

УДК 531.8

ОЦЕНКА НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Логинова Елена Валерьевна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Для консольного стержня, находящегося в условиях плоского изгиба, исследуются вопросы оценки точности формул для напряжений из курса сопротивления материалов при помощи уравнений равновесия из теории упругости и условий на поверхности стержня. Рассматривается три вида нагружения стержня: сосредоточенным изгибающим моментом, сосредоточенной силой, приложенными на конце консоли, и равномерно-распределённой нагрузкой по всему пролёту. Поперечное сечение стержня принимается прямоугольным. Отмечено, что во всех случаях загрузки стержня, как уравнения равновесия, так и уравнения на поверхностях стержня выполняются, вообще говоря, в ограниченных зонах, в частности либо на нейтральной оси, либо на торцевой свободной поверхности по верхнему и нижнему горизонтальному обреза поперечного сечения. В областях, где уравнения равновесия или условия на поверхностях стержня не выполняются подсчитаны погрешности как в уравнениях равновесия, так и в условиях на поверхностях стержня. Отмечено, что величина погрешности, вообще говоря, пропорциональна действующей на стержень нагрузке и обратно

пропорциональна моменту инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Ключевые слова: консольный стержень, плоский изгиб, уравнения равновесия, граничные условия, погрешность.

SCORE A BUSY CONDITION BENT CONSOLE WEB METHODS OF THE THEORY OF ELASTICITY

Bakushev Sergey Vasilevish,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Loginova Elena Valerievna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

For a console terminal, under flat bending, explores the issues of measurement accuracy formulas for stress resistance of materials using the equilibrium equations of the theory of elasticity and surface conditions of the rod. Considers three types of loading rod: bending moment focused force, attached to the end of the console, and uniformly distributed load across span. Cross-sectional area of the rod is taken rectangular. Noted that in all cases of Web logging, as the equilibrium equations and equations on surfaces the rod run, generally speaking, in limited areas, in particular or on neutral axis, either on the face of the free surface of the top and bottom horizontal cross-section beam. In areas where the equilibrium equations or conditions on surfaces of the rod are not met are counted as errors in the equations of equilibrium and on the surfaces of the rod. Noted that the magnitude of errors, generally speaking, proportional effect on the rod the load moment of inertia and is inversely proportional to the cross-sectional area relative to the neutral axis.

Keywords: cantilever rod, flat bending, equilibrium equations, boundary conditions, error.

Введение

То, что формулы сопротивления материалов, используемые для оценки напряжённого и деформированного состояния изгибаемых стержней, являются приближёнными, ни для кого не является секретом. Этот вопрос исследован достаточно подробно как с точки зрения напряжённого, так и с точки зрения деформированного состояний и описан во многих работах, как по сопротивлению материалов, так и по теории упругости, в частности, в работе [1].

Следует отметить, однако, что в основном оценка точности формул сопротивления материалов методами теории упругости выполнялась для балок, поперечное сечение которых либо прямоугольник, либо набор прямоугольников. При этом вопрос о том, в каких точках балки формулы сопротивления материалов точно описывают напряжённое и деформированное состояние, как правило, не ставился. Не оценивалась также погрешность, вносимая формулами сопротивления материалов в уравнения равновесия, или уравнения на поверхности балки, заданного поперечного сечения и нагруженной определённой нагрузкой.

В данной работе рассматривается консольная балка прямоугольного поперечного сечения, нагруженная тремя видами нагрузки: сосредоточенным изгибающим моментом, приложенным на конце консоли; сосредоточенной силой, приложенной на конце консоли; равномерно-распределённой нагрузкой, приложенной по всему пролёту. Используя классические формулы для напряжений из курса сопротивления материалов, определяются зоны, в которых уравнения теории упругости – уравнения равновесия и уравнения на поверхности балки выполняются точно, а также определяется погрешность, вносимая в уравнения равновесия или условия на поверхности балки в тех зонах, где эти уравнения (равновесия и на поверхности) не выполняются.

Классические формулы сопротивления материалов

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения (рисунок 1). Тогда, на основании [2], можно записать:

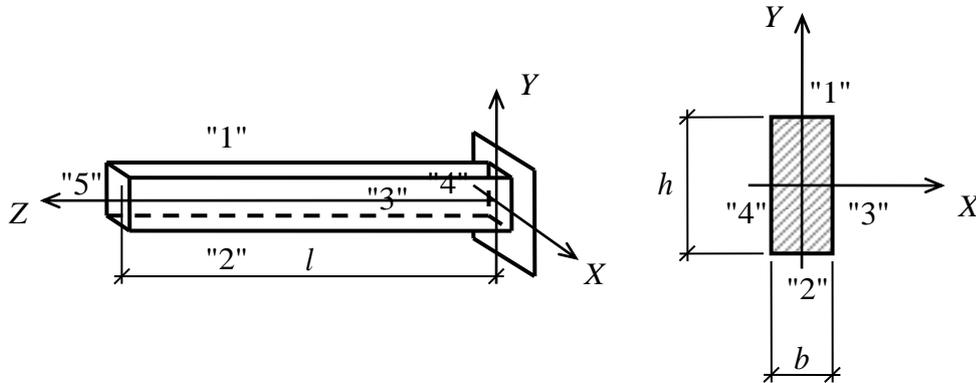


Рисунок 1 - Консольная балка

$$\sigma_x = 0; \sigma_y = 0; \sigma_z = \frac{M_x(z)}{I_x} y; \quad (1)$$

$$\tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = \frac{Q_y(z) \cdot S_x^{omc}(y)}{I_x \cdot b_x}; \tau_{zx} = 0.$$

Здесь, $I_x = \frac{bh^3}{12}$; $S_x^{omc}(y) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$. (2)

Будем полагать, что проекции объёмной силы на координатные оси равны нулю: $F_x = 0$; $F_y = 0$; $F_z = 0$.

Консоль, нагруженная сосредоточенным моментом

Консольная балки, нагруженная сосредоточенным моментом, находится в условиях чистого изгиба (рисунок 2). При этом $M_x(z) = -M$; $Q_y(z) = 0$, то есть соотношения (1) получают вид:

$$\sigma_x = 0; \sigma_y = 0; \sigma_z = -\frac{M}{I_x} y; \tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = 0; \tau_{zx} = 0. \quad (3)$$

Уравнения равновесия (уравнения Навье) при этом выполняются, очевидно, тождественно. Условия на поверхностях "1", "2", "3" и "4" также выполняются тождественно. Условия на поверхности "5", направляющие

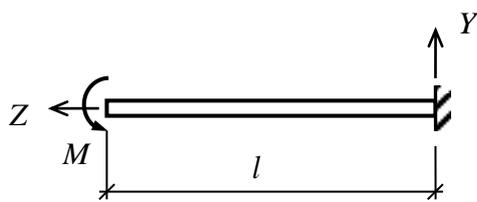


Рисунок 2 - Консоль,
нагруженная сосредоточенным
моментом

косинусы нормали к которой равны $l=0, m=0, n=1$ и, кроме того на поверхности "5" координата $z=l$, сводятся к соотношению: $-\frac{M}{I_x}y=0$. Это означает, что условия на торцевой поверхности "5" выполняются тождественно лишь на нейтральной линии, где $y=0$.

Максимальная погрешность в условиях на поверхности "5" достигается при $y = \pm \frac{h}{2}$ и равна $\mp \frac{Mh}{2I_x}$.

Консоль, нагруженная сосредоточенной силой

Для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой (рисунок 3), соотношения (1) получают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x = 0; \sigma_y = 0; \sigma_z = -\frac{F \cdot z}{I_x} y; \\ \tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = \frac{F}{2I_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия (уравнения Навье) сводятся к соотношению: $-2\frac{Fy}{I_x}=0$. Следовательно, на нейтральной линии ($y=0$), условия равновесия

выполняются тождественно. Максимальная погрешность в уравнениях равновесия достигается при $y = \pm \frac{h}{2}$, то есть на верхней и нижней поверхностях балки, и равна $\mp \frac{Fh}{I_x}$.

Рассмотрим условия на поверхностях балки.

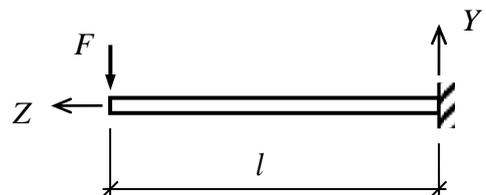


Рисунок 3 - Консоль,
нагруженная
сосредоточенной силой

1. Поверхность "1". Направляющие косинусы нормали к поверхности "1" – $l=0, m=1, n=0$. При этом $y = +\frac{h}{2}$. Тогда, условия на поверхности "1" выполняются тождественно.

2. Поверхность "2". Направляющие косинусы нормали к поверхности "2" – $l=0, m=-1, n=0$. При этом $y = -\frac{h}{2}$. Тогда, условия на поверхности "2" выполняются тождественно.

3. Поверхность "3". Направляющие косинусы нормали к поверхности "3" – $l=1, m=0, n=0$. Очевидно, что условия на поверхности "3" выполняются тождественно.

4. Поверхность "4". Направляющие косинусы нормали к поверхности "4" – $l=-1, m=0, n=0$. Очевидно, что условия на поверхности "4" выполняются тождественно.

5. Поверхность "5". Направляющие косинусы нормали к поверхности "5" – $l=0, m=0, n=1$. При этом $z=l$. Условия на поверхности "5" сводятся к соотношениям:

$$\frac{F}{2I_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = 0; \quad -\frac{F}{I_x} ly = 0. \quad (5)$$

Условия (5₁) будет выполнено тождественно, если $y = \pm \frac{h}{2}$, то есть на верхнем и нижнем горизонтальном обресе поверхности "5". При этом погрешность в условиях на поверхности "5" будет определяться соотношением (5₂), и будет равна $\mp \frac{Flh}{2I_x}$.

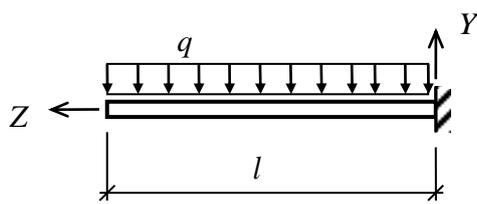
Условие (5₂) будет выполнено тождественно, если $y=0$, то есть на нейтральной линии. При этом погрешность в условиях на поверхности "5" будет определяться соотношением (5₁), и будет равна $\frac{Fh^2}{8I_x}$.

Консоль, нагруженная равномерно-распределённой нагрузкой

Для консольной балки, нагруженной равномерно-распределённой нагрузкой по всему пролёту (рисунок 4), соотношения (1) получают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x = 0; \quad \sigma_y = \frac{q}{2b} \left[1 + 3 \frac{y}{h} - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right]; \quad \sigma_z = -\frac{qz^2}{2I_x} y; \\ \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = \frac{qz}{2I_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); \quad \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения равновесия (уравнения Навье) сводятся к соотношениям:



$$\begin{aligned} \frac{q}{2b} \left(\frac{3}{h} - \frac{12}{h^3} y^2 \right) + \frac{q}{2I_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = 0; \\ -2 \frac{qz}{I_x} y = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Рисунок 4 - Консоль,

нагруженная распределённой
нагрузкой моментом

Условие (7₁) выполняется

тождественно, если $y = \pm \frac{h}{2}$. При этом погрешность в уравнениях равновесия будет определяться выражением (7₂) и будет

изменяться по длине балки от нуля для $z = 0$, до максимального значения $\mp \frac{qlh}{I_x}$ при $z = l$.

Условие (7₂) будет выполняться тождественно, во-первых, на нейтральной оси при $y = 0$; при этом погрешность в уравнениях равновесия будет определяться выражением (7₁) и будет равна $\frac{3q}{bh}$, во-вторых, при $z = 0$, то есть в заделке; при этом погрешность в уравнениях равновесия также будет определяться выражением (7₁) и будет изменяться по высоте сечения балки от значения $\frac{3q}{bh}$ на нейтральной оси до нуля при $y = \pm \frac{h}{2}$.

Легко видеть, что условия на поверхностях "1", "2", "3" и "4" балки выполняются тождественно. На поверхности "5", где направляющие косинусы

нормали к поверхности равны $l=0$, $m=0$, $n=1$ и, кроме того, на поверхности "5" $z=l$, граничные условия сводятся к соотношениям:

$$\frac{ql}{2I_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = 0; \quad \frac{ql^2}{2I_x} y = 0. \quad (8)$$

Условие (8₁) выполняется тождественно, если $y = \pm \frac{h}{2}$. При этом погрешность в условиях на поверхности "5" балки будет определяться выражением (8₂) и будет равна $\mp \frac{qhl^2}{4I_x}$. Условие (8₂) будет выполняться тождественно, если $y=0$. При этом погрешность в условиях на поверхности "5" балки будет определяться выражением (8₁) и будет равна $\frac{qlh^2}{8I_x}$.

Заключение

Выполненные исследования показали следующее:

1. В стержне, нагруженном сосредоточенным моментом, уравнения равновесия выполняются точно. Условия на свободной торцевой поверхности выполняются точно лишь на нейтральной линии; на других поверхностях балки граничные условия выполняются точно.

2. В стержне, нагруженном сосредоточенной силой, уравнения равновесия выполняются точно лишь на нейтральной поверхности $\left(y=0, 0 \leq z \leq l, -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \right)$. Условия на свободной торцевой поверхности выполняются точно лишь на нейтральной линии и на верхнем и нижнем горизонтальном обрезе торцевой поверхности. На других поверхностях балки граничные условия выполняются точно.

3. В стержне, нагруженном равномерно-распределённой нагрузкой, уравнения равновесия выполняются точно лишь на верхней и нижней поверхностях балки, на нейтральной оси и в заделке. Условия на свободной торцевой поверхности выполняются точно лишь на нейтральной линии и на

верхнем и нижнем горизонтальном обресе торцевой поверхности. На других поверхностях балки граничные условия выполняются точно.

Выводы:

Формулы для напряжений из курса сопротивления материалов, строго говоря, не удовлетворяют ни уравнениям равновесия, ни граничным условиям для консольной балки с прямоугольным поперечным сечением, находящейся в условиях плоского изгиба. Однако, выполненные исследования позволяют оценить ошибку как в уравнениях равновесия, так и в условиях на поверхностях балки.

Библиографический список:

1. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. Т II. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 616 с.
2. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / под ред. А.Ф. Смирнова. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1975. 480 с.