

УДК 69.04

РАЗНО-MОДУЛЬНАЯ БАЛКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Басова Маргарита Алексеевна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Рассматриваются вопросы расчёта бесконечно-длинной балки на упругом основании Фусса-Винклера на действие одной сосредоточенной силы. Балка выполнена из материала, модуль упругости которого для левой и правой половин балки разный. Показано, что при расчёте бесконечно-длинных разно-модульных балок на упругом основании Фусса-Винклера в качестве дополнительных условий для определения постоянных интегрирования в общем решении дифференциальных уравнений изогнутых осей разно-модульных частей балки, наряду с условиями на концах балки в бесконечности и равенства прогибов и углов поворота поперечных сечений в начале координат (под сосредоточенной силой), следует использовать условия равновесия элемента балки бесконечно-малой длины, выделенного в начале координат. Рассмотрен числовой пример и построены эпюры прогибов, углов поворота поперечных сечений, изгибающих моментов и поперечных сил. Отмечены особенности и отличия эпюр для разно-модульной балки от эпюр, построенных для балки постоянной жёсткости.

Ключевые слова: упругое основание, балка бесконечной длины, переменная жёсткость, внутренние усилия.

RAZNOMODULNAJA BEAM ON ELASTIC FOUNDATION

Bakushev Sergey Vasilevish,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the Department "Mechanics".

Basova Margarita Alekseevna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

Discusses the calculation of infinitely long beam on elastic Foundation-Winkler on action fuss from a concentrated force. Beam made of material whose modulus of elasticity for the left and right halves of the beam is different. It is shown that when calculating the infinitely-long-grained variety of beams on elastic Foundation-fuss from Winkler as additional conditions to determine permanent integration in the overall solving of differential equations of curved axes variety of modular parts beams, along with conditions at the ends of the beams in the infinity and equality deflections and angles of rotation cross sections at the origin (under concentrated force), use the conditions of equilibrium of the beam element infinitely-small length selected in the origin. Considered numerical example and built plot of cross-section, rotation angles, bending moments and shear forces. Marked features and differences of diagrams for a variety of modular beams from the plot, built for beams of constant rigidity.

Keywords: elastic Foundation, infinite beam length, variable stiffness, domestic efforts.

Введение

Балки на упругом основании относятся к одним из наиболее важных элементов теории расчёта сооружений. Это объясняется тем, что с их помощью моделируется работа фундаментов. Если рассмотреть реальный фундамент под здание или сооружение совместно с основанием, то можно заметить, что как

конструкция фундамента, так и массив основания не являются, вообще говоря, однородными по своим физико-механическим свойствам, в частности, изгибная жёсткость фундамента не остаётся постоянной. Это обуславливает необходимость разработки методик расчёта и фундамента, и основания, механические характеристики которых изменяются от точки к точке.

В данной работе рассматриваются бесконечно-длинные балки на упругом основании Фусса-Винклера, нагруженные сосредоточенной силой (рисунок 1). Балка имеет постоянное по длине поперечное сечение с моментом инерции I_x относительно нейтральной оси. Модуль упругости материала балки слева от сосредоточенной силы равен E_I , а справа – равен E_{II} .

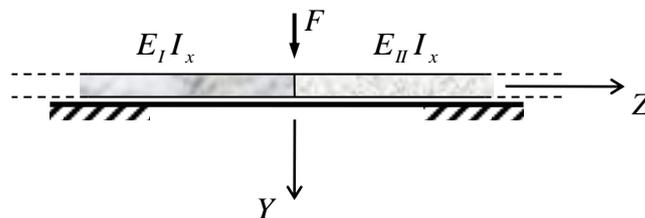


Рисунок 1 - Балка на упругом основании

Теоретические основы

Дифференциальное уравнение изогнутой оси левой и правой половин балки имеют вид соответственно:

$$\frac{d^4 v_I(z)}{dz^4} + 4\beta_1^4 v_I(z) = 0; \quad \frac{d^4 v_{II}(z)}{dz^4} + 4\beta_2^4 v_{II}(z) = 0. \quad (1)$$

Здесь $4\beta_1^4 = \frac{k}{E_I I_x}$, $4\beta_2^4 = \frac{k}{E_{II} I_x}$; $k = k'b$ – коэффициент постели; b – ширина подошвы балки.

Общие интегралы дифференциальных уравнений (1) записываются в следующей форме:

$$v_I(z) = A_1 e^{\beta_1 z} \sin \beta_1 z + B_1 e^{\beta_1 z} \cos \beta_1 z + C_1 e^{-\beta_1 z} \sin \beta_1 z + D_1 e^{-\beta_1 z} \cos \beta_1 z; \quad (2)$$

$$v_{II}(z) = A_2 e^{\beta_2 z} \sin \beta_2 z + B_2 e^{\beta_2 z} \cos \beta_2 z + C_2 e^{-\beta_2 z} \sin \beta_2 z + D_2 e^{-\beta_2 z} \cos \beta_2 z. \quad (3)$$

Здесь $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ – постоянные интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования имеем следующие условия:

1. При $z = \pm\infty$, прогибы балки равны нулю, то есть $v_I(-\infty) = 0$ и $v_{II}(+\infty) = 0$. Из уравнений (2) и (3) при этом получаем: $C_1 = D_1 = 0$ и $A_2 = B_2 = 0$.

Следовательно, общие интегралы (2) и (3) получают вид:

$$v_I(z) = A_1 e^{\beta_1 z} \sin \beta_1 z + B_1 e^{\beta_1 z} \cos \beta_1 z; \quad (4)$$

$$v_{II}(z) = C_2 e^{-\beta_2 z} \sin \beta_2 z + D_2 e^{-\beta_2 z} \cos \beta_2 z. \quad (5)$$

2. При $z = 0$, прогиб левой половины балки будет равен прогибу правой половины балки: $v_I(0) = v_{II}(0)$, то есть

$$A_1 e^{\beta_1 z} \sin \beta_1 z + B_1 e^{\beta_1 z} \cos \beta_1 z = C_2 e^{-\beta_2 z} \sin \beta_2 z + D_2 e^{-\beta_2 z} \cos \beta_2 z. \quad (6)$$

Так как $z = 0$, то равенство (6) приводится к виду:

$$B_1 = D_2. \quad (7)$$

3. При $z = 0$, угол поворота поперечного сечения левой половины балки будет равен углу повороте поперечного сечения правой половины балки:

$$\left. \frac{dv_I(z)}{dz} \right|_{z=0} = \left. \frac{dv_{II}(z)}{dz} \right|_{z=0}.$$

Дифференцируя выражения (4) и (5) по переменной z , найдём углы поворота поперечного сечения:

$$\frac{dv_I(z)}{dz} = A_1 \beta_1 e^{\beta_1 z} (\sin \beta_1 z + \cos \beta_1 z) + B_1 \beta_1 e^{\beta_1 z} (\cos \beta_1 z - \sin \beta_1 z); \quad (8)$$

$$\frac{dv_{II}(z)}{dz} = C_2 \beta_2 e^{-\beta_2 z} (\cos \beta_2 z - \sin \beta_2 z) - D_2 \beta_2 e^{-\beta_2 z} (\cos \beta_2 z + \sin \beta_2 z). \quad (9)$$

Принимая $z = 0$ и приравнивая соотношения (8) и (9), получим:

$$A_1 \beta_1 + B_1 \beta_1 = C_2 \beta_2 - D_2 \beta_2. \quad (10)$$

4. Ещё два необходимых условия получим из условия равновесия элемента балки длиной dz , выделенного в начале координат (рисунок 2):

$$\sum Y = 0: -F + Q_y^{(-)} - Q_y^{(+)} + r(z)dz = 0; \quad (11)$$

$$\sum M_{(1)} = 0: M_x^{(-)} + F \frac{dz}{2} - M_x^{(+)} + Q_y^{(+)} dz - r(z) dz \frac{dz}{2} = 0; \quad (12)$$

$$\sum M_{(2)} = 0: M_x^{(-)} - F \frac{dz}{2} - M_x^{(+)} + Q_y^{(-)} dz + r(z) dz \frac{dz}{2} = 0; \quad (13)$$

Исключая из системы уравнений (11), (12) и (13) величину dz , и пренебрегая последними слагаемыми в уравнениях (12) и (13), как бесконечно-малыми более высокого порядка малости, получим необходимые уравнения:

$$Q_y^{(+)} - Q_y^{(-)} + F = 0; \quad (14)$$

$$\frac{M_x^{(+)} - M_x^{(-)}}{2} \frac{Q_y^{(-)} + Q_y^{(+)}}{\left(Q_y^{(+)} + \frac{F}{2}\right)\left(Q_y^{(-)} - \frac{F}{2}\right)} = \frac{Q_y^{(-)} - Q_y^{(+)} - F}{r(z)}. \quad (15)$$

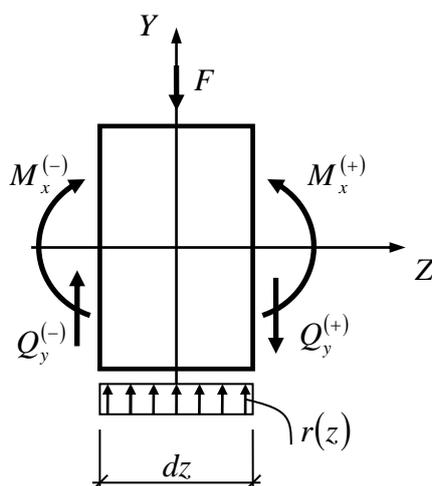


Рисунок 2 – Бесконечно малый элемент балки длиной dz

Поскольку изгибающий момент пропорционален второй производной, а поперечная сила – третьей производной от функции перемещения, то дифференцируя соотношения (4) и (5), найдём:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_l(z)}{dz^2} &= (A_1 - B_1) \beta_1^2 e^{\beta_1 z} (\sin \beta_1 z + \cos \beta_1 z) + \\ &+ (A_1 + B_1) \beta_1^2 e^{\beta_1 z} (\cos \beta_1 z - \sin \beta_1 z); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{d^3 v_l(z)}{dz^3} = 2(A_1 - B_1) \beta_1^3 e^{\beta_1 z} \cos \beta_1 z - 2(A_1 + B_1) \beta_1^3 e^{\beta_1 z} \sin \beta_1 z. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{II}(z)}{dz^2} &= (C_2 + D_2) \beta_2^2 e^{-\beta_2 z} (\sin \beta_2 z - \cos \beta_2 z) + \\ &+ (D_2 - C_2) \beta_2^2 e^{-\beta_2 z} (\sin \beta_2 z + \cos \beta_2 z). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{d^3 v_{II}(z)}{dz^3} = 2(C_2 + D_2) \beta_2^3 e^{-\beta_2 z} \cos \beta_2 z + 2(C_2 - D_2) \beta_2^3 e^{-\beta_2 z} \sin \beta_2 z. \quad (19)$$

Вычисление изгибающих моментов и поперечных сил в соотношениях (14) и (15) производится для $z = 0$, то есть

$$\begin{aligned} M_x^{(+)} &= E_{II} I_x \frac{d^2 v_{II}}{dz^2} = -2E_{II} I_x \beta_2^2 C_2; \\ M_x^{(-)} &= E_I I_x \frac{d^2 v_I}{dz^2} = 2E_I I_x \beta_1^2 A_1; \\ Q_x^{(+)} &= E_{II} I_x \frac{d^3 v_{II}}{dz^3} = 2E_{II} I_x \beta_2^3 (C_2 + D_2); \\ Q_x^{(-)} &= E_I I_x \frac{d^3 v_I}{dz^3} = 2E_I I_x \beta_1^3 (A_1 - B_1); \end{aligned}$$

Так как $v_I(0) = B_1$; $v_{II}(0) = D_2$, то $v(0) = B_1 = D_2$.

Следовательно, уравнения (14) и (15) получают вид, соответственно:

$$2b_2(C_2 + D_2) - 2b_1(A_1 - B_1) + F = 0; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{(a_2 C_2 + a_1 A_1) \cdot 2[b_1(A_1 - B_1) + b_2(C_2 + D_2)]}{\left[2b_2(C_2 + D_2) + \frac{F}{2}\right] \cdot \left[2b_1(A_1 - B_1) - \frac{F}{2}\right]} = \\ & = \frac{2b_1(A_1 - B_1) - 2b_2(C_2 + D_2) - F}{kB_1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $a_1 = E_I I_x \beta_1^2$; $a_2 = E_{II} I_x \beta_2^2$; $b_1 = E_I I_x \beta_1^3$; $b_2 = E_{II} I_x \beta_2^3$.

Итак, для определения коэффициентов A_1, B_1, C_2, D_2 имеем систему нелинейных алгебраических уравнений: (7), (10), (20) и (21). После элементарных преобразований данная система уравнений записывается в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (A_1 + B_1) \beta_1 - (C_2 - B_1) \beta_2 &= 0; \\ b_2(C_2 + B_1) - b_1(A_1 - B_1) &= -\frac{F}{2}; \\ (a_2 C_2 + a_1 A_1) [b_1(A_1 - B_1) + b_2(C_2 + B_1)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В системе (22) условие $(a_2 C_2 + a_1 A_1) = 0$ приводит к равенству $B_1 = D_2 = 0$, что равносильно отсутствию прогибов балки при $z = 0$. Поэтому в уравнении (22₃) принимаем равным нулю выражение в квадратных скобках. Решая затем систему (22) методом Крамера, получаем:

$$A_1 = \frac{\Delta A}{\Delta}; \quad B_1 = \frac{\Delta B}{\Delta}; \quad C_2 = \frac{\Delta C}{\Delta}. \quad (24)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 + \beta_2 & -\beta_2 \\ -b_1 & b_1 + b_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta A = \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 + \beta_2 & -\beta_2 \\ -\frac{F}{2} & b_1 + b_2 & b_2 \\ 0 & b_2 - b_1 & b_2 \end{vmatrix};$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} \beta_1 & 0 & -\beta_2 \\ -b_1 & -\frac{F}{2} & b_2 \\ b_1 & 0 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta C = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 + \beta_2 & 0 \\ -b_1 & b_1 + b_2 & -\frac{F}{2} \\ b_1 & b_2 - b_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$D_2 = B_1.$$

С учётом коэффициентов (24), уравнения изогнутой оси балки на упругом основании для левой половины балки будет определяться соотношением (4), а для правой половины балки – соотношением (5).

Углы поворота поперечных сечений балки для левой и правой половин балки будут определяться по формулам (8) и (9) соответственно.

Для изгибающих моментов получим расчётные формулы на основании соотношений (16) и (18):

$$M'_x(z) = E_I I_x \frac{d^2 v_I(z)}{dz^2} = E_I I_x (A_1 - B_1) \beta_1^2 e^{\beta_1 z} (\sin \beta_1 z + \cos \beta_1 z) + E_I I_x (A_1 + B_1) \beta_1^2 e^{\beta_1 z} (\cos \beta_1 z - \sin \beta_1 z); \quad (25)$$

$$M''_x(z) = E_{II} I_x \frac{d^2 v_{II}(z)}{dz^2} = E_{II} I_x (D_2 + C_2) \beta_2^2 e^{-\beta_2 z} (\sin \beta_2 z - \cos \beta_2 z) + E_{II} I_x (D_2 - C_2) \beta_2^2 e^{-\beta_2 z} (\sin \beta_2 z + \cos \beta_2 z). \quad (26)$$

Расчётные формулы для поперечных сил в поперечных сечениях левой и правой половин балки получим на основании формул (17) и (19):

$$Q'_y(z) = E_I I_x \frac{d^3 v_I(z)}{dz^3} =$$

$$= 2\beta_1^3 e^{\beta_1 z} E_I I_x [(A_1 - B_1) \cos \beta_1 z - (A_1 + B_1) \sin \beta_1 z]; \quad (27)$$

$$Q''_y(z) = E_{II} I_x \frac{d^3 v_{II}(z)}{dz^3} =$$

$$= 2\beta_2^3 e^{-\beta_2 z} E_{II} I_x [(C_2 + D_2) \cos \beta_2 z + (C_2 - D_2) \sin \beta_2 z]. \quad (28)$$

Пример

Рассмотрим балку бесконечной длины на упругом основании Фусса-Винклера, нагруженную сосредоточенной силой $F = 120 \text{ кН}$ в сечении, где изменяется её жёсткость. Левая половина балки выполнена из монолитного бетона марки В30 с модулем упругости $E_I = 32,5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, правая половина балки выполнена из бетона марки В20 с модулем упругости $E_{II} = 27,5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$. Сечение балки прямоугольное шириной $b = 0,6 \text{ м}$ и высотой $h = 1,2 \text{ м}$. Основание представляет собой грунт с коэффициентом постели основания $k' = 85 \frac{\text{Н}}{\text{см}^3}$.

Решение.

Вычисляем момент инерции поперечного сечения балки:

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,6 \cdot 1,2^3}{12} = 1,0368 \text{ м}^4.$$

Находим коэффициенты:

$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{k'b}{4E_I I_x}} = \sqrt[4]{\frac{8,5 \cdot 10^7 \cdot 0,6}{4 \cdot 3,25 \cdot 10^4 \cdot 1,0368}} = 4,41 \text{ м}^{-1},$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{\frac{k'b}{4E_{II} I_x}} = \sqrt[4]{\frac{8,5 \cdot 10^7 \cdot 0,6}{4 \cdot 2,75 \cdot 10^4 \cdot 1,0368}} = 4,599 \text{ м}^{-1}.$$

$$b_1 = E_I I_x \beta_1^3 = 3,25 \cdot 10^4 \cdot 1,0368 \cdot 4,41^3 = 2,891 \cdot 10^6 \text{ Н/м};$$

$$b_2 = E_{II} I_x \beta_2^3 = 2,75 \cdot 10^4 \cdot 1,0368 \cdot 4,599^3 = 2,773 \cdot 10^6 \text{ Н/м}.$$

Вычисляем определители системы (22)

$$\Delta = 2,888 \cdot 10^{14} \text{ Н}^2/\text{м}^3;$$

$$\Delta A = 2,932 \cdot 10^{12} \text{ Н}^2/\text{м}^2;$$

$$\Delta B = -3,063 \cdot 10^{12} \text{ Н}^2/\text{м}^2;$$

$$\Delta C = -3,188 \cdot 10^{12} \text{ Н}^2/\text{м}^2.$$

Вычисляем коэффициенты A_1 , B_1 , C_2 , D_2 :

$$A_1 = \frac{\Delta A}{\Delta} = 0,01 \text{ м}; \quad B_1 = \frac{\Delta B}{\Delta} = -0,011 \text{ м}; \quad C_2 = \frac{\Delta C}{\Delta} = -0,011 \text{ м}; \quad D_2 = -0,011 \text{ м}.$$

Далее строим графики прогибов, углов поворота поперечных сечений, изгибающих моментов и поперечных сил (рисунок 3).

На рисунке 3а приведена эпюра прогибов. Эпюра углов поворота поперечных сечений изображена на рисунке 3б. Эпюра изгибающих моментов приведена на рисунке 3в. На рисунке 3г приведена эпюра поперечных сил.

Заключение

Численные исследования показывают, что эпюры прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в разно-модульной бесконечно-длинной балке на упругом основании Фусса-Винклера отличаются от соответствующих эпюр в балке с постоянной жёсткостью в следующем:

1. Экстремум прогибов достигается не под действующей силой (в начале координат), а смещается в ту сторону балки, где меньший модуль упругости. В данном примере смещение составляет $\Delta z_v = 4,53 \cdot 10^{-3}$ м. При этом максимальный прогиб равен $v_{\max} = -0,011$ м.

2. Угол поворота поперечного сечения при $z = 0$ отличен от нуля и составляет в данном примере $\varphi(0) = -1,993 \cdot 10^{-3}$ рад.

3. Абсцисса максимального изгибающего момента смещается в сторону участка балки с меньшим модулем упругости. В данном примере смещение составляет $\Delta z_M = 4,045 \cdot 10^{-6}$ м. Максимальная величина изгибающего момента в данном примере равна: $M_x^{\max} = M_x'(\Delta z_M) = M_x''(\Delta z_M) = 1,331 \cdot 10^4$ Нм.

4. Особенности на эпюре поперечных сил не наблюдается.

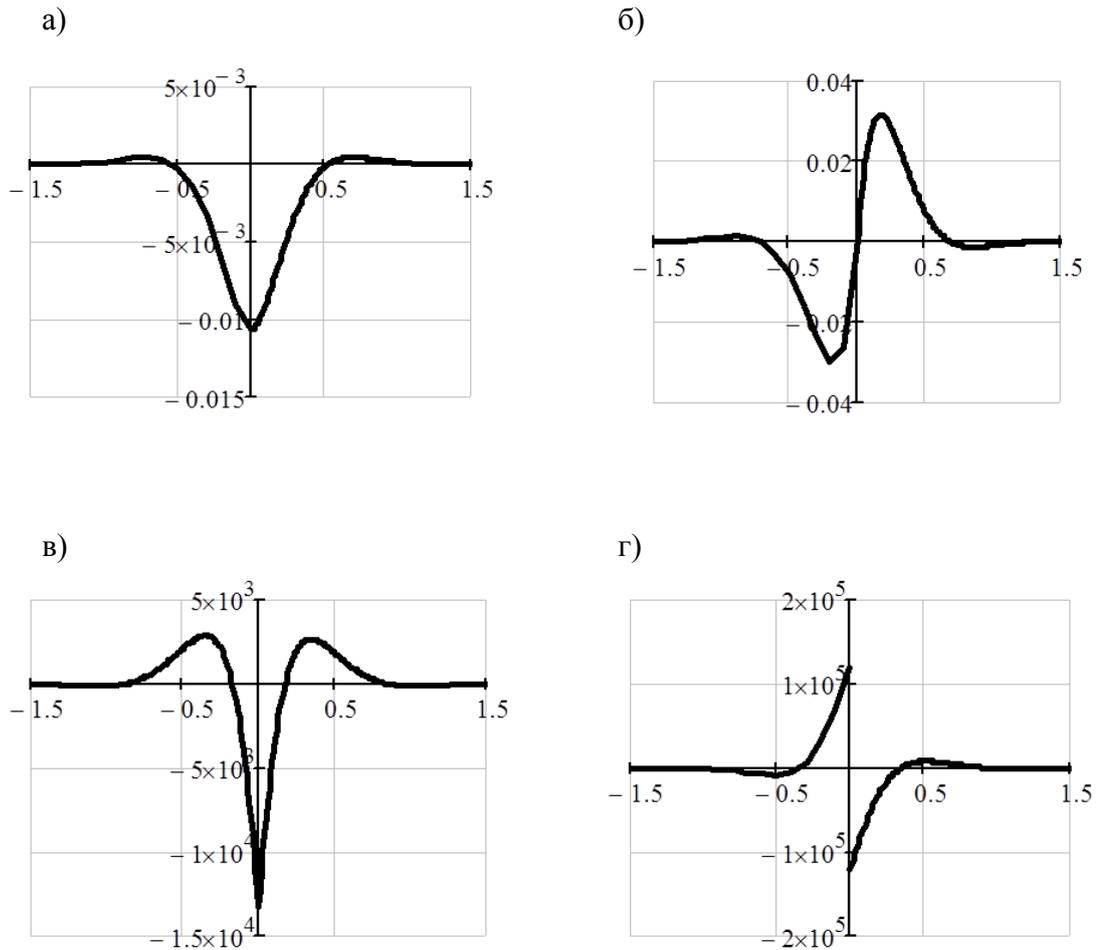


Рисунок 3 - Эпюры прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в разно-модульной балке на упругом основании Фусса-Винклера

Выводы:

При расчёте бесконечно-длинных разно-модульных балок на упругом основании Фусса-Винклера в качестве дополнительных условий для определения постоянных интегрирования в общем решении дифференциальных уравнений изогнутых осей разно-модульных частей балки, наряду с условиями на концах балки в бесконечности и равенства прогибов и углов поворота поперечных сечений в начале координат (под сосредоточенной силой), следует использовать условия равновесия элемента балки бесконечно-малой длины, выделенного в начале координат.

Библиографический список:

1. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / под ред. А.Ф. Смирнова. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1975. 480 с.