

УДК 539.371

**ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В
СПЛОШНОЙ СРЕДЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ
ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ СЫПУЧЕЙ
СРЕДЫ**

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Статья посвящена вычислению скоростей распространения упругопластических волн деформаций слабого разрыва в сплошной среде, механическое поведение которой описывается уравнениями модифицированной деформационной теории пластичности сыпучей среды. Приводится построение векторных диаграмм мгновенных скоростей волн деформаций для характерных видов плоской деформации: двухосного равномерного удлинения, одноосного удлинения, чистого сдвига, одноосного укорочения, двухосного равномерного укорочения. Анализ векторных диаграмм мгновенных скоростей волн деформаций показывает, что закономерности распространения двумерных упругопластических волн деформаций при плоской деформации, существенно определяется не только видом напряжённо-деформированного состояния в рассматриваемой точке сплошной среды и взаимной ориентации нормали к фронту волны и главных осей, но также и значением механических констант рассматриваемой математической модели сплошной среды.

Ключевые слова: волны деформаций, скорости распространения, сыпучая среда, плоская деформация.

REGULARITIES OF PROPAGATION OF DEFORMATION IN A SOLID ENVIRONMENT DESCRIBED DEFORMATION PLASTICITY THEORY MODIFIED GRANULAR MEDIA

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the Department "Mechanics".

Abstract

The article deals with the computation of the velocities of propagation of elastoplastic deformation waves weak solid gap Wednesday, mechanical behavior of which is described by equations a modified theory of plasticity deformation of granular Wednesday. Provides instant velocity vector diagrams of building waves of deformations for specific types of Planar deformation (biaxial uniform elongation, uniaxial elongation, pure shear, shorten a uniaxial, biaxial uniform shortening). Analysis of vector diagrams of instant velocity waves of deformations reveals that patterns of distribution of two-dimensional elastoplastic deformation waves in two-dimensional deformation, substantially determined not only view stress/strain in this status the solid point Wednesday and mutual orientation of normals to the front of the wave and the main axes, but also value mechanical constants of the considered mathematical model of solid Wednesday.

Keywords: waves of deformations, propagation velocity, loose Wednesday, flat deformation.

Введение

Волны деформаций в сплошных и дискретных средах возникают при динамических воздействиях [1]. Различают упругие и упругопластические; плоские, цилиндрические и сферические; одномерные, двумерные и трёхмерные волны деформаций слабого или сильного (ударные волны) разрыва [2]. Основной характеристикой волны деформаций является скорость её распространения. Зависимость скорости распространения не одномерной волны

от рассматриваемого направления определяет закономерности её распространения. Закономерности распространения упругопластических волн деформаций, как показывают многочисленные исследования, существенно определяется не только видом напряжённо-деформированного состояния в рассматриваемой точке сплошной среды и взаимной ориентации нормали к фронту волны и главных осей, но также и видом рассматриваемой математической модели, а также значением её механических констант [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Для выявления закономерностей распространения упругопластических волн деформаций строятся векторные диаграммы мгновенных скоростей волн деформаций, показывающие значения скоростей распространений волн деформаций в рассматриваемой точке сплошной среды в зависимости от рассматриваемого направления.

Математическая модель сплошной среды

В данной работе рассматриваются закономерности распространения двумерных упругопластических волн деформаций в сплошной среде, механическое поведение которой описывается уравнениями модифицированной деформационной теории пластичности сыпучей среды [10]. Деформационные соотношения данной модели записываются в форме перекрёстных зависимостей между первыми инвариантами тензоров σ, ε и вторыми инвариантами девиаторов T, Γ напряжений и деформаций:

$$T = \left\{ G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right) - fK_0 \left[1 - g^* \varepsilon \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \right] \frac{\varepsilon}{\Gamma} \right\} \Gamma = G(\varepsilon, \Gamma) \cdot \Gamma; \quad (1)$$

$$\sigma = \left\{ K_0 \left[1 - g^* \varepsilon \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \right] \right\} \varepsilon = K(\varepsilon, \Gamma) \cdot \varepsilon.$$

Здесь $T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ – интенсивность касательных

напряжений; $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$ – интенсивность

деформаций сдвига; $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – среднее напряжение; $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – объёмная деформация; G_0 – начальный модуль сдвига при чистом сдвиге; K_0 – начальный модуль объёмного растяжения (сжатия); Γ_s – предельная интенсивность деформаций сдвига; f – аналог коэффициента внутреннего трения; g^* – коэффициент дилатансии; $G(\varepsilon, \Gamma)$ – переменный модуль сдвига; $K(\varepsilon, \Gamma)$ – переменный модуль растяжения (сжатия).

Динамические уравнения равновесия

Динамические уравнения равновесия в перемещениях для плоской деформации сплошной среды, физические соотношения для которой имеют форму произвольных перекрёстных зависимостей между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций имеют вид [11]:

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{11} + A_{12} \mathcal{G}_{xy} + 2G; & A_2 &= A_{21} + A_{22} \mathcal{G}_{xy}; \\ B_1 &= A_{14} \frac{\varepsilon_{xy}}{\Gamma} + G; & B_2 &= A_{24} \frac{\varepsilon_{xy}}{\Gamma}; \\ C_1 &= A_{12} \frac{\varepsilon_{xy}}{\Gamma} + A_{13} + A_{14} \mathcal{G}_{yx}; & C_2 &= A_{22} \frac{\varepsilon_{xy}}{\Gamma} + A_{23} + A_{24} \mathcal{G}_{xy} + G; \\ D_1 &= A_{12} \frac{\varepsilon_{xy}}{\Gamma}; & D_2 &= A_{22} \frac{\varepsilon_{xy}}{\Gamma} + G; \\ E_1 &= A_{13} + A_{14} \mathcal{G}_{yx}; & E_2 &= A_{23} + A_{24} \mathcal{G}_{yx} + 2G; \\ F_1 &= A_{11} + A_{12} \mathcal{G}_{yx} + A_{14} \frac{\varepsilon_{xy}}{\Gamma} + G; & F_2 &= A_{21} + A_{22} \mathcal{G}_{yx} + A_{24} \frac{\varepsilon_{xy}}{\Gamma}, \end{aligned}$$

причём

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a_x, \quad A_{12} = b_x, \quad A_{13} = \varepsilon_{xy} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}, \quad A_{14} = \varepsilon_{xy} \frac{\partial G}{\partial \Gamma}; \\
A_{21} &= \varepsilon_{yx} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}, \quad A_{22} = \varepsilon_{yx} \frac{\partial G}{\partial \Gamma}, \quad A_{23} = a_y, \quad A_{24} = b_y, \\
a_x &= K - \frac{2}{3}G + \varepsilon \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + 2g_{xx} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}; \quad a_y = K - \frac{2}{3}G + \varepsilon \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + 2g_{yy} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}; \\
b_x &= \varepsilon \frac{\partial K}{\partial \Gamma} + 2g_{xx} \frac{\partial G}{\partial \Gamma}; \quad b_y = \varepsilon \frac{\partial K}{\partial \Gamma} + 2g_{yy} \frac{\partial G}{\partial \Gamma}; \\
g_{xx} &= \varepsilon_{xx} - \frac{\varepsilon}{3}; \quad g_{yy} = \varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon}{3}; \quad g_{xy} = \frac{2(2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})}{3\Gamma}; \quad g_{yx} = \frac{2(2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{3\Gamma}.
\end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$.

Определение скоростей распространения волн деформаций

Для определения скоростей распространения двумерных волн деформаций – нестационарных поверхностей сильных разрывов вторых производных перемещений, являющихся, вообще говоря, поверхностями слабых разрывов деформаций, напряжений и скоростей частиц – воспользуемся кинематическими и динамическими условиями совместности [9]:

Пусть $\omega(x_1, x_2, t) = 0$ – уравнение поверхности разрыва. Применяя кинематические условия совместности [12]

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2 \partial x_k^2} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \lambda_{ij} \quad (3)$$

к системе (2), получим динамические условия совместности:

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \lambda_{u_j} a_{ij}^{kl} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_l} = \rho \lambda_{u_i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2; \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь λ_{u_i} – коэффициенты прерывности, a_{ij}^{kl} – коэффициенты системы уравнений (2), [...] – символическая запись скачка производных.

Учитывая, что значения скоростей распространения волн деформаций по нормали к фронту определяются соотношением

$$N^2 = \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2},$$

а направляющие косинусы l_i вектора нормали к фронту волны в локальной системе координат, совпадающей с главными осями, определяются соотношениями

$$l_i^2 = \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2},$$

систему (4) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \rho N^2)\lambda_{u_1} + \beta_1\lambda_{u_2} = 0; \\ \alpha_2\lambda_{u_1} + (\beta_2 - \rho N^2)\lambda_{u_2} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1 l_1^2 + B_1 l_2^2 + C_1 l_1 l_2; & \beta_1 &= D_1 l_1^2 + E_1 l_2^2 + F_1 l_1 l_2; \\ \alpha_2 &= A_2 l_1^2 + B_2 l_2^2 + C_2 l_1 l_2; & \beta_2 &= D_2 l_1^2 + E_2 l_2^2 + F_2 l_1 l_2. \end{aligned}$$

Для существования ненулевых решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (5) её определитель должен быть равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \rho N^2 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \rho N^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$2\rho(N^{(\pm)})^2 = (\alpha_1 + \beta_2) \pm \sqrt{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\alpha_2\beta_1}. \quad (6)$$

Уравнение (6) определяет две независимые скорости распространения двумерных волн деформаций в сплошной среде, находящейся в условиях плоской деформации.

Исследование характера разрывов [6] показывает, что чисто продольные и чисто поперечные волны имеют место быть только при совпадении нормали к фронту волны с одним из главных направлений.

Построение диаграмм мгновенных скоростей волн деформаций.

Построение векторных диаграмм мгновенных скоростей волн деформаций выполнено для характерных видов деформированного состояния плоской деформации.

При вычислении коэффициентов системы уравнений (2) будем помнить, что в главных осях $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_2$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$, $\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \neq 0$. В соответствии с деформационными зависимостями (1), имеем:

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon} = -K_0 g^* \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2;$$

$$\frac{\partial K}{\partial \Gamma} = 2K_0 \frac{g^*}{\Gamma_s^2} \varepsilon \Gamma \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right) \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s} - 1\right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} = -fK_0 \frac{1}{\Gamma} + 2fg^* K_0 \frac{\varepsilon}{\Gamma} \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2;$$

$$\frac{\partial G}{\partial \Gamma} = -\frac{G_0}{2\Gamma_s} + fK_0 \frac{\varepsilon}{\Gamma^2} + fg^* K_0 \frac{\varepsilon^2}{\Gamma_s^2} \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right) \left(2 - 3\frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right).$$

1. Равномерное двухосное укорочение (удлинение): $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq 0$; $\varepsilon_3 = 0$,

то есть $\varepsilon = 2\varepsilon_1$; $\Gamma = \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{3}} \text{Sign } \varepsilon_1$; $\vartheta_{xx} = \vartheta_{yy} = \frac{\varepsilon_1}{3}$; $\vartheta_{xy} = \vartheta_{yx} = 0$.

2. Одноосное укорочение (удлинение): $\varepsilon_1 \neq 0$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, то есть

$\varepsilon = \varepsilon_1$; $\Gamma = \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{3}} \text{Sign } \varepsilon_1$; $\vartheta_{xx} = \frac{2\varepsilon_1}{3}$; $\vartheta_{yy} = -\frac{\varepsilon_1}{3}$; $\vartheta_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Sign } \varepsilon_1$; $\vartheta_{yx} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Sign } \varepsilon_1$.

3. Чистый сдвиг: $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$; $\varepsilon_3 = 0$, то есть

$\varepsilon = 0$; $\Gamma = 2\varepsilon_1 \text{Sign } \varepsilon_1$; $\vartheta_{xx} = \varepsilon_1$; $\vartheta_{yy} = -\varepsilon_1$; $\vartheta_{xy} = \text{Sign } \varepsilon_1$; $\vartheta_{yx} = -\text{Sign } \varepsilon_1$.

Значения механических констант примем следующими: $\frac{K_0}{G_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

$\Gamma_s = 0,01155$; $g^* = 10$; $f = 0,5$.

На рисунках 1, 2 и 3 показаны диаграммы мгновенных скоростей $2\rho \frac{(N^{(\pm)})^2}{G_0}$ плоских упругопластических волн деформаций слабого разрыва для случаев двухосного равномерного удлинения и укорочения, одноосного удлинения и укорочения, чистого сдвига. Сплошной линией показаны диаграммы скоростей для случая, когда перед радикалом в формуле (6) берётся знак "+"; точечной линией показаны диаграммы скоростей для случая, когда перед радикалом в формуле (6) берётся знак "-".

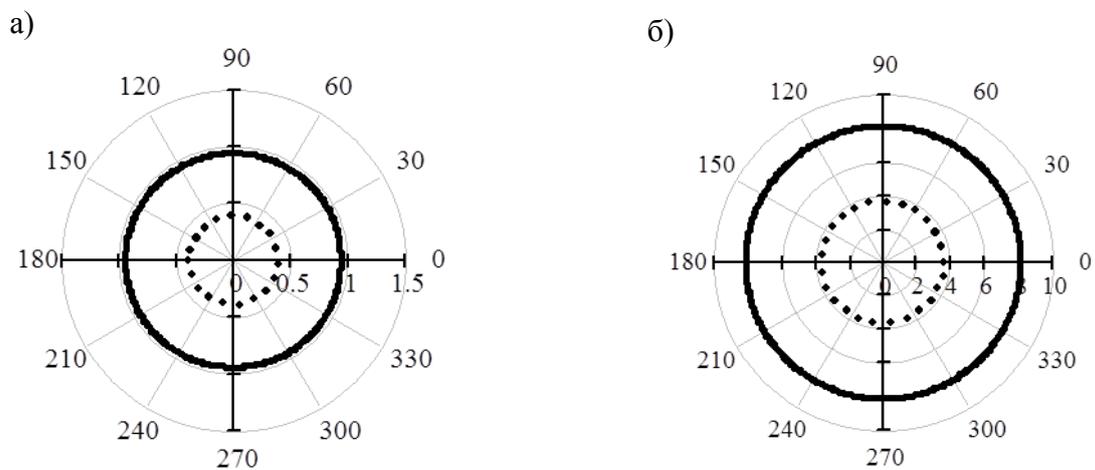


Рисунок 1 – Диаграммы мгновенных скоростей плоских упругопластических волн деформаций слабого разрыва: а) двухосное равномерное удлинение; б) двухосное равномерное укорочение

Для случаев двухосного равномерного удлинения и укорочения диаграммы мгновенных скоростей представляют собой окружности, причём при двухосном равномерном укорочении величина скорости распространения двумерной волны больше чем при двухосном равномерном удлинении (рисунок 1).

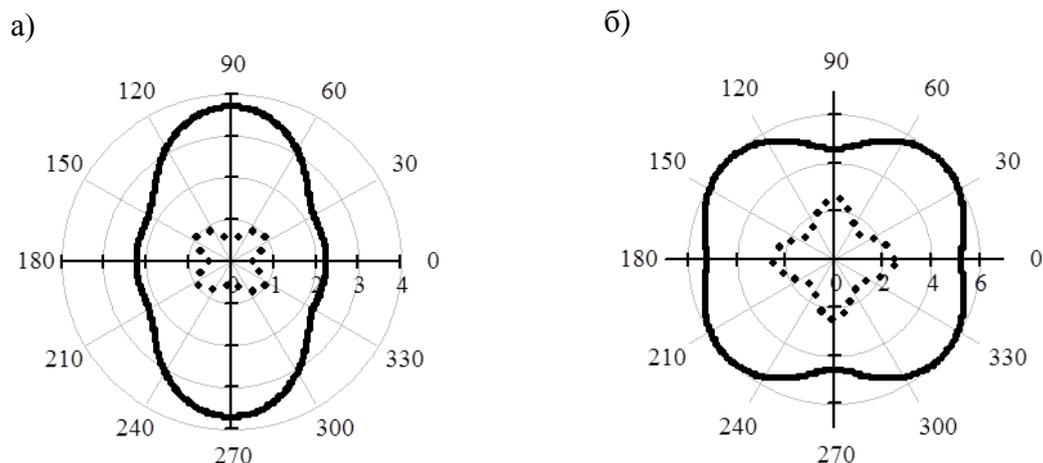


Рисунок 2 – Диаграммы мгновенных скоростей плоских упругопластических волн деформаций слабого разрыва: а) одноосное удлинение; б) одноосное укорочение

Скорости распространения двумерных волн деформаций при одноосном удлинении, вообще говоря, меньше скорости их распространения при одноосном укорочении (рисунок 2). При одноосном удлинении экстремальные значения скоростей распространения волны $N^{(+)}$ наблюдаются как в направлении действующей первой главной деформации $\varepsilon_1 > 0$, так и в направлении, перпендикулярном к ней, то есть в направлении действия деформации $\varepsilon_2 = 0$, причём в направлении ε_1 величина скорости волны значительно меньше величины скорости волны в направлении ε_2 . Что касается волны $N^{(-)}$, то её экстремальные значения наблюдаются как в направлениях деформаций ε_1 и ε_2 , так и в направлении, составляющем угол в 45^0 с направлением ε_1 (рисунок 2а).

При одноосном укорочении экстремумы и скорости $N^{(+)}$, и скорости $N^{(-)}$ наблюдаются как в направлениях деформаций ε_1 и ε_2 , так и в направлении, составляющем угол в 45^0 с направлением ε_1 , причём максимум скоростей $N^{(+)}$ соответствует минимуму скоростей $N^{(-)}$, и наоборот (рисунок 2б).

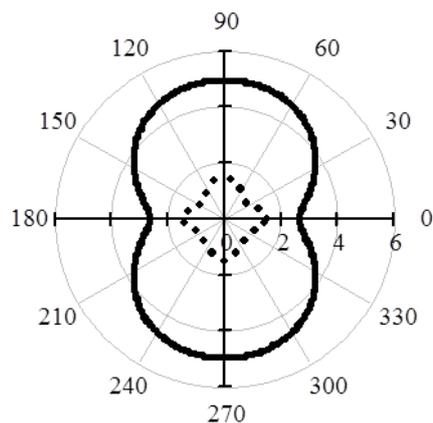


Рисунок 3 – Диаграммы мгновенных скоростей плоских упругопластических волн деформаций слабого разрыва: чистый сдвиг

Экстремальные значения скоростей $N^{(+)}$ распространения волн деформаций при чистом сдвиге наблюдаются в направлении действия и деформации ε_1 , и деформации ε_2 , причём в направлении $\varepsilon_2 < 0$ значения скоростей $N^{(+)}$ выше их значения в направлении $\varepsilon_1 > 0$. Экстремальные значения скоростей $N^{(-)}$ распространения волн деформаций при чистом сдвиге наблюдаются как в направлении действия деформаций ε_1 и ε_2 , так и в направлении под углом в 45° к главным направлениям, причём в направлениях ε_1 и ε_2 значения скоростей $N^{(-)}$ выше их значения в направлении, составляющем угол в 45° с главными направлениями (рисунок 3).

Выводы

Закономерности распространения двумерных упругопластических волн деформаций слабого разрыва при плоской деформации, существенно определяется не только видом напряжённо-деформированного состояния в рассматриваемой точке сплошной среды и взаимной ориентации нормали к фронту волны и главных осей, но также и значением механических констант рассматриваемой математической модели сплошной среды.

Библиографический список:

1. Бидерман ВЛ. Расчёты на ударную нагрузку // Основы современных методов расчёта на прочность в машиностроении: Сб. под ред. С.Д. Пономарёва. М.: Машгиз, 1952.
2. Новацкий В.К. Волновые задачи теории пластичности. М.: МИР, 1978. 307 с.
3. Гениев Г.А. Вопросы динамики физически нелинейных сплошных сред // Теория и методы расчёта строительных конструкций: Труды ЦНИИСК им. Кучеренко. 1974. Вып. 35. С. 5-18.
4. Гениев Г.А. О закономерностях распространения волн деформаций в бетоне // Строительные конструкции. Теория и методы расчёта: Сб. ст. под ред. проф. А.А. Ржаницына. М.: Изд. ЦНИИСК им. Кучеренко, 1970. Вып.13. С. 12-18.
5. Гениев Г.А. О закономерностях распространения двумерных волн в сжимаемой жёстко-упруго-пластической среде // Исследования по теории сооружений: Сб. ст. 1972. Вып. XIX. С. 5-10.
6. Гениев Г.А. О некоторых закономерностях распространения трёхмерных волн деформаций в неупругих средах и средах с внутренним трением // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1975. №1. С. 131-136.
7. Гениев Г.А., Эстрин М.И. Динамика пластической и сыпучей сред. М.: Изд-во литературы по строительству, 1972. 216 с.
8. Бакушев С.В. К вопросу об определении скоростей трёхмерных волн деформаций в нелинейной механике деформируемого твёрдого тела // Строительная механика и расчёт сооружений. 1992. №3. С. 36-41.
9. Бакушев С.В. О некоторых закономерностях распространения двумерных волн деформаций в геометрически-нелинейных средах // Известия ВУЗов. Строительство. 1996. №5. С. 27-31.
10. Бакушев С.В. Модифицированная деформационная теория пластичности сыпучей среды // Строительная механика и расчёт сооружений. 1918. №2. С. 2-8.

11. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. М.: Книжный дом «Либроком», 2013. 312 с.
12. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4 Ч.2. М.: Наука, 1981. 550 с.