

УДК 624.04

**АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ,
ПРЕДСТАВЛЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ ИЗ
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Монахов Владимир Андреевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

профессор кафедры «Механика», доктор технических наук.

Гаврилов Павел Константинович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Приводится сравнительный анализ двух методов расчета стержневых систем – широко известного метода конечных элементов (МКЭ) и дискретного (сетового) метода, в котором основную роль играет геометрическая матрица, формируемая в автоматическом режиме с помощью графа стержневой системы. Рассматривается пример определения усилий в Т-образной раме на основе указанных методов. Дано подробное описание процедур формирования матриц, характеризующих расчётную схему рамы и её напряжённно-деформированное состояние. Выявлены общие черты и различие двух алгоритмов решения поставленной задачи. По результатам расчетов сделаны выводы о влиянии учета геометрических параметров стержневой системы и жёсткости её элементов на состояние системы.

Ключевые слова: стержневая система, метод конечных элементов, геометрическая матрица, граф стержневой системы, матрица инцидентности, усилия, деформации.

METHODS OF THE ROD SYSTEM CALCULATION, BASED ON THE MECHANICAL FINITE-ELEMENT MODELS

Monakhov Vladimir Andreevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department «Mechanics»,

Gavrilov Pavel Konstantinovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

Comparison of the finite-element method and membrane method, based on the graphic matrix, which automatically formed by the rod system's graph. Determination of the strength on the T-shaped frame by the finite-element and membrane methods. Detailed description of the matrix organization, characterized the frame and stressedly-deformed condition of the system. General and different aspects of this approaches. Inferences about influences of the geometric and inflexibility parameters to the rod system.

Keywords: rod system, finite-element method, geometric matrix, rod system graph, incidence matrix, strength, deformations.

Одним из основных методов расчета сооружений на прочность, устойчивость и динамические воздействия в настоящее время является метод конечных элементов. Чаще всего применяется вариант МКЭ в форме метода перемещений. Созданы программы расчёта стержневых систем. Следуя одной из них, сначала в статье рассматриваются основные вычислительные процедуры указанного метода на примере определении усилий в Т-образной раме (рисунок 1). Во второй части работы приводится алгоритм иного подхода к расчёту той же рамы с использованием подобной модели механической системы.

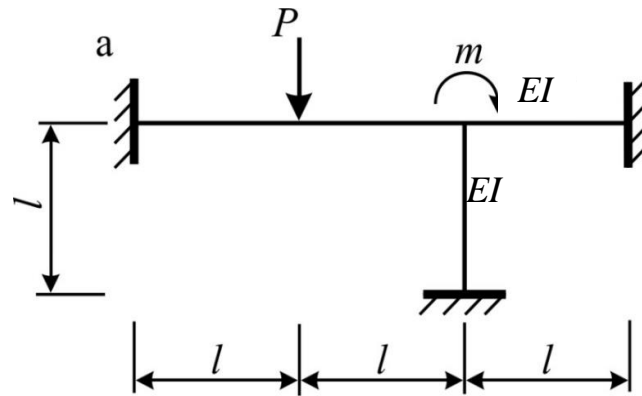


Рисунок 1 – Расчётная схема рамы

В соответствии с алгоритмом расчёта по МКЭ конструкция разбивается на конечные элементы, которые впоследствии нумеруются; вводится также и нумерация узловых перемещений или степеней свободы (рисунок 2).

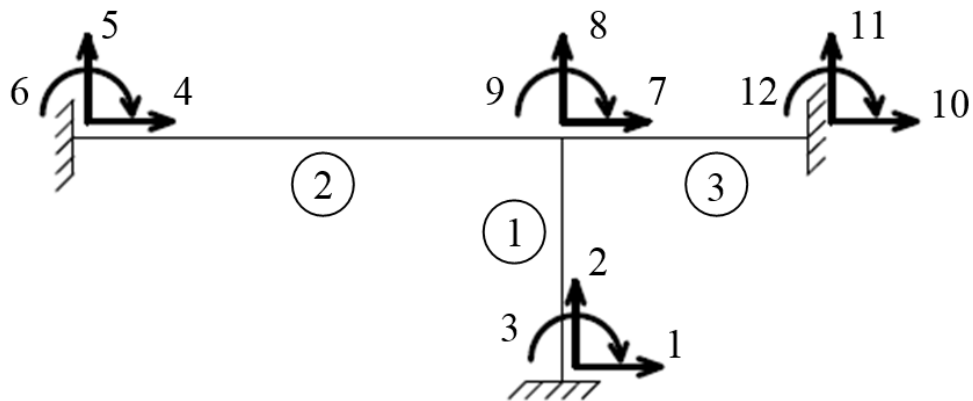


Рисунок 2 – Нумерация конечных элементов и степеней свободы

Затем для каждого элемента производится формирование ячеек жесткости C_i в локальной системе координат для каждого конечного элемента при заданных значениях геометрических и физических параметрах КЭ; в частности, в расчёте величина момента инерции принята равной $I=3,46 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$, длина любого отрезка – $l = 1 \text{ м}$, модуля упругости – $E=2,1 \cdot 10^{11} \text{ кН/м}^2$ и площади поперечного сечения элемента – $A=3,48 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

Ячейка жесткости первого элемента (рисунок 3) имеет вид

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Структура ячеек жесткости 2-го 3-го конечных элементов та же, что и для первого; разумеется, компоненты ячейки жесткости 2-го элемента отличаются от значений 1-го из-за различия длин. Ячейка для 3-го элемента совпадает с ячейкой для второго.

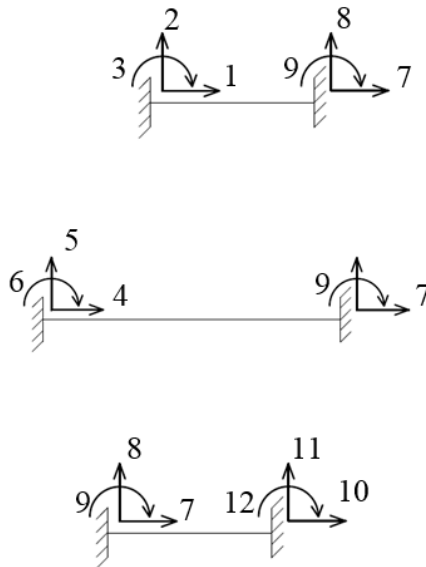


Рисунок 3

Далее ячейки жёсткости C_i преобразуются к глобальной системе координат с матриц поворота $[\varphi_i]$. Одновременно происходит пересылка их элементов в частные матрицы по формуле

$$[R_i] = [A_i]^T [\varphi_i]^T [C_i] [\varphi_i] [A_i],$$

где, например,

$$[A_1]_{(6 \times 12)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– матрица расширения (соответствия) ячейки жёсткости 1-го элемента;

$$[\Phi_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– матрица поворота. В результате элементы ячейки жёсткости оказываются на местах, соответствующих общей нумерации степеней свободы. Складывая их $[R]=[R_1]+[R_2]+[R_3]$, устанавливают глобальную матрицу жесткости $[R]$ стержневой системы:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$8.719 \cdot 10^7$	0	$-4.36 \cdot 10^7$	0	0	0	$-8.719 \cdot 10^7$	0	$-4.36 \cdot 10^7$	0	0	0
2	0	$7.308 \cdot 10^8$	0	0	0	0	0	$-7.308 \cdot 10^8$	0	0	0	0
3	$-4.36 \cdot 10^7$	0	$2.906 \cdot 10^7$	0	0	0	$4.36 \cdot 10^7$	0	$1.453 \cdot 10^7$	0	0	0
4	0	0	0	$3.654 \cdot 10^8$	0	0	$-3.654 \cdot 10^8$	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	$1.09 \cdot 10^7$	$1.09 \cdot 10^7$	0	$-1.09 \cdot 10^7$	$1.09 \cdot 10^7$	0	0	0
6	0	0	0	0	$1.09 \cdot 10^7$	$1.453 \cdot 10^7$	0	$-1.09 \cdot 10^7$	$7.266 \cdot 10^6$	0	0	0
7	$-8.719 \cdot 10^7$	0	$4.36 \cdot 10^7$	$-3.654 \cdot 10^8$	0	0	$1.183 \cdot 10^9$	0	$4.36 \cdot 10^7$	$-7.308 \cdot 10^8$	0	0
8	0	$-7.308 \cdot 10^8$	0	0	$-1.09 \cdot 10^7$	$-1.09 \cdot 10^7$	0	$8.289 \cdot 10^8$	$3.27 \cdot 10^7$	0	$-8.719 \cdot 10^7$	$4.36 \cdot 10^7$
9	$-4.36 \cdot 10^7$	0	$1.453 \cdot 10^7$	0	$1.09 \cdot 10^7$	$7.266 \cdot 10^6$	$4.36 \cdot 10^7$	$3.27 \cdot 10^7$	$7.266 \cdot 10^7$	0	$-4.36 \cdot 10^7$	$1.453 \cdot 10^7$
10	0	0	0	0	0	0	$-7.308 \cdot 10^8$	0	0	$7.308 \cdot 10^8$	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	$-8.719 \cdot 10^7$	$-4.36 \cdot 10^7$	0	$8.719 \cdot 10^7$	$-4.36 \cdot 10^7$
12	0	0	0	0	0	0	0	$4.36 \cdot 10^7$	$1.453 \cdot 10^7$	0	$-4.36 \cdot 10^7$	$2.906 \cdot 10^7$

Т.к. перемещения на опорах рамы отсутствуют, то для дальнейшего решения задачи следует отсечь все строки и столбцы данной матрицы за исключением 7, 8 и 9, соответствующих возможным перемещениям. Воспользовавшись матрицей

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

подобной обычной матрице расширения, из матрицы жёсткости можно выделить блок-матрицу третьего порядка, элементы которой далее являются коэффициентами системы трёх уравнений:

$$[K] = [B] \cdot [R] \cdot [B]^T = \begin{bmatrix} 1,183 \cdot 10^9 & 0 & 4,36 \cdot 10^7 \\ 0 & 9,81 \cdot 10^7 & 3,27 \cdot 10^7 \\ 4,36 \cdot 10^7 & 3,27 \cdot 10^7 & 7,266 \cdot 10^7 \end{bmatrix}.$$

Правые части этих уравнений образуют вектор, элементами которого являются значения реакций добавленной связи основной системы метода перемещений, взятые с обратным знаком. Для определения реакций необходимо построить грузовую эпюру M_p (рисунок 4) и согласно табличным значениям сформировать вектор узловых нагрузок

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -0,75 \end{bmatrix}.$$

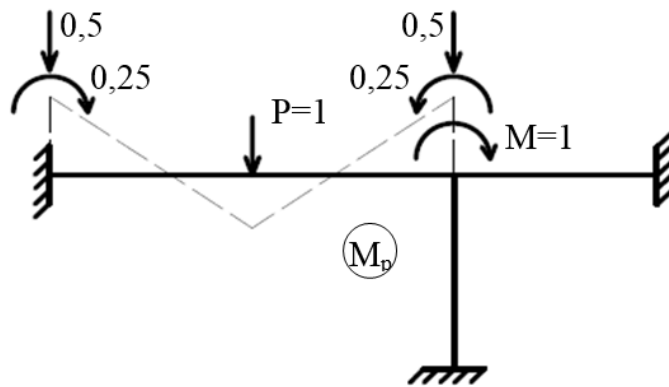


Рисунок 4 – Грузовые реакции основной системы рамы

В результате решения системы трёх уравнений с матрицей коэффициентов, значения которых приведены выше, получены значения узловых перемещений:

$$\bar{\xi} = [K]^{-1} \cdot \bar{P} = \begin{bmatrix} 3,572 \cdot 10^{-10} \\ -1,865 \cdot 10^{-9} \\ -9,697 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}.$$

Используя глобальную матрицу жесткости все системы $[R]$ и значения узловых перемещений ξ , находят реакции рамы в узлах:

$$R_1 = -8,719 \cdot 10^7 \cdot 3,856 \cdot 10^{-10} - 4,36 \cdot 10^7 \cdot (-1,047 \cdot 10^{-8}) = 0,422$$

$$R_2 = -7,308 \cdot 10^8 \cdot (-1,903 \cdot 10^{-10}) = 0,139$$

$$R_3 = 4,36 \cdot 10^7 \cdot 3,856 \cdot 10^{-10} + 1,453 \cdot 10^7 \cdot (-1,047 \cdot 10^{-8}) = -0,135$$

Окончательная эпюра моментов будет выглядеть следующим образом (рисунок 5):

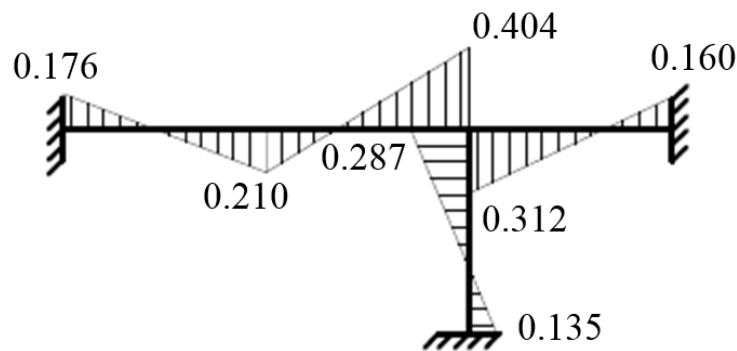


Рисунок 5 – Эпюра изгибающих моментов в раме

В другом подходе к расчету сооружений на основе модели конечных элементов также используется «основная» система рамы, которая представляет собой многосвязную цепь из упругих конечных элементов, полученную путём дискретизации расчётной схемы (рисунок 6,а). Топология расчётной схемы в виде цепи может быть описана с помощью графа (рисунок 6,г).

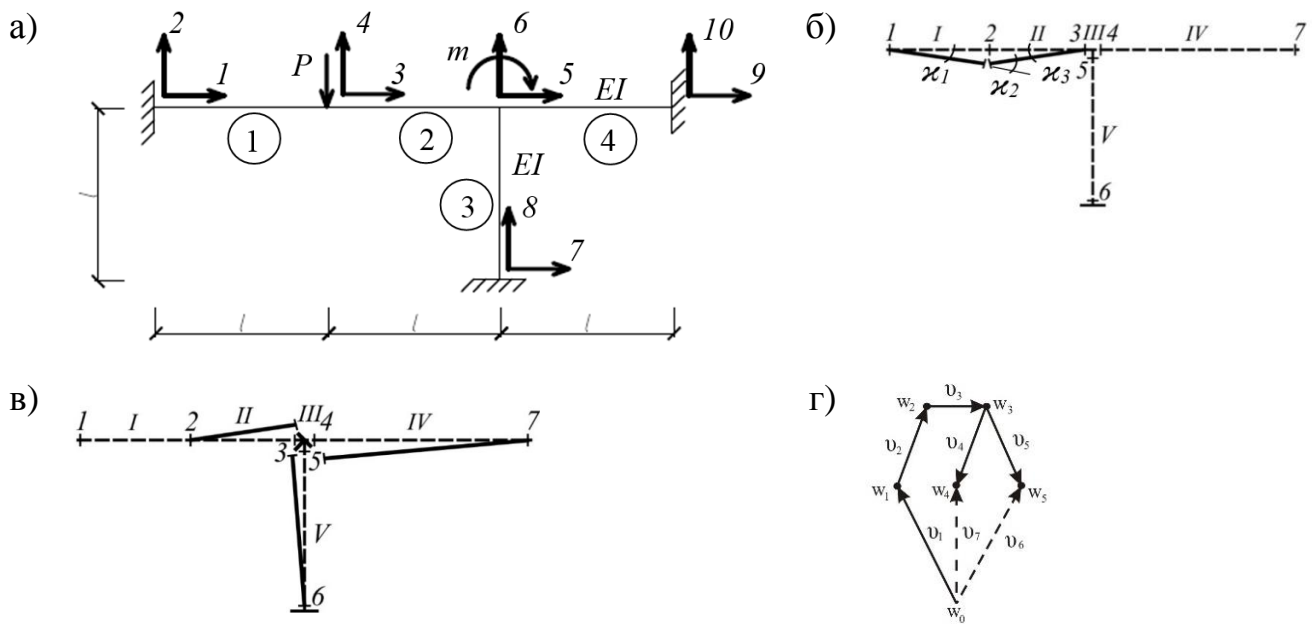


Рисунок 6 – Деформации и граф рамы

Графу соответствует матрица инцидентности

$$[S]_{(4 \times 5)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В дополнение к ней формируется т.н. расширенная матрица инцидентности

$$[\tilde{S}]_{(8 \times 16)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & -1 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & -1 & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & -1 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & -1 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

В отличие от стандартного алгоритма МКЭ в рассматриваемом случае уже на начальном этапе осуществляется обратный переход от глобальных перемещений к локальным с помощью матрицы вращения $[\Theta]_{(16 \times 10)}$,

$$[\Theta]_{(16 \times 10)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \end{matrix},$$

состоящей из блок-матриц поворота отдельных элементов четвёртого порядка

$$[\Theta_i] = \begin{bmatrix} [\theta_i] & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & [\theta_i] \end{bmatrix}, \quad (i=1,2,3,4),$$

где

$$[\theta_i] = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i \\ -\sin \psi_i & \cos \psi_i \end{bmatrix},$$

ψ_i – угол наклона i -го стержня, равный 0 ($i=1, 2, 4$) и $\pi/2$ ($i=3$).

Вычислив матрицу $[\Gamma]_{(8 \times 10)} = [\tilde{S}]_{(8 \times 16)} \cdot [\Psi]_{(16 \times 10)}$, находят тем самым вектор $\bar{\gamma} = (\lambda_1, \chi_1, \dots, \lambda_4, \chi_4)$, представленный своими компонентами: абсолютными удлинениями участков – λ_i ($i=1, 2, 3, 4$) и их перекосами – χ_i ($i=1, 2, 3, 4$),

число которых соответствует количеству участков, принятых при дискретизации*. После удаления в ней нечётных строк приходят к матрице

$$[G]_{(4 \times 10)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

характеризующей зависимость перекосов от глобальных координат $\bar{\chi}_{(4)} = [G]_{(4 \times 10)} \bar{\zeta}_{(10)}$. Принимая во внимание неподвижность опор, непрерывность ригеля во втором сечении, а также пренебрегая осевыми продольными деформациями элементов рамы, в матрице $[G]_{(4 \times 10)}$ следует избавиться от всех столбцов за исключением одного – четвёртого, соответствующего вертикальному перемещению вверх ζ_4 . И тогда от матрицы остаётся лишь один столбец

$$[G_0]_{(4 \times 1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

характеризующий деформации рамы, а именно перекосы, возникающие только в тех двух элементах рамы, что примыкают к месту приложения нагрузки P .

Соответствующие им изгибные деформации возникают в первом – третьем расчётных сечениях (рисунок 7,б). Они равны $\kappa_1 = \zeta_4/l$, $\kappa_2 = 2\zeta_4/l$, $\kappa_3 = \zeta_4/l$.

Поскольку средний жёсткий узел рамы при нагружении может повернуться, то принимаем его угол поворота также за независимое перемещение $\varphi = \zeta_{11}$, и в третьем сечении следует учесть дополнительное слагаемое φ . И тогда $\kappa_3 = \zeta_4/l + \varphi$. Вследствие поворота жёсткого узла

* Перекосом стержня называется взаимное смещение концов стержня в направлении, перпендикулярном оси стержня (рис. 6,б, в).

деформации возможны также в четвёртом и пятом сечениях: $\kappa_4 = \varphi$, $\kappa_5 = -\varphi$, на основе указанных равенств можно составить геометрическую матрицу

$$[H]_{(7 \times 2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

характеризующую преобразование перемещений при переходе к деформациям $\bar{\kappa} = [H]_{(7 \times 2)} \bar{\zeta}$, если и вектор $\bar{\kappa}$ дополнить ещё двумя нулевыми элементами $\kappa_6 = 0$, $\kappa_7 = 0$. В данном примере вектор $\bar{\zeta}$ состоит лишь из двух компонент, т.е. $\bar{\zeta} = (\zeta_4 \ \varphi)$. В дальнейшем при выполнении вычислений компоненты вектора следует переобозначить: $\zeta_4 = \zeta_1$, $\varphi = \zeta_2$.

При определении изгибающих моментов в расчётных сечениях рамы используется матрица внутренней жёсткости, структура которой отражает принятую нумерацию сечений

$$[r] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & \\ 0 & -1 & 2 & & & & \\ & & & 2 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 2 & -1 & 0 \\ & 0 & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{2EI}{l},$$

(7×7)

и вектор-столбец внешнего воздействия $\bar{P} = (p, \ M)^T$.

Определив матрицу единичных усилий в расчётных сечениях рамы при $\zeta_4 = \zeta_1$, $\varphi = \zeta_2$

$$\bar{M} = [r][H][R]^{-1} \bar{P} = [\Lambda] \bar{P} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 10 & 1 \\ -4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{2EI}{l} \cdot \begin{bmatrix} 0,0395 & 0 \\ 0 & 0,1842 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{2EI} P =$$

$$= \begin{bmatrix} -0,1579 & 0,1053 \\ 0,3684 & -0,0789 \\ -0,1053 & -0,2632 \\ -0,0526 & 0,3684 \\ -0,0526 & 0,3684 \\ 0,0526 & -0,1842 \\ 0,0526 & -0,1842 \end{bmatrix} \cdot$$

Эпюра моментов представлена на рисунке 7.

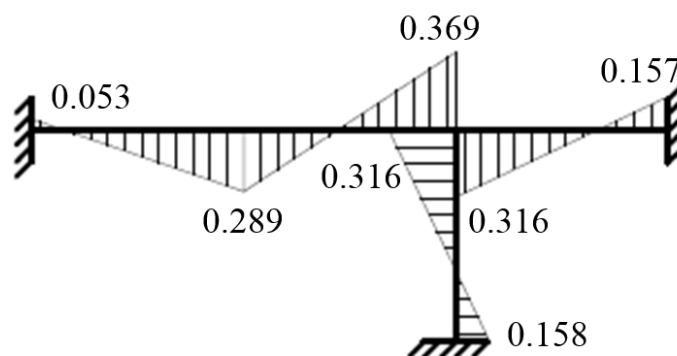


Рисунок 7 – Эпюра изгибающих моментов

Вывод. На основе изложенного материала можно сделать вывод о том, что метод расчета стержневой системы с использованием геометрической матрицы, формируемой в автоматическом режиме на основе графа стержневой системы, позволяет определить в матричной форме, как геометрические параметры рассматриваемой конструкции, так и характер её напряженно-деформируемого состояния. При этом использование данного метода значительно упрощает процесс выполнения анализа и расчета по сравнению с

обычным методом конечных элементов. В отличие от МКЭ, где приходится выполнять многочисленные преобразования ячеек жёсткости с последующей упаковкой их в глобальную матрицу жёсткости, а позже решать систему линейных уравнений большого порядка, в методе с использованием геометрической матрицы алгоритм имеет линейную структуру, что значительно уменьшает трудоемкость вычислений.

Библиографический список:

1. Дарков А.В., Шапошников И.Н. Строительная механика [Текст]. М.: Высшая школа, 1986. 600с.
2. Дьяков И.Ф., Чернов С.А., Черный А.Н. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем [Текст]. Ульяновск: УлГТУ, 2010. 133 с.
3. Зубов В.С. Справочник программиста. Базовые методы решения графовых задач и сортировки [Текст]. М.: Изд. дом «Филинь», 1999. 256 с.
4. Лахтин А.А. Расчет рам методом конечных элементов: учеб.-метод. пособие. Екатеринбург: УрГУПС, 2011. 36 с.
5. Леонтьев И. Н. Основы строительной механики стержневых систем. М.: АСВ, 1996. 536 с.
6. Кошев А.С., Кузина В.А. Дискретная математика. Пенза: ПГАСА, 2003. 223 с.
7. Монахов, В.А. Дискретная механика стержневых систем [Текст]. Пенза: ПГУАС, 2017. 412с.
8. Ржаницын, А.Р. Строительная механика [Текст]. М.: Высшая школа, 1982. 400 с.
9. Смирнов А.Ф., Александров А.В. и др. Строительная механика [Текст]. М.: Стройиздат, 1981. 510 с.
10. Шеин А.И. Курс строительной механики: учебник. Пенза: ПГУАС, 2014. 312 с.