УДК 624.04

МЕТОД ДВУХ ПОПЫТОК ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ И ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шеин Александр Иванович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе.

Земцова Ольга Григорьевна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Аннотация

В работе описывается метод анализа устойчивости механической системы, базирующийся на оценке приращения обобщенного перемещения от приращения максимально возможной нагрузки, и сравнения этого значения с определенным заранее параметром - начальной отпорностью системы.

Ключевые слова: устойчивость, бифуркация, отпорность, кривая равновесных состояний.

THE TWO ATTEMPT METHOD FOR ESTIMATING THE STABILITY OF THE EQUILIBRIUM STATE AND MOTION OF THE MECHANICAL SYSTEM

Shein Alexander Ivanovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor, Vice Rector for Research.

Zemtsova Olga Grigorevna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department “Mechanics”.

Abstract

The paper describes a method for analyzing the stability of a mechanical system, based on an estimate of the increment of the generalized displacement from the increment of the maximum possible load, and comparing this value with a predetermined parameter — the initial response of the system.

Keywords: stability, bifurcation, response system, equilibrium state curve.

Традиционные подходы к задачам оценки устойчивости различного рода конструкций и механических систем чаще всего предполагают или известное упрощение расчетных схем для выявления их бифуркационных особенностей, или построение полной кривой равновесных состояний для определения максимального уровня нагружения. Недостатки обоих этих подходов очевидны, т.к. заключаются именно в необходимости упрощения расчетной схемы и разрешающей системы уравнений в первом случае или в организации шаговой схемы расчета конструкции на всех возможных этапах нагружения во втором случае. Поэтому весьма важно иметь способ оценки устойчивости данного, максимально нагруженного, описываемого полной системой уравнений равновесия, состояния механической системы. В первую очередь это относится к нелинейным системам или конструкциям с нелинейными характеристиками. Устойчивости нелинейных систем посвящены работы российских [1]-[13] и зарубежных [26]-[27] ученых. Ряд исследований в этой области выполнено автором [14]-[25].

Согласно статическому критерию устойчивости, механическая система, находящаяся в равновесии под действием статической нагрузки, считается теряющей устойчивость тогда и только тогда, когда статическая нагрузка вызывает возникновение других возможных положений равновесия, сколь угодно близких к данному положению равновесия по значениям обобщенных перемещений.

При рассмотрении устойчивости сооружения в широком смысле будем прежде всего стремиться оценить устойчивость напряженно-деформированного состояния и затем устойчивость процесса деформирования во времени.

Вторая задача связана с анализом отклонения возмущенных движений от невозмущенных при малых увеличениях амплитудных значений возмущающих сил или малых возрастающих возмущениях постоянных нагрузок. При этом будем полагать, что в расчет вводятся некоторые нормативные максимально возможные величины возмущений.

Применительно к стержневым системам, с учетом гипотезы плоских сечений и при независимости диаграммы деформирования от скорости, процесс изменения напряженно деформированного состояния в сечении можно рассматривать как процесс последовательного наложения диаграммы «σ – ε» на отрезок переменной длины. При разгрузке длина отрезка уменьшается, и он накладывается на участок с меньшими границами деформаций, а при нагружении – увеличивается, и он накладывается на диаграмму в более широких границах.

Анализ устойчивости можно производить и на основе оценки изменения амплитуд при изменении нагрузки. Если при малых $\Delta P \cdot (P+\Delta P)$ амплитуда колебаний меняется мало – процесс деформирования при действии динамической нагрузки устойчив, если же амплитуда колебаний резко увеличивается – процесс деформирования неустойчив.

При увеличении постоянной нагрузки как бы увеличивается масса системы, а жесткость наоборот – уменьшается. При действии динамических нагрузок жесткостные характеристики способны изменяться и вследствие появления и постепенного развития трещин или зон текучести в элементах. Задача исследования устойчивости движения может быть приближённо сформулирована как задача отыскания обобщённой отрицательной жёсткости системы. При отрицательной жёсткости дифференциальные уравнения свободных колебаний системы дают решение в виде монотонного движения от положения равновесия, что свидетельствует о его неустойчивости.

Если рассматривать движение на достаточно большом интервале времени, то колебательный процесс в области значительных неупругих деформаций является неустойчивым движением. И вообще, периодическое движение в области значительных напряжений – неустойчивый процесс деформирования. Неустойчивость здесь связана, прежде всего, с накоплением пластических деформаций или повреждений.

Оценку эволюции амплитуд при изменении нагрузки необходимо не только вычислять на каждом шаге приращения нагрузки, но и сравнивать с каким-либо определенным заранее параметром. Для этого примем некоторую границу отношения $(\Delta U/\Delta P)_{доп}$ в качестве критерия недопустимого уровня снижения запаса устойчивости. Откладывая P и U на каждом шаге нагружения, строим кривую равновесных состояний. Одновременно на каждом шаге выполняем проверку соотношения

$$(\Delta U/\Delta P) < (\Delta U/\Delta P)_{доп} \quad (1)$$

При выполнении этого неравенства – состояние равновесия можно считать устойчивым. При нарушении неравенства – состояние равновесия не обеспечивает необходимого запаса устойчивости.

Назовем отношение $\Delta U/\Delta P$ отпорностью системы (термин «отпорность» использовал в своих работах А.В. Геммерлинг [6] –[8]). Пошагово строя кривую равновесных состояний, мы, вообще говоря, одновременно оцениваем отпорность механической системы, а также можем сравнить начальную и конечную отпорности.

Определение напряженно-деформируемого состояния механической системы в процессе нагружения обычно выполняется на основе анализа систем дифференциальных уравнений состояния методом пошагового нагружения. Этот подход позволяет построить полную кривую равновесных состояний исследуемой механической системы. Впрочем для оценки устойчивости этой системы достаточно сопоставить отпорности начального и конечного (максимального) нагружений.

Положим, что $\overline{P}$ – максимально возможная нагрузка механической системы; $\Delta\overline{P}$ – заданное достаточно малое приращение нагрузки (составляющее примерно $0{,}025\cdot\overline{P}$); $\Delta\overline{U}_0$ – начальное обобщённое приращение перемещений системы, которое соответствует полной нагрузке, равной $\Delta\overline{P}$. Сравним начальный и последний участки кривой равновесных состояний (рисунок 1): значительное отклонение от начальной прямой свидетельствует о том, что система близка к потере устойчивости.

Для того, чтобы исследовать устойчивость некоторого равновесного состояния необходимо дать системе малое положительное приращение нагрузки $+\Delta\overline{P}$. А затем следует оценить приращение обобщённого перемещения ΔU_j. Пусть норма $||\Delta s||$ сеточной функции U является неотрицательным числом, принимаемое за меру отклонения линии BC от прямолинейной зависимости 0–A($\Delta\overline{P}$, U_0)–B′C′. Здесь точка B имеет координаты ($\overline{P}$, U_j), точка C – координаты ($\overline{P}+\Delta\overline{P}$, $U_j+\Delta\overline{U}_j$).

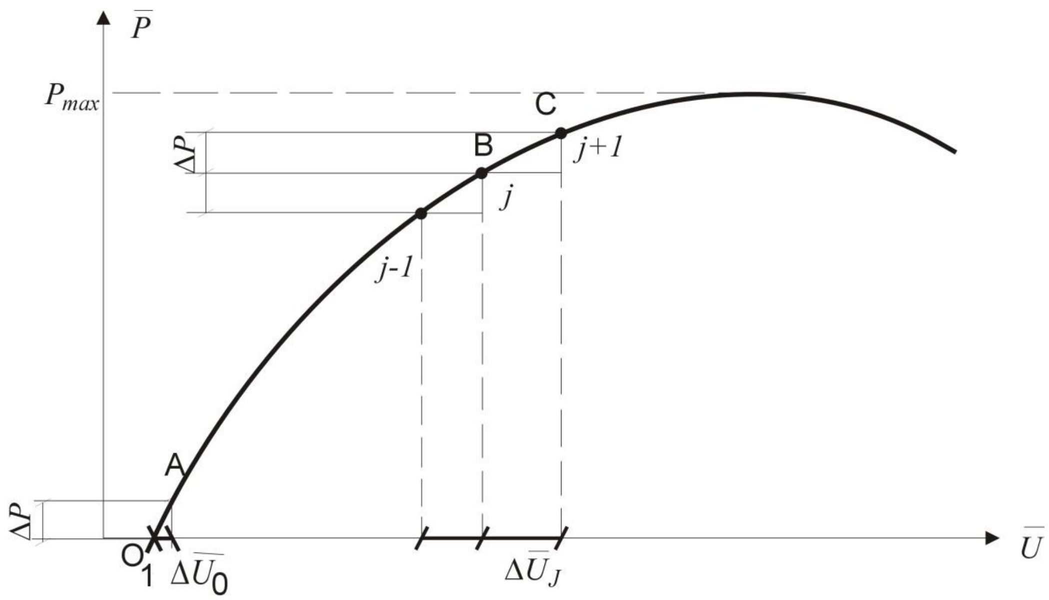

Рисунок 1 – Кривая равновесных состояний механической системы

Рассмотрим методику вычисления нормы $||\Delta s||$. Если одинаковые приращения нагрузки вызывают одинаковые приращения перемещений, то имеет место линейная зависимость «*P* – *U*». Плавное снижение жесткости соответствует соотношению

$$t > \frac{\Delta U_j}{\Delta U_0} > 1, \quad (2)$$

где *t* – некоторое предельное число, являющееся критерием входа в зону слабой устойчивости, например ***t***=2.

Исследование механической системы по теории устойчивости Ляпунова предполагает проверку ее отклика на малые возмущения. Если система находится в состоянии устойчивого движения, то в ответ на малые возмущения возникают малые отклонения. Аналогичный подход применен в данной работе: если на рассматриваемом участке движения (равновесия) механической системы малые нагрузки вызывают малые изменения напряжённо-деформированного состояния, то система устойчива.

Рассмотрим подробнее термин «малое изменение напряжённо-деформированного состояния».

Если диаграмма «*P* – *U*» является плавной кривой с асимптотой или ниспадающей ветвью, то всегда можно найти такое малое приращение нагрузки $\Delta\overline{P}$, что на одном из шагов нагружения будет справедливо выражение:

$$\frac{\Delta U_j}{\Delta U_0} \geq t\,. \quad (3)$$

Следовательно, если норма $\|\Delta s\|$ сеточной функции достигла или превысила значение ***t***, то конструкция исчерпала заданный показатель устойчивости.

Очевидно, что величина ***t*** связана с начальной жёсткостью рассматриваемой системы. Параметр ***t*** можно определить путем численных и/или физических экспериментов со зданиями определенных классов, таких как стальные рамные каркасы, монолитные железобетонные каркасы, стальные башни и т.д. Например, для достаточно жёстких систем допустимо принять ***t***=3, для гибких тонкостенных систем – ***t***=2.

Формула для определения сближения концов *k*-ого стержня имеет вид:

$$U_k = \frac{1}{2}\int\left[\left(w'\right)^2 + \left(v'\right)^2\right]dx + \left(u_0 - u_n\right) \approx$$
$$\approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(w_i - w_{i-1}\right)^2 + \left(v_i - v_{i-1}\right)^2}{\Delta} + \left(u_0 - u_n\right) \qquad (4)$$

где i – номер сечения стержня.

Обобщенное перемещение системы, состоящей из K стержней, вычисляется по формуле:

$$U_j = \sum_{k=1}^{K} U_k \ . \qquad (5)$$

Состояние системы будет определяться величиной Δs, вычисляемой из соотношения

$$\Delta s = \frac{\Delta U_j}{\Delta U_0}.$$

Библиографический список:

1. Алявдин П.В., Гариб М. Численное исследование несущей способности стержневых конструкций при больших перемещениях. Минск: БПИ, 1989. 15 с.

2. Бельский Г.Е. О расчете стержневых систем за пределами упругости // Строительная механика и расчет сооружений. 1966. №2. С. 1-6.

3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехтеориздат, 1956. 600 с.

4. Болотин В.В. О понятии устойчивости в строительной механике // Проблемы устойчивости в строительной механике: Сб. ст. / Под ред. В.В. Болотина, И.Н. Рабиновича, А.Ф. Смирнова. М.: Стройиздат, 1965. С. 6-27.

5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

6. Геммерлинг А.В. Несущая способность стержневых стальных конструкций. М.: Госстойиздат, 1958.

7. Геммерлинг А.В., Бельский Г.Е. Несущая способность рам в упруго-пластической стадии // Расчет конструкций работающих в упруго-пластической стадии: Сб.тр. / Госстройиздат. 1961.

8. Геммерлинг А.В., Сливкер В.И. Матрица мгновенных реакций нелинейно-упругого стержня // Строительная механика и расчет сооружений. 1973. №3. С. 26-31.

9. Дривинг А.Я., Федоров Е.И. К расчету стержней из нелинейно-упругого материала при больших прогибах // Строительная механика и расчет сооружений. 1972. №1. С. 43-45.

10. Матевосян Р.Р. Устойчивость сложных стержневых систем. Качественная теория. М.: Госстройиздат, 1961. 252 с.

11. Расчет конструкций, работающих в упруго-пластической стадии / Под ред. А.В. Геммерлинга // Тр. ЦНИИСК. 1961. Вып. 7. 336 с.

12. Смирнов А.Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. М.: Трансжелдориздат, 1947. 308 с.

13. Хорн М. Устойчивость упруго–пластических конструкций: Сб. переводов «Механика». М., 1965. Вып. №1-89. С. 114-149.

14. Шеин А.И., Раевский А.Н. Применение метода множителей Лагранжа при оптимизации элементов многоэтажных рам из условия устойчивости // Проблема оптимизации и надежности в строительной механике: Докл. тез. / Всесоюзн. науч. конф. Вильнюс, 1983.

15. Шеин А.И. Об оптимизации упругопластических рам с учетов устойчивости // Строительная механика сооружений: Межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1982. С. 138-143.

16. Шеин А.И. Оптимизация пространственных циклически симметричных рам из условия устойчивости // Информационный листок №123-84. Пенза: ЦНТИ, 1984. 4 с.

17. Шеин А.И. Основы оптимизации строительных конструкций. Часть 1: Учебное пособие. Пенза: ПГАСИ, 1994. 53с.

18. Шеин А.И. Оптимизация форм упругих тел из условия устойчивости // Материалы XXVIII научно-технической конференции. Пенза: ПГАСА, 1995. С. 166.

19. Шеин А.И. Потеря устойчивости напряжённо-деформированного состояния физически нелинейных стержневых систем // Материалы XXX научно-технической конференции. Пенза: ПГАСА, 1999. С. 133-134.

20. Шеин А.И. Метод сеточной аппроксимации элементов при расчёте рамных каркасов // Известия вузов. Строительство. 2002. №3. С. 8-13.

21. Шеин А.И. Оценка устойчивости неконсервативных стержневых систем методом сеточной аппроксимации элементов в динамической постановке // Эффективные строительные конструкции: теория и практика: Материалы международной научно-технической конференции. Пенза: ПГАСА, 2002. С. 262-265.

22. Шеин А.И. Расчёт стержневых систем на основе уточнённой теории и метода сеточной аппроксимации элементов // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2003. №1. С. 38-39.

23. Шеин А.И. Уточнённая теория стержневых систем применительно к методу сеточной аппроксимации элементов // Известия вузов. Строительство. 2003. №2. С. 11-16.

24. Шеин А.И., Дукарт А.В. Приближённый метод оценки устойчивости по диаграмме равновесных состояний //Актуальные проблемы современного строительства: Материалы XXXII всероссийской научно-технической конференции. Пенза: ПГАСА, 2003. С. 115-116.

25. Шеин А.И. К решению задач устойчивости // Известия Тульского государственного университета. Серия «Строительные материалы, конструкции и сооружения». Тула: Издательство ТулГУ, 2003. Вып. 5. С. 176–179.

26. Zeng L. F., Wiberg N.-E. A generalized coordinate method for the analisis of 3d tall buildings. International journal computersand and Structures. 1989. Vol 33. №6. P. 1356-1377.

27. Shoemaker C.A., Liaoli-Zhi, Albert Brian H., Abel John F. Optimal nonlinear control with geometrically nonlinear finite element analysis for flexible structures: some preliminary results / Comput. Mech 88: Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. End. Sli., Atlanta, Ga, Apr. 10-14, 1988. Vol 2. Berlin, 1988. P. 64.I.1-64.I.4