сил, по формуле [9]:

$$\sigma_z = \frac{F_1 + F_2}{A} \left(1 + \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} \cdot \frac{y}{i_x^2} + \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} \cdot \frac{x}{i_y^2} \right). \quad (2)$$

Здесь $i_x^2 = \frac{I_x}{A}$; $i_y^2 = \frac{I_y}{A}$ – квадраты радиусов инерции поперечного сечения стержня.

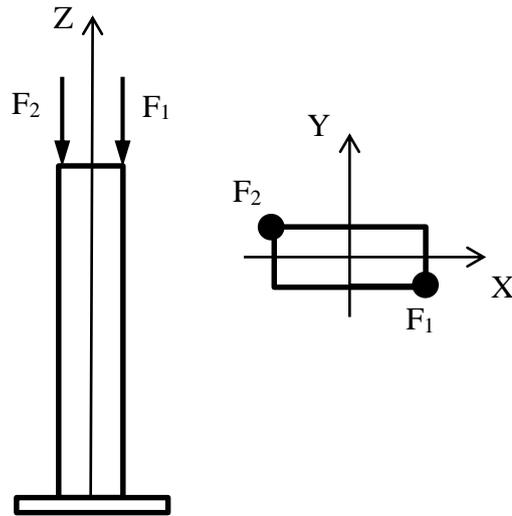


Рисунок 2 – Стержень, внецентренно нагруженный силами F_1 и F_2

Используя принцип независимости действия сил, запишем формулы для определения нормальных напряжений в поперечном сечении ($z \leq z_0$) внецентренно нагруженного стержне только тремя сосредоточенными силами F_1 , F_2 и F_3 :

$$\sigma_z = \frac{F_1 + F_2 + F_3}{A} \left(1 + \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3} \cdot \frac{y}{i_x^2} + \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} \cdot \frac{x}{i_y^2} \right), (3)$$

а также только четырьмя сосредоточенными силами F_1 , F_2 , F_3 и F_4 :

$$\sigma_z = \frac{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}{A} \left(1 + \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + F_4 y_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} \cdot \frac{y}{i_x^2} + \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + F_4 x_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} \cdot \frac{x}{i_y^2} \right). (4)$$

В формулах (2), (3) и (4) величина z_0 определяет уровень, на котором приложена сила, наименее удалённая от нижнего конца стержня, то есть в поперечных сечениях стержня для $z \leq z_0$ вклад в величину нормального напряжения σ_z дают все действующие на стержень силы. Следует отметить, что если действующие сосредоточенные силы направлены в противоположные

стороны (вверх и вниз), то в формулах (2), (3) и (4) знак у соответствующих сил нужно соответственно поменять на обратный.

Используя метод математической индукции, обобщим формулы (2), (3) и (4) на n сосредоточенных сил, действующих на внецентренно нагруженный стержень, параллельно его продольной оси Z :

$$\sigma_z = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{A} \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \frac{y}{i_x^2} + \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \frac{x}{i_y^2} \right). \quad (5)$$

Уравнение нейтральной линии при этом, то есть линии, на которой $\sigma_z = 0$, имеет вид:

$$y(x) = -\frac{i_x^2}{\sum_{i=1}^n F_i y_i} \left[\left(\sum_{i=1}^n F_i x_i \right) \frac{x}{i_y^2} + \sum_{i=1}^n F_i \right]. \quad (6)$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат X и Y , являющихся главными центральными осями инерции поперечного сечения, определяются не только геометрией сечения и точками приложения сосредоточенных сил, но также и соотношениями между сосредоточенными силами, и равны:

$$a_x = -\frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n F_i x_i} i_y^2, \quad a_y = -\frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n F_i y_i} i_x^2. \quad (7)$$

При заданной величине действующих сил F_1, F_2, \dots, F_n можно путём элементарного перебора подобрать такое их месторасположение, при котором нейтральная линия будет располагаться за контуром поперечного сечения. Понятие "ядро сечения" для стержня внецентренно нагруженного совокупностью n сосредоточенных сил, действующих параллельно его продольной оси, теряет смысл.

Определение несущей способности внецентренно нагруженного совокупностью n сосредоточенных сил стержня выполняется по нормальным

напряжениям, возникающим в точках поперечного сечения, наиболее удалённых от нейтральной линии.

Пример

Рассмотрим колонну прямоугольного поперечного сечения с размерами $b = 40$ см и $h = 60$ см. На колонну, параллельно её оси, действуют сосредоточенные силы: $F_1 = 800$ кН; $F_2 = 320$ кН; $F_3 = 560$ кН; $F_4 = 200$ кН. Точки приложения сосредоточенных сил находятся на расстояниях 20 см от боковой поверхности колонны, то есть $x_1 = 0$ см, $y_1 = -50$ см; $x_2 = 40$ см, $y_2 = 0$ см; $x_3 = 0$ см, $y_3 = 50$ см; $x_4 = -40$ см, $y_4 = 0$ см. Колонна будет находиться в условиях внецентренного сжатия четырьмя сосредоточенными силами (рисунок 3).

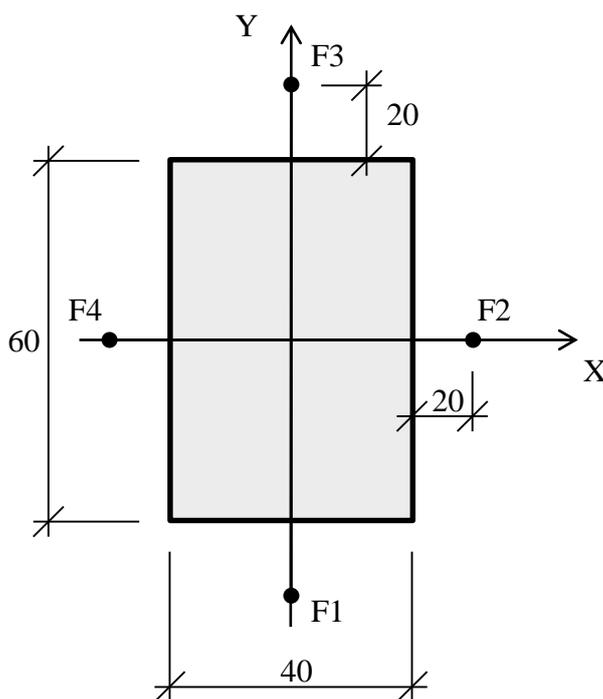


Рисунок 3 – Поперечное сечение колонны

Используя формулу (6) построим нейтральную линию (рисунок 4). Нейтральная линия касается контура колонны в точке с координатами $x_k = -20$ см, $y_k = 30$ см. Максимальное нормальное сжимающее напряжение

возникнет в точке с координатами $x_m = 20$ см, $y_m = -30$ см и, в соответствии с формулой (5), будет равно $\sigma_z^{\max} = 15,83$ МПа .

Заключение

Выполненные исследования показали следующее:

1. В упругом стержне, нагруженном совокупностью n сосредоточенных сил, нормальные напряжения в поперечном сечении определяются на основании принципа независимости действия сил.

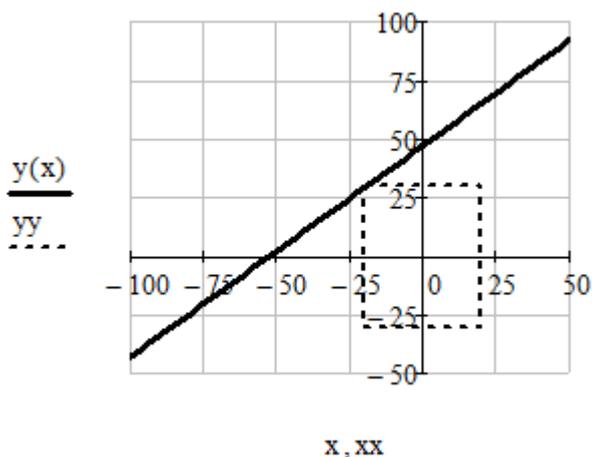


Рисунок 4 – Нейтральная линия

2. Нейтральная линия может как пересекать поперечное сечение, так и проходить за его пределами.
3. Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат X и Y , являющихся главными центральными осями инерции поперечного сечения, определяются не только геометрией сечения и точками приложения сосредоточенных сил, но также и соотношениями между сосредоточенными силами.
4. Понятие "ядро сечения" для стержня внецентренно нагруженного совокупностью n сосредоточенных сил, действующих параллельно его продольной оси, теряет смысл.
5. Оценка несущей способности внецентренно нагруженного совокупностью n сосредоточенных сил стержня выполняется по нормальным напряжениям, возникающим в точках поперечного сечения, наиболее удалённых от нейтральной линии.

Выводы

Представленные в статье результаты могут быть использованы при расчёте внецентренно сжатого упругого стержня совокупностью n сосредоточенных сил, действующих параллельно его продольной оси, то есть находящегося в условиях внецентренного нагружения.

Библиографический список.

1. СП 16.13330.2011 Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. М., 2011.
2. СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. М., 2012.
3. СП 15.13330.2012 Каменные и армокаменные конструкции. М., 2013.
4. Уткин В.С., Галаева Н.Л. Расчёт надёжности внецентренно сжатого индивидуального стального стержня комбинированным методом // Вестник гражданских инженеров. 2008. №4(17). С. 30-32.
5. Сафронов В.С., Катембо А.Л. Расчёт несущей способности внецентренно сжатого стержня из железобетона с использованием деформационной модели // Строительная механика и конструкции. 2016. Т.1. №12. С. 64-74.
6. Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А. Расчёт сжатого внецентренно стержня из нелинейно-упругого материала по методике интегральной зависимости деформаций от напряжений // Научный вестник Воронежского ГАСУ. Серия: Современные методы статического и динамического расчёта зданий и сооружений. 2007. №3. С. 12-19.
7. Фардиев Р.Ф., Ашрапов А.Х. Применение теории составных стержней к определению характера распределения напряжений в поперечном сечении усиленного внецентренно сжатого элемента // Известия КГАСУ. 2015. №4(34). С. 363-369.
8. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. М.: Высш. Шк., 1995. 560 с.: ил.

9. Бакушев С.В. Сопротивление материалов (справочное руководство): Учебное пособие для направления подготовки 08.03.01 «Строительство». Пенза: ПГУАС, 2017. 104 с.: ил.