УДК 531.66

ДВИЖЕНИЕ С УСКОРЕНИЕМ И УДАР ПО РАЗНОРОДНОМУ СТЕРЖНЮ

Бакушев Сергей Васильевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Баишева Диана Ряшитовна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Пугина Анастасия Павловна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Аннотация

Рассматриваются вопросы определения коэффициента динамичности для разнородных стержней, как при их движении с ускорением, так и при действии ударных нагрузок. Показано, что при ускоренном движении разнородного стержня, коэффициент динамичности не зависит от соотношения объёмных весов элементов, составляющих стержень. Оставаясь в рамках элементарной теории удара, получена формула для коэффициента динамичности разнородного стержня. Рассмотрен продольный и поперечный удар по стержню, состоящему из двух жёстко скреплённых между собой по длине частей, имеющих и разные модули упругости, и разные площади и формы поперечных сечений, и разные объёмные веса. Для стойки, испытывающей продольный удар, получена формула для статического перемещения точки удара. Для разнородного стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба, получено дифференциальное уравнение изогнутой оси.

Отмечена возможность более плавного регулирования коэффициента динамичности при ударе по разнородному стержню.

Ключевые слова: разнородный стержень, движение с ускорением, упругий удар, продольный удар, поперечный удар.

MOTION WITH ACCELERATION AND BLOW ON DIVERSE WEB

Bakushev Sergey Vasilevish,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the Department "Mechanics".

Baisheva Diana Riashitovna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Pugina Anastasia Pavlovna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

Discusses dynamic coefficient for heterogeneous cores, as when they are moving with acceleration and shock action. It is shown that the accelerated motion of heterogeneous factor dynamic Rod does not depend on the ratio of volumetric weights Rod elements. Staying within the elementary theory of impact, received the formula for the coefficient of dynamic heterogeneous rod. Reviewed by longitudinal and transverse kick terminal consisting of two rigidly fastened among themselves on the length of parts with different modulus of elasticity, and different shaped cross-sections and square, and various three-dimensional weight. Rack with longitudinal blow received formula for static displacement of the point of impact. For heterogeneous Web under flat transverse bending, curved axle differential equation is obtained. Marked ability to smoother dynamic factor regulation on impact on diverse Web.

Keywords: heterogeneous rod, motion with acceleration, elastic strike, longitudinal blow, gross punch.

Введение

Основные элементы строительных конструкций – в частности, стержни (балки, брусья, стойки, колонны и так далее) – при возведении зданий и сооружений в наибольшей степени подвержены динамическим воздействиям. Это и движение с ускорением при их погрузки-разгрузки в начале движения, и ударные воздействия во время монтажа в конце движения, и возможные случайные соударения с элементами здания во время движения, и так далее. Ввиду этого, в курсе сопротивления материалов вопросам расчёта стержней на ударные воздействия уделяется серьёзное внимание [1]. С другой стороны прогресс в материаловедении приводит к разработке уже неоднородных элементов строительных конструкций по своим механическим характеристикам во многом превосходящих однородные элементы. Эти неоднородные элементы строительных конструкций также необходимо грузить, разгружать, монтировать, перемещать, то есть подвергать динамическим воздействиям. Однако вопросы расчёта неоднородных конструкций на ударные воздействия, с точки зрения элементарной теории удара, разработаны недостаточно.

В данной работе сделана попытка показать, как можно пользуясь элементарной теорией удара, рассчитать на динамические воздействия стержень, выполненный из совокупности стержней, имеющих не только разные модули упругости, но и разные объёмные веса.

Движение разнородного стержня с ускорением

Пусть груз P подвешен через блок Б на тросе и движется вверх с ускорением $\bar{a}$ (рисунок 1а). Трос состоит из двух сплетённых прядей 1 и 2. Обозначим вес одного метра первой пряди через q_1, а вес одного метра второй пряди – через q_2. Определить усилие в тросе при подъёме груза с ускорением.

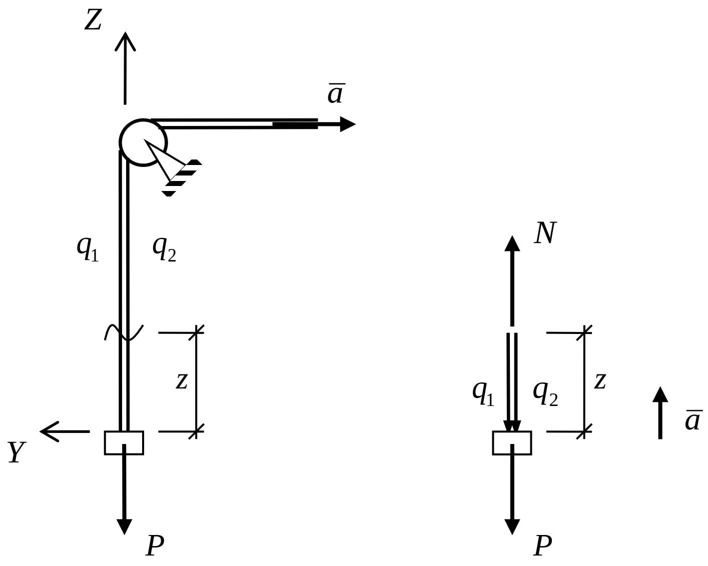

Рисунок 1 - Движение разнородного
стержня с ускорением

Для решения задачи воспользуемся методом «сечений». Введём систему координат, начало которой поместим в точку крепления троса к грузу, ось Z направим вверх. На расстоянии z от начала координат проведём сечение и рассмотрим динамическое равновесие отсечённой нижней части (рисунок 1б). Отсечённая часть, находящаяся под действием усилия в тросе N, веса груза P, веса части первой $q_1 z$ и второй $q_2 z$ прядей, и движется с ускорением $\bar{a}$.

В соответствии со вторым законом Ньютона, ускорение системы равно сумме сил, действующих на систему, делённых на её массу:

$$a = \frac{N - P - q_1 z - q_2 z}{\frac{P}{g} + \frac{q_1 z}{g} + \frac{q_2 z}{g}}. \tag{1}$$

Отсюда
$$N = \left(1 + \frac{a}{g}\right)\left(P + q_1 z + q_2 z\right). \tag{2}$$

Так как выражение во второй круглой скобке представляем собой статическое усилие в тросе от веса груза и части троса, то выражение в первой круглой скобке есть не что иное, как динамический коэффициент при движении разнородного стержня с ускорением:

$$\mu = 1 + \frac{a}{g}. \tag{3}$$

Обобщая полученные результаты, можно сказать, что при ускоренном движении разнородного стержня, коэффициент динамичности не зависит от соотношения объёмных весов элементов, составляющих стержень.

Удар по разнородному стержню

Будем рассматривать приближённую теорию удара, ограничиваясь первой фазой взаимодействия. Как и в классической приближённой теории удара, примем следующие допущения:

1. Ударяющее тело в момент удара не отскакивает от ударяемого и после удара оба тела движутся совместно.
2. Местные деформации, возникающие в телах в области их контакта не учитываются.
3. В ударяемом теле возникают только упругие деформации, то есть справедлив закон Гука.

Будем полагать, что ударяемое тело состоит из двух частей, каждая весом Q_1 и Q_2 (рисунок 2). Обозначим жёсткость пружины, то есть величину осевой силы, при которой происходит сжатие пружины на единицу длины, через C. Тогда, перемещение верхнего конца пружины при статическом приложении силы P будет равно $\lambda_C = \dfrac{P}{C}$. Пренебрегая массой пружины по сравнению с массой падающего груза, перемещение верхнего конца пружины при ударе будет равно $\lambda_Д = \dfrac{F_Д}{C}$. Отсюда

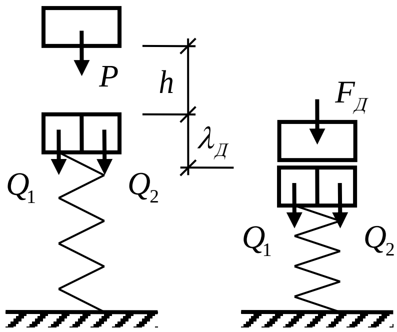

Рисунок 2 - Удар по разнородному телу

$$F_Д = \frac{\lambda_Д}{\lambda_C} P. \tag{4}$$

Далее используем теорему об изменении кинетической энергии системы: изменение кинетической энергии системы двух тел – ударяющего (падающего) и ударяемого, равна работе всех внешних сил, приложенным к двум движущимся телам на пути $\lambda_Д$:

$$T_2 - T_1 = E. \tag{5}$$

Здесь $T_2 = 0$ – кинетическая энергия двух тел, соответствующая наибольшему динамическому перемещению (конец первой фазы взаимодействия);

$T_1 = \dfrac{P + Q_1 + Q_2}{g}\dfrac{v_1^2}{2}$ – кинетическая энергия двух тел, соответствующая началу их совместного движения; v_1 – начальная скорость совместного движения двух тел. Начальную скорость совместного движения двух тел найдём из теоремы об изменении количества движения: количество движения до удара равно количеству движения после удара: $\dfrac{P}{g}v = \dfrac{P + Q_1 + Q_2}{g}v_1$, где $v^2 = 2gh$ – скорость груза P в момент времени, непосредственно предшествующий удару. Таким образом, $T_1 = \dfrac{Ph}{1 + \dfrac{Q_1}{P} + \dfrac{Q_2}{P}}$.

$E = E_1 + E_2$ – работа всех внешних сил, приложенным к двум движущимся телам на пути $\lambda_Д$.

$E_1 = (P + Q_1 + Q_2)\lambda_Д$ – работа сил тяжести двух тел на пути $\lambda_Д$.

$E_2 = -\dfrac{N_1 + N_2}{2}\lambda_Д = -\dfrac{(Q_1 + Q_2) + (F_Д + Q_1 + Q_2)}{2}\lambda_Д$ – работа сил упругости пружины на пути $\lambda_Д$.

С учётом всего вышесказанного, из равенств (5) и (4), получаем величину динамического коэффициента при ударе по неоднородному телу:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_c\left(1 + \dfrac{Q_1}{P} + \dfrac{Q_2}{P}\right)}}. \tag{6}$$

Обобщая полученные результаты на ударяемое тело, состоящее из n отдельных разнородных тел, получаем:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_c\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{P}\right)}}. \qquad (7)$$

Пример 1. Продольный удар

Пусть на свободно стоящую разнородную стойку длиной l с высоты h падает груз весом P (рисунок 3). Стойка состоит их двух жёстко скреплённых между собой стержней, площади поперечных сечений которых обозначим A_1 и A_2. Объёмные веса и модули упругости стержней соответственно равны γ_1, E_1 и γ_2, E_2. Определить коэффициент динамичности данной системы.

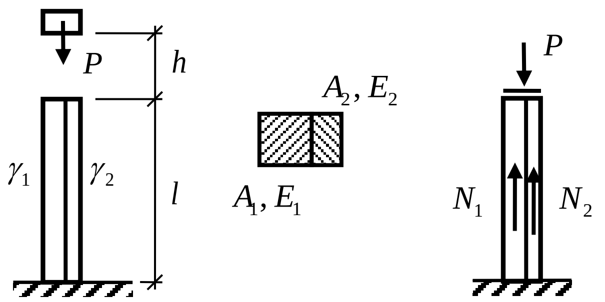

Рисунок 3 - Продольный удар

Решение. Воспользуемся формулой (6). Найдём статическое перемещение точки удара. Обозначим продольные силы в первом и втором стержнях через N_1 и N_2. Тогда из условия равновесия получаем:

$$N_1 + N_2 = P. \qquad (а)$$

Перемещения точки удара – верхнего конца стойки – в первом стержне будет равно перемещению во втором стержне:

$$\lambda_C = \frac{N_1 l}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l}{E_2 A_2}. \qquad (б)$$

Совместное решение уравнений (а) и (б) даёт:

$$N_1 = \frac{PE_1A_1}{E_1A_1 + E_2A_2};\ N_2 = \frac{PE_2A_2}{E_1A_1 + E_2A_2}.$$

Следовательно, $\lambda_C = \dfrac{Pl}{E_1A_1 + E_2A_2}$. (в)

Поскольку $Q_1=\gamma_1 A_1 l;\ Q_2=\gamma_2 A_2 l$, то окончательное выражения для коэффициента динамичности данной системы будет иметь вид:

$$\mu=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\dfrac{Pl}{E_1A_1+E_2A_2}\left[1+\dfrac{l}{P}\left(\gamma_1A_1+\gamma_2A_2\right)\right]}}. \qquad (г)$$

Пример 2. Поперечный удар

Рассмотрим разнородную балку длиной l , состоящую из двух жёстко скреплённых между собой стержней, находящуюся в условиях плоского поперечного изгиба. На балку с высоты h падает груз весом P (рисунок 4). Определить коэффициент динамичности данной системы.

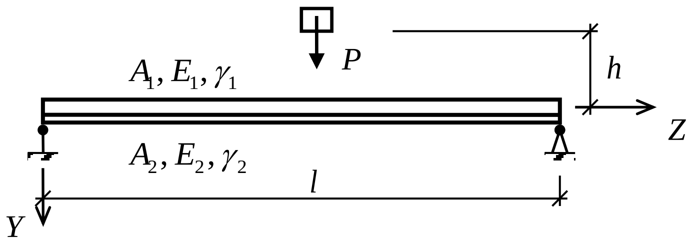

Рисунок 4 - Поперечный удар

Решение. Обозначим площадь поперечного сечения, модуль упругости и объёмный вес материала первого стержня через A_1, E_1, γ_1, а аналогичные величины второго стержня – через A_2, E_2, γ_2.

Оставаясь в рамках гипотезы плоских сечений, найдём связь между кривизной изогнутой оси неоднородной балки и внутренним изгибающим моментом при чистом изгибе неоднородной балки (рисунок 5).

Пусть высота поперечного сечения первого стержня – h_1, высота сечения второго стержня – h_2. Предположим, что граница раздела первого и второго стержней – горизонтальна. Пусть нейтральная линия находится на расстоянии h_0 от границы раздела первого и второго стержней.

Приравнивая нулю величину продольной силы в поперечном сечении балки, получим:

$$N=\int_A \sigma_z dA=\int_{A_1}\sigma_z^{(1)}dA+\int_{A_2}\sigma_z^{(2)}dA=$$

$$=\int_{A_1}E_1\frac{y_1}{\rho}dA+\int_{A_2}E_2\frac{y_2}{\rho}dA=\frac{E_1}{\rho}\int_{A_1}y_1dA+\frac{E_2}{\rho}\int_{A_2}y_2dA=\frac{E_1}{\rho}S_1^*+\frac{E_2}{\rho}S_2^*=0. \qquad (д)$$

Здесь, $S_1^* = \int\limits_{A_1} y_1 dA$ – статический момент части площади поперечного сечения первого стержня, взятой выше нейтральной оси (сжатая зона площади поперечного сечения первого стержня); $S_2^* = \int\limits_{A_2} y_2 dA$ – статический момент части площади поперечного сечения первого и второго стержня, взятой ниже нейтральной оси (растянутая площадь поперечного сечения второго стержня и растянутая зона части площади поперечного сечения первого стержня).

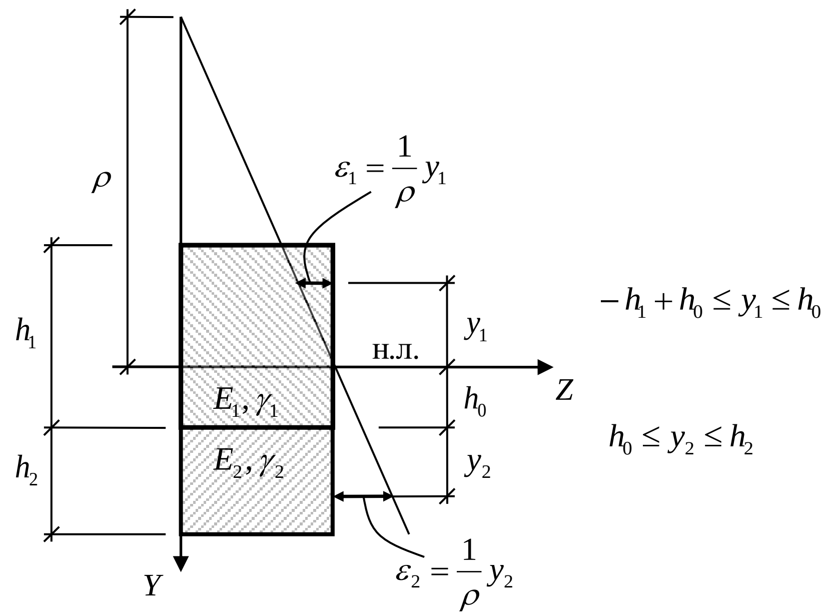

Рисунок 5 - Гипотеза плоских сечений

Таким образом, положение нейтральной линии в разнородной балке можно найти из соотношения:

$$E_1 S_1^* + E_2 S_2^* = 0. \qquad \text{(e)}$$

Из рисунка 5 следует, что в случае прямоугольного поперечного сечения балки шириной b и высотой $h_1 + h_2$ (h_1 – высота поперечного сечения первого стержня; h_2 – высота поперечного сечения второго стержня),

$$S_1^* = bh_1\left(\frac{h_1}{2} - h_0\right),\ S_2^* = bh_2\left(\frac{h_2}{2} + h_0\right).$$

Тогда, из формулы (е) следует, что

$$h_0 = \frac{E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2}{E_1 h_1 + E_2 h_2}. \qquad (ж)$$

Далее подсчитаем величину внутреннего изгибающего момента в разнородной балке:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_z y dA = \int_{A_1} \sigma_z^{(1)} y_1 dA + \int_{A_2} \sigma_z^{(2)} y_2 dA = \\ &= \int_{A_1} E_1 \frac{y_1}{\rho} y_1 dA + \int_{A_2} E_2 \frac{y_2}{\rho} y_2 dA = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1^2 dA + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y_2^2 dA = \\ &= \frac{1}{\rho}\left(E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)}\right) = \frac{EI_{пр}}{\rho}. \end{aligned} \qquad (и)$$

В формуле (и) величина $EI_{пр} = E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)}$ называется приведённой жёсткостью; $I_x^{(1)} = \int_{A_1} y_1^2 dA$ – осевой момент инерции сжатой части поперечного сечения первого стержня относительной нейтральной оси всего сечения; $I_x^{(2)} = \int_{A_2} y_2^2 dA$ – осевой момент инерции поперечного сечения второго стержня и растянутой части поперечного сечения первого стержня относительно нейтральной оси всего сечения.

Для прямоугольного поперечного сечения балки

$$I_x^{(1)} = \frac{bh_1^3}{12} + bh_1\left(\frac{h_1}{2} - h_0\right)^2; \quad I_x^{(2)} = \frac{bh_2^3}{12} + bh_2\left(\frac{h_2}{2} + h_0\right)^2.$$

На основании формулы (и) запишем приближённое дифференциальное уравнение изогнутой оси разнородной балки:

$$\frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2V}{dz^2} = \pm \frac{M_x(z)}{EI_{пр}}. \qquad (к)$$

Коль скоро дифференциальное уравнение изогнутой оси разнородной балки записано, не составляет особого труда найти его решение для частной задачи, то есть определить статическое перемещение точки удара, а, следовательно, найти коэффициент динамичности при поперечном ударе по разнородной балке.

Заключение

Выполненные исследования движения с ускорением и удара по разнородному стержню показали следующее:

1. При ускоренном движении разнородного стержня, коэффициент динамичности не зависит от соотношения объёмных весов элементов, составляющих стержень.
2. Коэффициент динамичности для разнородного стержня, полученный в рамках элементарной теории удара, по форме не отличается от такового для однородного стержня. Однако при практическом его использовании следует помнить, что статическое перемещение точки удара существенно зависит от вида ударяемого тела: разнородное оно или однородное.
3. Для случая продольного удара по стойке, состоящей из двух жёстко скреплённых разнородных стержней, получена формула для статического перемещения точки удара.
4. Для случая поперечного удара по балке, состоящей из двух жёстко скреплённых между собой разнородных стержней, получено дифференциальное уравнение изогнутой оси; для прямоугольного поперечного сечения разнородной балки получены расчётные формулы для определения положения нейтральной оси и расчётные формулы для вычисления изгибной жёсткости.

Выводы:

Использование в строительных и машиностроительных конструкциях разнородных стержней, испытывающих динамические (ударные) воздействия, позволяет более плавно регулировать коэффициент динамичности как за счёт изменения геометрии стержней, так и за счёт изменения их податливости.

Библиографический список:

1. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / под ред. А.Ф. Смирнова. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1975. 480 с.