

УДК 624.041

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННОГО
Z-ОБРАЗНОГО СТЕРЖНЯ С ОТБОРТОВКОЙ И С ЗАКРУГЛЕНИЕМ
С УЧЕТОМ ИЗГОТОВЛЕНИЯ**

Волков Владимир Павлович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Кустова Ольга Владимировна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

соискатель.

Аннотация

Статья посвящена определению геометрических характеристик гнутого тонкостенного стержня Z-образного профиля с отбортовкой и с закруглением с учетом изготовления при расчете его на растяжение и изгиб с кручением. Приведены расчетные формулы для определения относительных значений длины контура, главных осевых моментов инерции и главных осевых моментов сопротивления, главных секториальных координат.

Ключевые слова: гнутый тонкостенный стержень, Z-образный профиль, главные центральные оси сечения, главные осевые моменты инерции, главные осевые моменты сопротивления, главные секториальные координаты.

**GEOMETRIC CHARACTERISTICS THIN-WALLED Z-SHAPED ROD WITH
EDGE AND WITH ANY CURVING WITH MANUFACTURE**

Volkov Vladimir Pavlovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department «Mechanics».

Kustova Olga Vladimirovna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

post-graduate student.

Abstract

Article is devoted to definition of the geometric characteristics of a buckler thin-walled rod Z-shaped profile with edge and with any curving with manufacture for calculation this on tension, curve, turn. To deduce a formula of calculation dimensions length of contours, main axes moments of inertia and main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Keywords: buckler thin-walled rod, Z-shaped profile, the main central axes section, main axes moments of inertia, main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Введем условные обозначения (рисунок 1):

XU – главные центральные оси сечения;

$B=2b$ – габаритная ширина срединной линии профиля сечения;

$H=2h$ – габаритная высота срединной линии профиля сечения;

L – полная длина срединной линии профиля сечения;

r – радиус закругления срединной линии профиля сечения станком;

R – наибольший радиус закругления срединной линии профиля сечения;

γ – угол между наклонной стенкой профиля и осью X ;

α – угол станка, изготавливающего Z-образный профиль;

$b_h=b/h$ – относительная ширина профиля сечения;

$r_h=r/h$ – относительный радиус закругления профиля сечения;

$$s = \left(b + \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r}{\tan \frac{\gamma}{2}} \right) \cdot \tan \frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

В статье рассматривается задача определения геометрических размеров и геометрических характеристик сечения гнутого тонкостенного стержня Z-

образного сечения постоянной толщины δ с отбортовкой s и с закруглением r (рисунок 1), т.е. определяется относительная ширина сечения b_h , при заданных значениях углов γ и α , где $\alpha \leq \gamma$ и величине r , когда XU – главные центральные оси сечения.

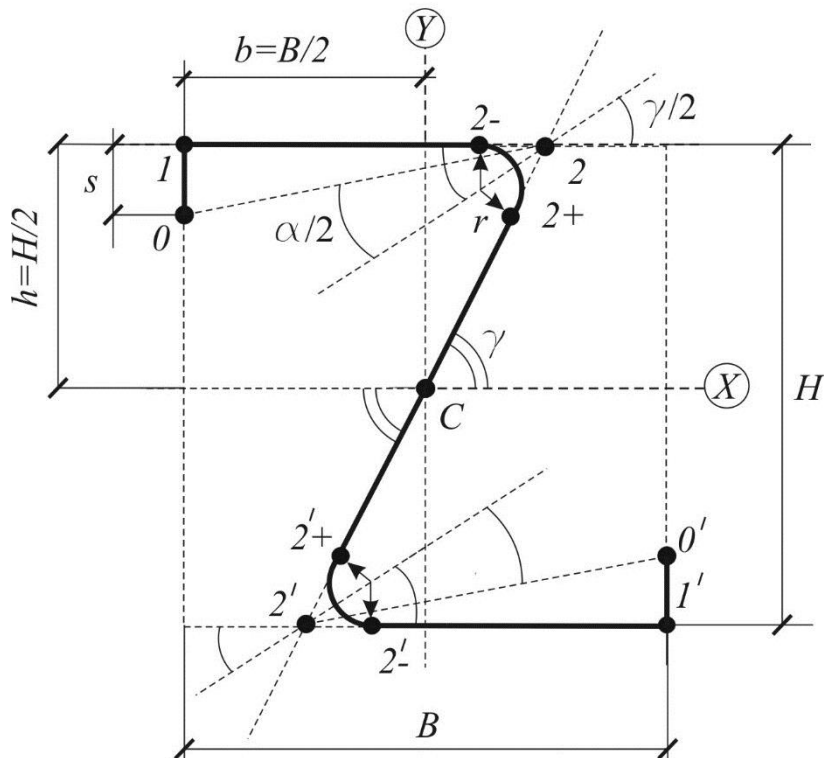


Рисунок 1 – Z-образное сечение с отбортовкой и с закруглением
(C – центр симметрии)

Дано: $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$;

$0 \leq \alpha \leq \gamma$;

$0 \leq r_h \leq \frac{\cos \gamma}{1 + \cos \gamma}$;

Найти: b_h – ?

Относительные геометрические размеры тонкостенного Z-образного сечения постоянной толщины δ без учета закругления и без отбортовки (частный случай при $\alpha = \gamma$, $r_h = 0$, рисунок 2) определяются из [1]:

$$b_h = \frac{1}{\tan \gamma} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3 \cdot \cos \gamma}\right)};$$

$$\frac{L}{H} = b_h + \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

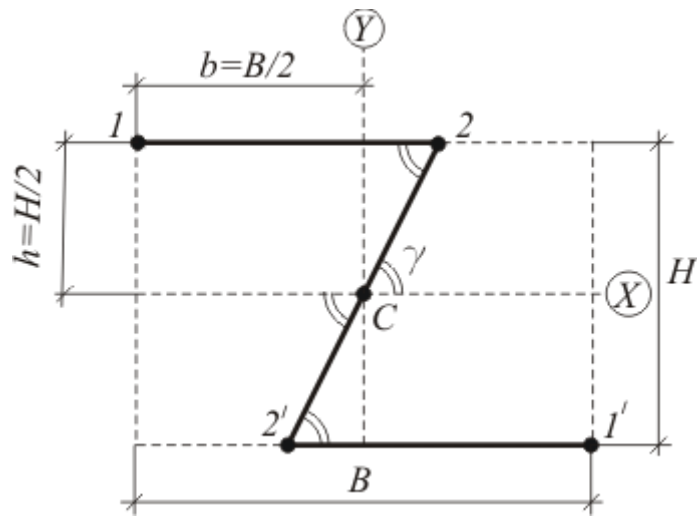


Рисунок 2 – Z-образное сечение без закругления и без отбортовки
(C – центр симметрии)

Задача определения геометрических размеров гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения постоянной толщины δ с учетом закругления r , но без отбортовки (частный случай при $\alpha = \gamma$, рисунок 3) рассмотрена в [2], [3].

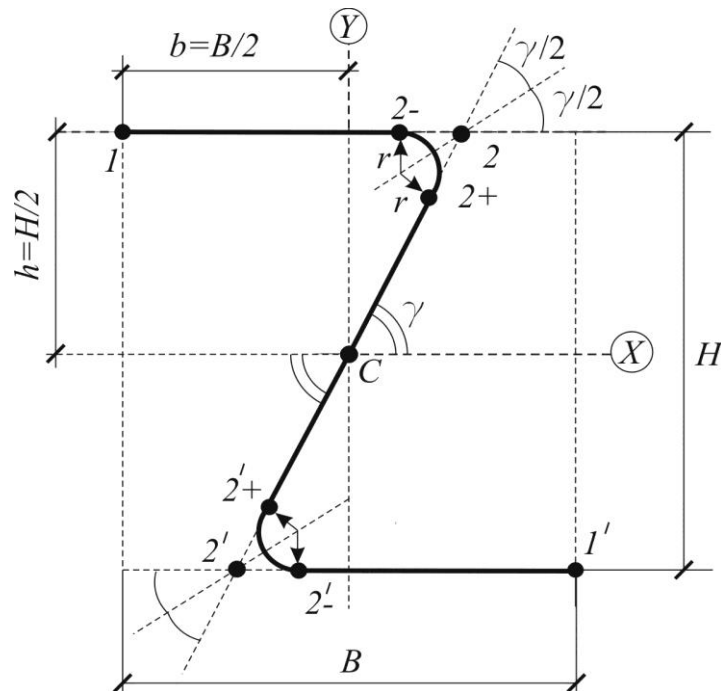


Рисунок 3 – Z-образное сечение с закруглением и без отбортовки
(C - центр симметрии)

Задача определения геометрических размеров гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения, равноудаленного от оси Y , постоянной толщины δ с отбортовкой s и закруглением r рассмотрены соответственно в [4], [5].

Задача определения геометрических размеров гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения постоянной толщины δ с отбортовкой s с учетом изготовления (частный случай при $r_h = 0$, рисунок 4) рассмотрена в [6]:

b_h из решения уравнения:

$$b_h^3 \cdot \left(\tan \frac{\gamma - \alpha}{2} \right)^2 + b_h^2 \cdot \left(2 \cdot \tan \frac{\gamma - \alpha}{2} \cdot \left(\frac{\tan \frac{\gamma - \alpha}{2}}{\tan \gamma} - 1 \right) - 1 \right) + b_h \cdot \frac{\tan \frac{\gamma - \alpha}{2}}{\tan \gamma} \cdot \left(\frac{\tan \frac{\gamma - \alpha}{2}}{\tan \gamma} - 2 \right) + \left(\left(\frac{2}{3 \cdot \sin \gamma} + \frac{1}{\tan \gamma} \right) \cdot \frac{1}{\tan \gamma} \right) = 0$$

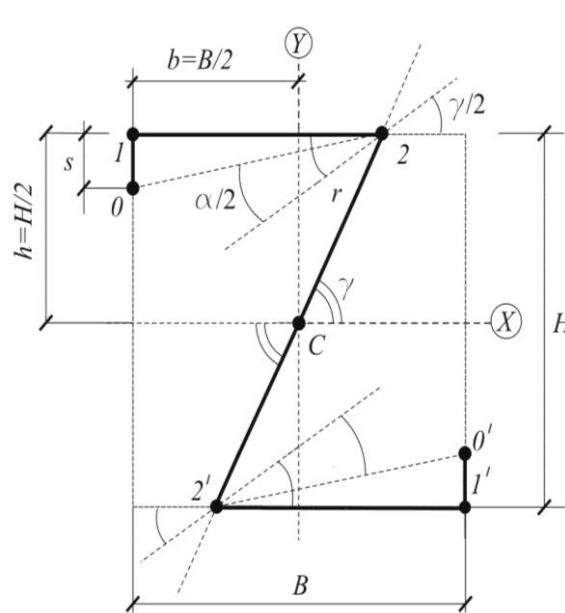


Рисунок 4 - Z-образное сечение с отбортовкой
(C - центр симметрии)

Итак, учитывая центральную симметрию, рассмотрим верхнюю половину сечения (рисунок 5).

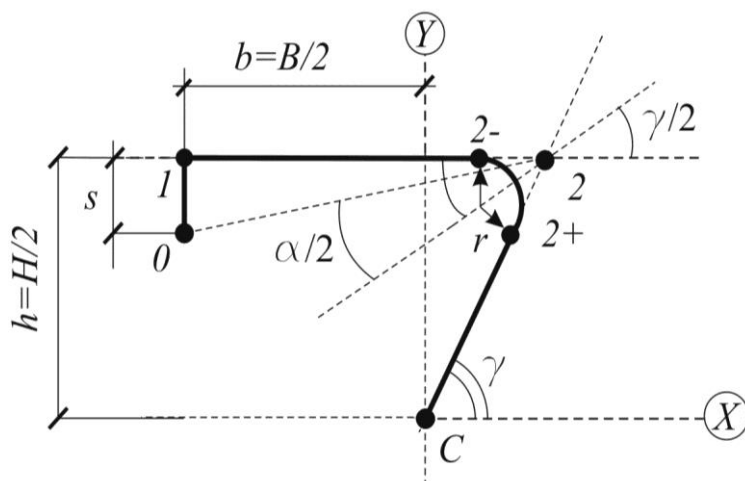


Рисунок 5 - Верхняя половина сечения (C - центр симметрии)

Декартовы координаты x , y характерных точек и длины соответствующих участков l , (рисунок 5):

$$x_{2-} = \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r}{\tan \frac{\gamma}{2}}, \quad y_{2-} = h, \quad l_{2-} = \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r}{\tan \frac{\gamma}{2}},$$

$$x_{2+} = x_{2-} + r \cdot \sin \gamma, \quad y_{2+} = h - r - r \cdot \cos \gamma, \quad l_{2+} = \frac{h}{\sin \gamma} - \frac{r}{\tan \frac{\gamma}{2}}.$$

Центральные оси XY (рисунок 5) являются главными [7], если

$$I_{XY} = \int_0^{\frac{L}{2}} \delta(s) \cdot x(s) \cdot y(s) \cdot ds \Rightarrow 0,$$

$$s \cdot b \cdot \left(h - \frac{s}{2} \right) + \frac{h \cdot b^2}{2} = \frac{l_{2-} \cdot x_{2-} \cdot y_{2-}}{2} + \frac{l_{2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} +$$

$$+ \int_0^{\pi-\gamma} (x_{2-} + r \cdot \sin \varphi) \cdot (h - r + r \cdot \cos \varphi) \cdot r \cdot d\varphi,$$

$$s \cdot b \cdot \left(h - \frac{s}{2} \right) + \frac{h \cdot b^2}{2} = \frac{l_{2-} \cdot x_{2-} \cdot y_{2-}}{2} + \frac{l_{2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} +$$

$$+ r \cdot \left((x_{2-} \cdot (\pi - \gamma) + r \cdot (1 + \cos \gamma)) \cdot (h - r) + \left(x_{2-} + \frac{r \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r \cdot \sin \gamma \right),$$

где, вводя обозначения

$$\theta = \tan \frac{\gamma - \alpha}{2}, \quad x_h = \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}}, \quad \theta x_h = \theta \cdot x_h, \quad \beta = \pi - \gamma,$$

относительное значение $b_h > 0$ найдем из решения кубического уравнения:

$$\begin{aligned} & b_h^3 \cdot \theta^2 + b_h^2 \cdot (\theta \cdot (\theta x_h - 1) \cdot 2 - 1) + b_h \cdot \theta x_h \cdot (\theta x_h - 2) + \\ & + r_h \cdot \left((x_h \cdot \beta + r_h \cdot (1 + \cos \gamma)) \cdot (1 - r_h) + \left(x_h + \frac{r_h \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r_h \cdot \sin \gamma \right) + x_h^2 + \quad (1) \\ & + \frac{2}{3} \cdot \left(x_h + \frac{r_h}{\sin \gamma} \right) \cdot (1 - r_h \cdot (1 + \cos \gamma)) \cdot \left(\frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Декартовы координаты x , y других характерных точек и длины соответствующих участков l (рисунок 5):

$$x_0 = -b, \quad y_0 = h - s, \quad l_{01} = s \Rightarrow \left(b + \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r}{\tan \frac{\gamma}{2}} \right) \cdot \tan \frac{\gamma - \alpha}{2};$$

$$x_1 = -b, \quad y_1 = h, \quad l_{12} = b + l_{2-} \Rightarrow b + \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r}{\tan \frac{\gamma}{2}}.$$

Относительные координаты точек и относительные длины участков:

$$x_{0h} = -b_h, \quad y_{0h} = 1 - s_h, \quad l_{01h} = s_h \Rightarrow \left(b_h + \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}} \right) \cdot \tan \frac{\gamma - \alpha}{2};$$

$$x_{1h} = -b_h, \quad y_{1h} = 1, \quad l_{12-h} \Rightarrow b_h + \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}}.$$

$$x_{2+h} = x_h + r_h \cdot \sin \gamma, \quad y_{2+h} = 1 - r_h - r_h \cdot \cos \gamma, \quad l_{2+h} = \frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}}.$$

$$x_{0h} = -b_h, \quad y_{0h} = 1 - s_h, \quad l_{01h} = s_h \Rightarrow \left(b_h + \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}} \right) \cdot \tan \frac{\gamma - \alpha}{2};$$

$$x_1 = -b_h, \quad y_{1h} = 1, \quad l_{12-h} \Rightarrow b_h + \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}};$$

$$x_{2+h} = x_h + r_h \cdot \sin \gamma, \quad y_{2+h} = 1 - r_h - r_h \cdot \cos \gamma, \quad l_{2+h} = \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}}.$$

Относительная длина контура гнутого Z-образного профиля L/H :

$$l_h = \frac{L/2}{h} \Rightarrow (\theta + 1) \cdot (b_h + x_h) + r_h \cdot \beta + \left(\frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}} \right), \quad (2)$$

$$\text{где } \frac{L}{2} = s + b + x_{2-} + r \cdot \beta + l_{2+}$$

Главные осевые моменты инерции (рисунок 5) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_{L/2} y^2(s) \cdot ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\frac{l_{01}}{3} \cdot (y_0^2 + y_1^2 + y_0 \cdot y_1) + l_{12-} \cdot h^2 + \frac{l_{2+}}{3} \cdot y_{2+}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\beta (h - r + r \cdot \cos \varphi)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right), \\ I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} &\Rightarrow \frac{l_{01h}}{3} \cdot (y_{0h}^2 + y_{1h}^2 + y_{0h} \cdot y_{1h}) + l_{12-h} + \frac{l_{2+h}}{3} \cdot y_{2+h}^2 + \\ &+ r_h \cdot \left[(1 - r_h)^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot (1 - r_h) \cdot \sin \gamma + r_h^2 \cdot \frac{\beta - \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A x^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_{L/2} x^2(s) \cdot ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(l_{01} \cdot b^2 + \frac{l_{12-}}{3} \cdot (x_1^2 + x_{2-}^2 + x_1 \cdot x_{2-}) + \frac{l_{2+}}{3} \cdot x_{2+}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\beta (x_{2-} + r \cdot \sin \varphi)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right), \end{aligned}$$

$$I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow l_{01h} \cdot b_h^2 + \frac{l_{12-h}}{3} \cdot (x_{1h}^2 + x_h^2 + x_{1h} \cdot x_h) + \frac{l_{2+h}}{3} \cdot x_{2+h}^2 +$$

$$+ r_h \cdot \left[x_h^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot x_h \cdot (1 + \cos \gamma) + r_h^2 \cdot \frac{\beta + \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right]; \quad (4)$$

Главные осевые моменты сопротивления определяются по формулам:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \Rightarrow \frac{I_x}{h}, \quad (5)$$

$$W_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} \Rightarrow I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3};$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} \Rightarrow \frac{I_y}{b}, \quad (6)$$

$$W_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} \Rightarrow \frac{1}{b_h} \cdot I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3};$$

Для нахождения главного секториального момента инерции

$I_\omega = \int_A \varpi^2(s) \cdot dA$ введем секториальные координаты ω (удвоенная площадь

сектора, где полюс и начальная точка отсчета выбраны в точке C):

$$\omega_C = 0; \quad \omega_{2+} = 0;$$

$$\omega(\varphi) = l_{2+} \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi) + r^2 \cdot (\beta - \sin \beta), \quad 0 \leq \varphi \leq \beta$$

$$\omega_{2-} = l_{2+} \cdot r \cdot (1 - \cos \beta) + r^2 \cdot (\beta - \sin \beta);$$

$$\omega_1 = \omega_{2-} + h \cdot l_{12-}; \quad \omega_0 = \omega_1 + s \cdot b.$$

Относительные секториальные координаты ω/h^2 :

$$\omega_{2-h} = l_{2+h} \cdot r_h \cdot (1 - \cos \beta) + r_h^2 \cdot (\beta - \sin \beta);$$

$$\omega_{1h} = \omega_{2-h} + l_{12-h}; \quad \omega_{0h} = \omega_{1h} + s_h \cdot b_h.$$

Секториальный статический момент:

$$S = \int_A \omega \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \omega(s) \cdot ds = 2 \cdot S_0 = 2 \cdot (\delta \cdot h^3) \cdot S_{0h},$$

$$S_C = 0; \quad S_{2+} = 0;$$

$$S_{2-} = \delta \cdot \int_0^{\beta} \omega(\varphi) \cdot r \cdot d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \cdot r^2 \cdot \left(l_{2+} \cdot (\beta - \sin \beta) + r \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} - (1 - \cos \beta) \right) \right) = (\delta \cdot h^3) \cdot S_{2-h}$$

$$S_1 = S_{2-} + \delta \cdot \frac{\omega_1 + \omega_{2-}}{2} \cdot l_{12-}; \quad S_0 = S_1 + \delta \cdot \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} \cdot s.$$

Относительные секториальные статические моменты $S/(\delta \cdot h^3)$:

$$S_{2-h} = r_h^2 \cdot \left(l_{2+h} \cdot (\beta - \sin \beta) + r_h \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} - (1 - \cos \beta) \right) \right)$$

$$S_{1h} = S_{2-h} + \frac{\omega_{1h} + \omega_{2-h}}{2} \cdot l_{12-h}; \quad S_{0h} = S_{1h} + \delta \cdot \frac{\omega_{1h} + \omega_{0h}}{2} \cdot s_h.$$

Постоянная D , определяющая главную начальную точку отсчета M_0 , т.е. s_0 – расстояние от т. (2-) до точки, где $\varpi = 0$:

$$D = \frac{S}{\int_A dA} \Rightarrow \frac{S_0}{\delta \cdot \frac{L}{2}} = h^2 \cdot \frac{S_{0h}}{l_h}, \quad (8)$$

$$S_0 = \frac{D - \omega_{2-}}{h} \Rightarrow h \cdot \left(\frac{S_{0h}}{l_h} - \omega_{2-h} \right). \quad (9)$$

Главные секториальные координаты $\varpi = \omega - D$:

$$\varpi_c = \varpi_{2+} \Rightarrow h^2 \cdot \left(-\frac{S_{0h}}{l_h} \right); \quad \varpi_{2-} = h^2 \cdot \left(\omega_{2-h} - \frac{S_{0h}}{l_h} \right);$$

$$\varpi_1 \Rightarrow h^2 \cdot \left(\omega_{1h} - \frac{S_{0h}}{l_h} \right); \quad \varpi_0 = h^2 \cdot \left(\omega_{0h} - \frac{S_{0h}}{l_h} \right);$$

Относительные главные секториальные координаты ϖ/h^2 :

$$\varpi_{Ch} = \varpi_{2+h} \Rightarrow \left(-\frac{S_{0h}}{l_h} \right); \quad \varpi_{2-h} = \left(\omega_{2-h} - \frac{S_{0h}}{l_h} \right);$$

$$\varpi_{1h} \Rightarrow \left(\omega_{1h} - \frac{S_{0h}}{l_h} \right); \quad \varpi_{0h} = \left(\omega_{0h} - \frac{S_{0h}}{l_h} \right);$$

Главный секториальный момент инерции определяется по формуле:

$$I_\omega = \int_A \varpi^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_{l/2} \varpi^2(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\frac{l_{01}}{3} \cdot (\varpi_0^2 + \varpi_1^2 + \varpi_0 \cdot \varpi_1) + \frac{l_{12-}}{3} \cdot (\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_1 \cdot \varpi_2) + l_{2+} \cdot \varpi_{2+}^2 + \int_0^\beta (\omega(\varphi) - D)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right),$$

$$I_\omega \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^5} \Rightarrow \frac{l_{01h}}{3} \cdot (\varpi_{0h}^2 + \varpi_{1h}^2 + \varpi_{0h} \cdot \varpi_{1h}) + \frac{l_{12-h}}{3} \cdot (\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_1 \cdot \varpi_2) + l_{2+h} \cdot \left(-\frac{S_{0h}}{l_h} \right)^2 +$$

$$+ r_h^3 \cdot \left[l_{2+h}^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot \beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} - 2 \cdot \sin \beta \right) + l_{2+h} \cdot r_h \cdot (\beta - \sin \beta)^2 + r_h^2 \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} - 2 \cdot (\sin \beta - \beta \cdot \cos \beta) \right) \right]; \quad (10)$$

Библиографический список:

1. Волков В.П., Волкова О.В. Определение геометрических характеристик тонкостенного Z-образного стержня [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.
2. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.
3. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением для расчета на изгиб с кручением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.
4. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой [Электронный ресурс] //

Моделирование и механика конструкций. 2016. №4. URL:
http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitelnaya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.

5. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой и с закруглением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №5. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitelnaya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.

6. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой с учетом изготовления [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №6. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitelnaya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.

7. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. М: Высшая школа, 1995. 560 с.