

УДК 539.371

**АНАЛИЗ НАПРЯЖЁННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ БАЛКИ ПРИ ПОМОЩИ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ**

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Статья посвящена анализу напряжённого и деформированного состояния стержня на двух шарнирных опорах, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба и нагруженного равномерно-распределённой нагрузкой по всему пролёту. Балка моделируется тонкой пластинкой, две узких стороны которой имеют шарнирное закрепление, а две длинных стороны свободны от опор. Решение осуществляется при помощи одинарных тригонометрических рядов (решение М. Леви). Отмечено, что характер напряжённого и деформированного состояния, в общем и целом, соответствует получаемому методами сопротивления материалов, однако имеют место быть и существенные отличия в числовых значениях, особенно в части касательных напряжений, а также нормальных напряжений, действующих на площадках, параллельных продольной оси стержня.

Ключевые слова: упругий стержень, плоский поперечный изгиб, одинарные тригонометрические ряды.

**ANALYSIS OF A BUSY AND STRAINED STATE OF A BEAM
USING TRIGONOMETRIC SERIES**

Bakushev Sergey Vasilevish.

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the Department "Mechanics".

Abstract

The article is devoted to analysis of a busy and strained state of the rod on the two hinged pillars under a flat lateral bending and loaded uniformly distributed load across span. Beam simulated thin plate two narrow sides which have a hinged pin and two long sides free of supports. The decision is made using the unary trigonometric series (decision M. Levy). Noted that the nature of a busy and strained state generally corresponds to obtained by methods of resistance of materials, but there are significant differences in numeric values, particularly in the area of tangential stresses, and also normal stresses acting on floors, parallel to the longitudinal axis of the rod.

Keywords: elastic rod, flat transverse bending, elasticity, unary trigonometric series.

Введение

Напряжённое и деформированное состояние конструкции, определяемое методами сопротивления материалов (при возможности это сделать) и методами теории упругости, может значительно различаться [1]. Классическим примером этого является расчёт плотины треугольного профиля [2].

Внутренние противоречия и недостатки присущи, как правило, и математическим моделям, описывающим напряжённо-деформированное состояние упругого тела, и расчётным схемам конструкций, моделирующим их реальную работу. В статье [3], в части «Математические модели и точность инженерных расчётов» утверждается, что требование внутренней непротиворечивости расчётной модели должно быть строго обосновано конечной целью расчёта и его реальных возможностей. Обосновывается мнение, что «и логические противоречия в модели могут быть терпимы, если обусловленные ими ошибки в расчётах не выходят за рамки погрешности, следующей из принятых в модели допущений физического характера».

Рассмотрим определение напряжённого и деформированного состояния однородного изотропного прямолинейного стержня с прямоугольным поперечным сечением, развитым в ширину, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба (рисунок 1) как методами теории упругости, так и методами сопротивления материалов.

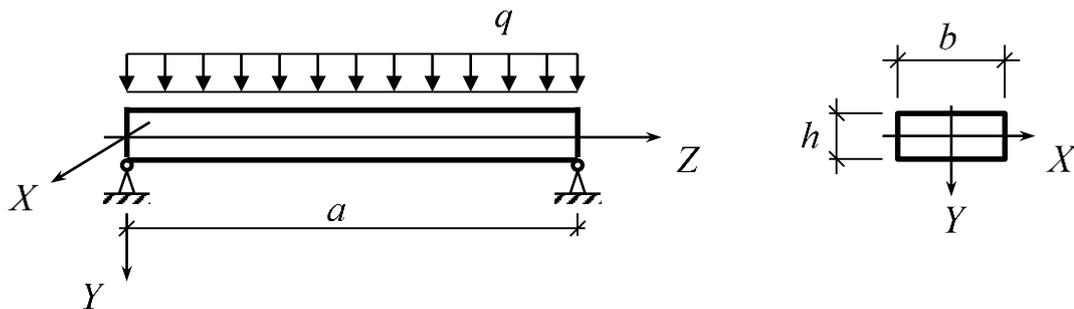


Рисунок 1

Механическое поведение стержня можно моделировать работой тонкой упругой пластинки, шарнирно опёртой по двум противоположным сторонам и имеющей свободные края на двух оставшихся сторонах. Для определения его напряжённого и деформированного состояний можно воспользоваться методами расчёта тонких упругих пластин, в данном случае, учитывая условия его опирания, методом М. Леви, то есть искать решение при помощи одинарных тригонометрических рядов. В работе [4] рассматривалось напряжённое состояние стержня, моделируемого балкой-стенкой, при помощи тригонометрических рядов (решение Файлона).

Данный подход к расчёту стержней обосновывается тем, что если следовать строгому определению, то под стержнем в сопротивлении материалов понимается конструктивный элемент, два геометрических размера которого, определяющие размеры поперечного сечения, значительно меньше третьего, задающего длину стержня [2], а под тонкой пластинкой в теории упругости понимается конструктивный элемент, два геометрических размера которого, значительно больше третьего, задающего толщину пластинки [1]. Никаких количественных зависимостей между размерами при этом не вводится.

Теоретические основы

При расчёте тонких пластинок (рисунок 2) методом М. Леви функция прогибов срединной поверхности принимается в виде бесконечного ряда, каждый член которого представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от координаты x , а другая только от координаты y :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (1)$$

Здесь $Y_m(y)$ – функции, подлежащие определению, a – размер пластинки в плане между двумя шарнирно опёртыми краями.

Определение функций $Y_m(y)$ сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m = \frac{q_m}{D} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (2)$$

где коэффициенты ряда Фурье q_m вычисляются по формулам:

$$q_m = q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Здесь $q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$, действующая на пластинку нагрузка, разложенная в одинарный ряд Фурье по синусам.

Общее решение уравнения (2) для каждого номера $m = 1, 2, 3, \dots$ складывается из общего решения Y_m^0 соответствующего однородного уравнения и частного решения Y_m^{ch} неоднородного уравнения:

$$Y_m(y) = Y_m^0(y) + Y_m^{ch}(y). \quad (4)$$

Общее решение запишем в гиперголо-тригонометрической форме:

$$Y_m^0(y) = C_{1m} \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{2m} \lambda_m y \cdot \operatorname{sh} \lambda_m y + C_{3m} \operatorname{sh} \lambda_m y + C_{4m} \lambda_m y \cdot \operatorname{ch} \lambda_m y. \quad (5)$$

Здесь $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$; произвольные постоянные $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$ находятся из условий на продольных сторонах пластины при $y = \pm \frac{b}{2}$, b – размер пластинки в плане между двумя свободными краями.

Частное решение уравнения (2) зависит от вида действующей нагрузки. Например, если функции $q_m(y)$ линейно зависят от координаты y , то есть $q_m(y) = A + By$, то

$$Y_m^{ch}(y) = \frac{A + By}{D\lambda_m^4}. \quad (6)$$

В нашем случае $q = Const$, то есть

$$q_m = \frac{4q}{m\pi}; \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

$$q_m = 0; \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

Учитывая симметрию и геометрии пластинки, и действующей нагрузки относительно оси X , в общем решении $Y_m^0(y)$ удерживаем только первых два слагаемых, а частное решение $Y_m^{ch}(y)$ принимаем по формуле (6) при $A = \frac{4q}{m\pi}$ и $B = 0$. В итоге соотношение (4) получает вид:

$$Y_m(y) = C_{1m} \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{2m} \lambda_m y \cdot \operatorname{sh} \lambda_m y + \frac{4q}{m\pi \lambda_m^4 D}. \quad (7)$$

Для определения коэффициентов C_{1m} и C_{2m} рассмотрим условия на сторонах пластинки $y = \pm \frac{b}{2}$.

Так как стороны $y = \pm \frac{b}{2}$ пластинки свободны от опор, то изгибающий момент в направлении оси Y и приведённые поперечные силы на свободном краю пластинки будут равны нулю, то есть граничные условия имеют вид:

$$\left. \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0; \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right] \right|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0.$$

Решая систему уравнений (8), с учётом зависимостей (1) и (7), получаем:

$$C_{1m} = - \frac{4\mu q}{m\pi\lambda_m^4 D} \cdot \frac{2 \operatorname{ch} \lambda_m \frac{b}{2} + (1 - \mu) \lambda_m \frac{b}{2} \cdot \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2}}{(\mu - 1) \lambda_m \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ch} \lambda_m \frac{b}{2} + (\mu + 1) \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2}} \cdot \frac{(\mu - 1) \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2} - (1 - \mu) \operatorname{ch} \lambda_m \frac{b}{2}}{(\mu - 1) \lambda_m \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ch} \lambda_m \frac{b}{2} + (\mu + 1) \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2}}; \quad (9)$$

$$C_{2m} = \frac{4\mu q}{m\pi\lambda_m^4 D} \cdot \frac{(\mu - 1) \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2}}{(\mu - 1) \lambda_m \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ch} \lambda_m \frac{b}{2} + (\mu + 1) \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2}} \cdot \frac{2 \operatorname{ch} \lambda_m \frac{b}{2} + (1 - \mu) \lambda_m \frac{b}{2} \cdot \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2}}{(\mu - 1) \lambda_m \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ch} \lambda_m \frac{b}{2} + (\mu + 1) \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2}} \cdot \frac{(\mu - 1) \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2} - (1 - \mu) \operatorname{ch} \lambda_m \frac{b}{2}}{(\mu - 1) \lambda_m \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ch} \lambda_m \frac{b}{2} + (\mu + 1) \operatorname{sh} \lambda_m \frac{b}{2}}.$$

Таким образом, решение (7) дифференциального уравнения (2) для каждого номера m построено.

Прогиб срединной поверхности пластинки определяется по формуле (1).

Далее определяем внутренние усилия в пластинке:

изгибающие моменты по формулам:

$$M_x(x, y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 Y_m(y) - \mu \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}; \quad (10)$$

$$M_y(x, y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \mu Y_m(y) - \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a},$$

крутящий момент по формуле:

$$H(x, y) = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1 - \mu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{dY_m(y)}{dy} \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (11)$$

поперечные силы по формулам:

$$\begin{aligned}
Q_x(x, y) &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \sum_{m=1}^{\infty} \left[- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 Y_m(y) + \frac{m\pi}{a} \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} \right] \cdot \cos \frac{m\pi x}{a}; \\
Q_y(x, y) &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -D \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^3 Y_m(y)}{dy^3} - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{dY_m(y)}{dy} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a},
\end{aligned} \tag{12}$$

приведённые поперечные силы (опорные реакции) по формулам:

$$\begin{aligned}
V_x(x, y) &= Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\
&= -D \sum_{m=1}^{\infty} \left[- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 Y_m(y) + (2 - \mu) \frac{m\pi}{a} \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} \right] \cdot \cos \frac{m\pi x}{a}; \\
V_y(x, y) &= Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = \\
&= -D \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^3 Y_m(y)}{dy^3} - (2 - \mu) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{dY_m(y)}{dy} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a},
\end{aligned} \tag{13}$$

сосредоточенные реакции в углах пластинки по формуле:

$$R(x_0, y_0) = 2H = -2D(1 - \mu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{dY_m(y_0)}{dy} \cos \frac{m\pi x_0}{a}. \tag{14}$$

Напряжения в поперечных сечениях пластинки вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= - \frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\
\sigma_y &= - \frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\
\tau_{xy} &= - \frac{Ez}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\
\tau_{zx} &= - \frac{E}{2(1 - \mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\
\tau_{zy} &= - \frac{E}{2(1 - \mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \\
\sigma_z &= - \frac{E}{24(1 - \mu^2)} (h^3 - 3h^2 z + 4z^3) \nabla^2 \nabla^2 w.
\end{aligned} \tag{15}$$

Результаты численного расчёта пластинки

Исходные данные для расчёта: прямоугольная пластинка с размерами в плане $a = 3$ м и $b = 0,1$ м имеет шарнирное опирание по сторонам $x = 0$ и $x = a$, по сторонам $y = \pm \frac{b}{2}$ контур пластины свободен (рисунок 2). Пластина загружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q = 8 \cdot 10^5$ Па. Материал пластины – сталь Ст.3, то есть $\mu = 0,2$ и $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Толщина пластины $h = 0,15$ м.

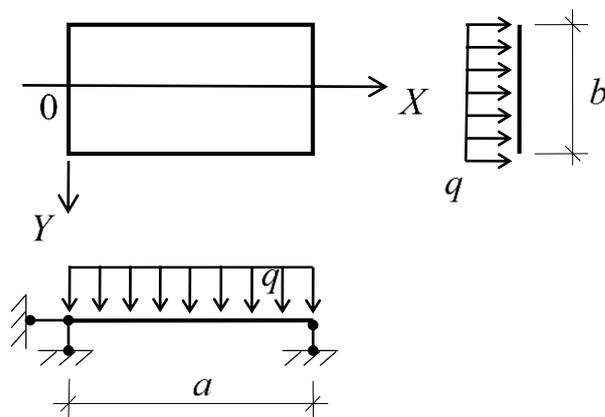


Рисунок 2

Результаты определения внутренних усилий в пластинке по формулам теории упругости представлены графически на рисунках 3-7. На рисунке 3 показана эпюра прогибов срединной поверхности пластинки в сечении $y = 0$.

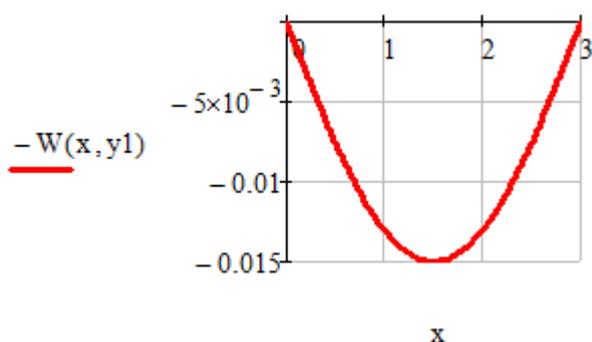


Рисунок 3 - Прогибы пластинки в сечении $y = 0$

Прогибы срединной поверхности в направлении оси Y остаются, в данном случае, постоянными для каждого сечения $x = x_i$. Однако, если пластинка имеет достаточно развитую ширину (порядка её длины), то прогибы в направлении оси Y по свободным краям

пластинки несколько больше прогибов в её середине. Таким образом, вообще говоря, пластинка изгибается в направлении оси Y выпуклостью вверх, а в направлении оси X выпуклостью вниз.

На рисунке 4 показаны эпюры изгибающих моментов в пластинке.

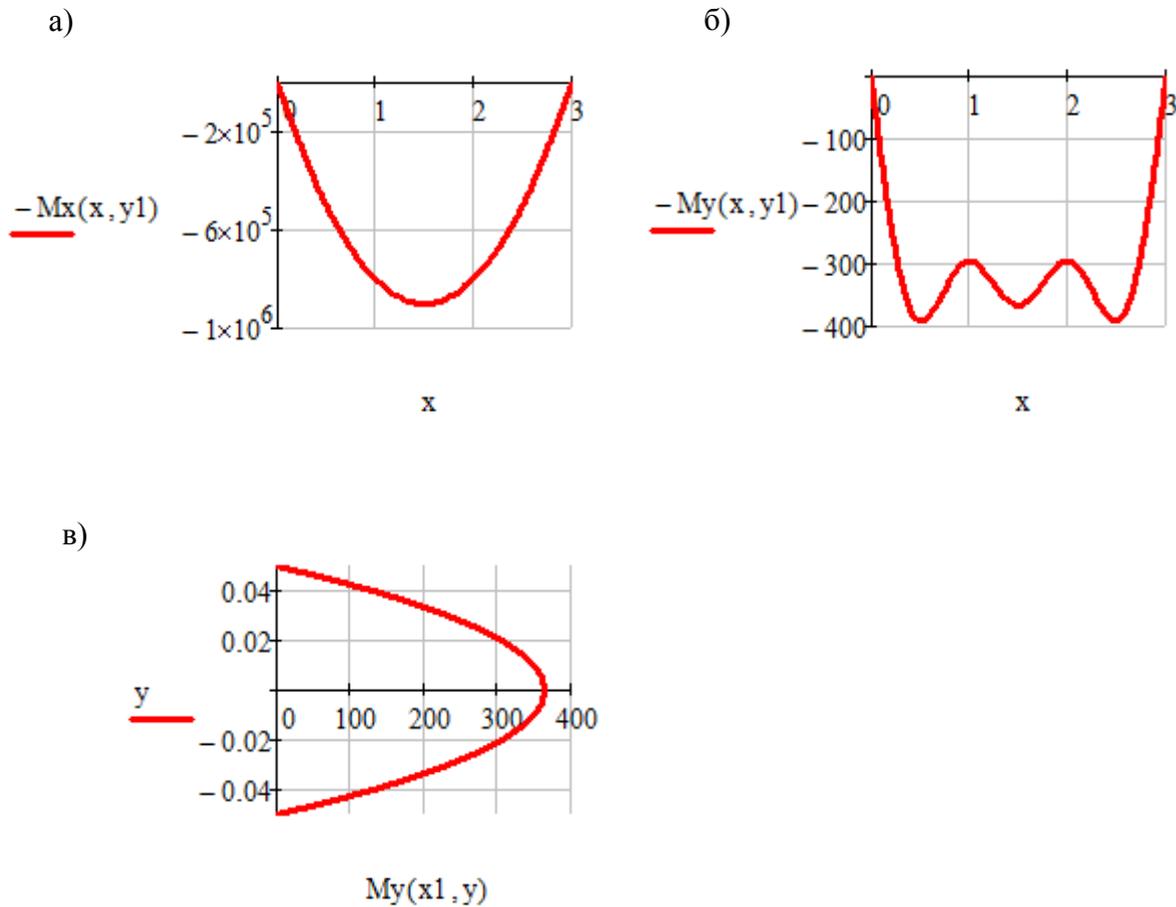


Рисунок 4 - Эпюры изгибающих моментов в пластинке:

а) эпюра $M_x(x, y)$ в сечении $y = 0$;

б) эпюра $M_y(x, y)$ в сечении $y = 0$;

в) эпюра $M_y(x, y)$ в сечении $x = \frac{a}{2}$.

Эпюры изгибающих моментов $M_x(x, y)$ в поперечном направлении в данном случае постоянны, однако, если пластинка имеет достаточно развитую ширину (порядка её длины), то изгибающие моменты $M_x(x, y)$ на свободных краях пластинки несколько больше, чем её середине. Таким образом, эпюры изгибающих моментов, в какой-то мере повторяют эпюры прогибов. Следует

отметить, что величина изгибающего момента $M_x(x, y)$ на три порядка больше изгибающего момента $M_y(x, y)$.

На рисунке 5 показаны эпюры крутящих моментов, действующих по свободному контуру пластинки (рисунок 5а), и по контуру с шарнирным опиранием (рисунок 5б). В средних сечениях пластинки при $y=0$ и $x=\frac{a}{2}$ крутящие моменты равны нулю. Отметим, что крутящие моменты на контуре пластинки и в продольном, и в поперечном направлениях имеют один порядок.

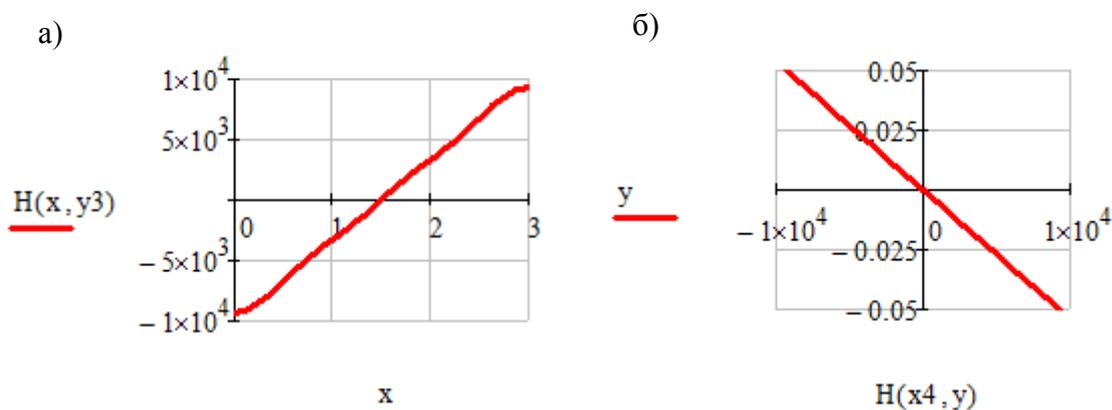


Рисунок 5 - Эпюры крутящих моментов

На рисунке 6 показаны эпюры поперечных сил в пластинке. Поперечные силы, действующие на площадках перпендикулярных к оси X , остаются, в данном случае, постоянными и не зависят от координаты y . Однако, если пластинка имеет достаточно развитую ширину (порядка её длины), то поперечные силы $Q_x(x, y)$ на свободных краях пластинки несколько меньше, чем на её середине при $y=0$. Кроме того, порядок поперечных сил $Q_x(x, y)$ превышает порядок поперечных сил $Q_y(x, y)$ в три раза.

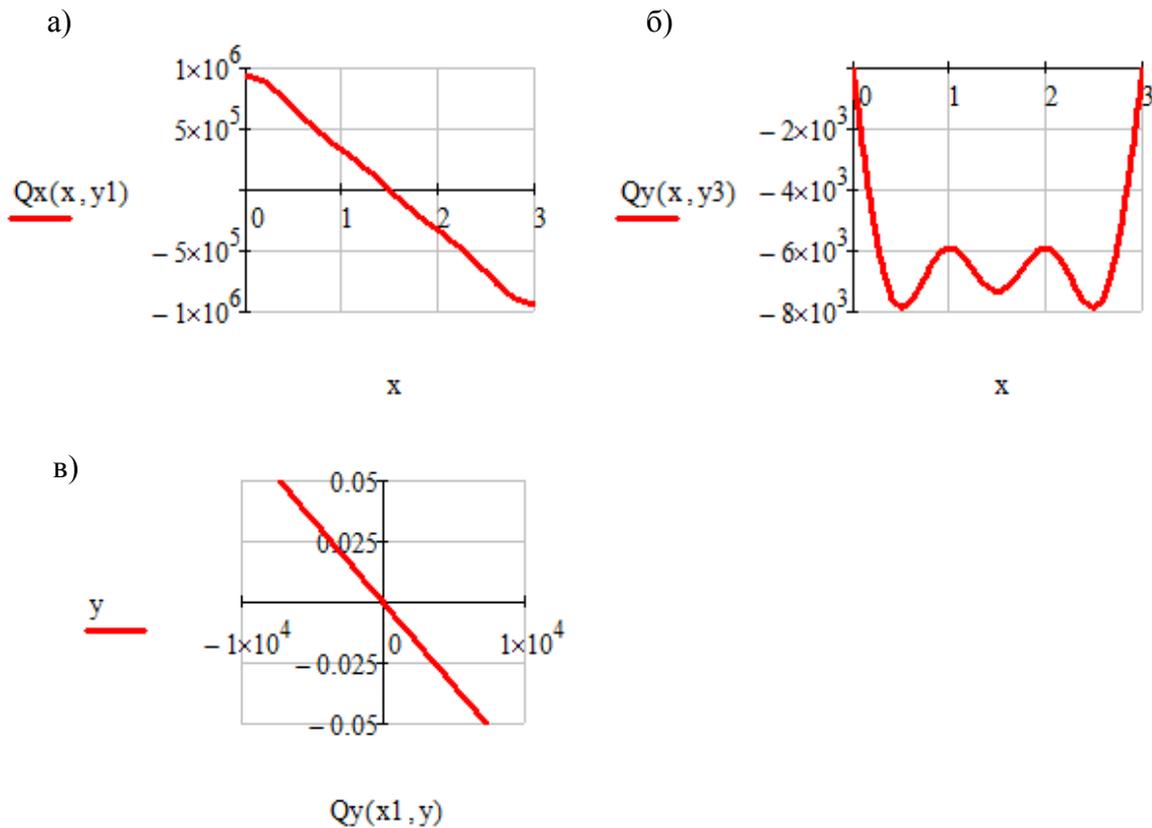


Рисунок 6 - Эпюры поперечных сил:

а) эпюра $Q_x(x, y)$ в сечении $y = 0$;

б) эпюра $Q_y(x, y)$ в сечении $y = \frac{b}{2}$;

в) эпюра $Q_y(x, y)$ в сечении $x = \frac{a}{2}$.

На рисунке 7 показана эпюра распределённых реакции по сторонам пластинки, имеющим шарнирное закрепление.

Сосредоточенные реакции в углах пластинки равны:

$$R_{1,2,3,4} = |1,859| \cdot 10^4 \text{ Н}$$

и все реакции направлены вверх.

Далее, на рисунках 8-9 показаны эпюры напряжений в поперечных сечениях пластинки.

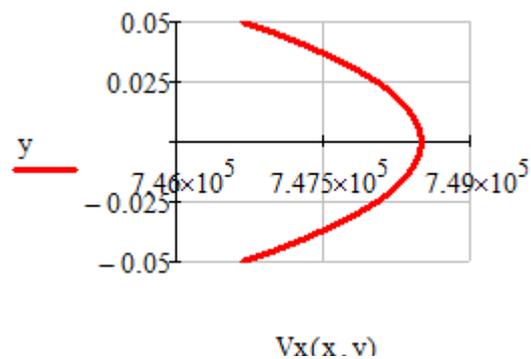


Рисунок 7 - Эпюра распределённых реакций по сторонам $x = 0$ и $x = a$

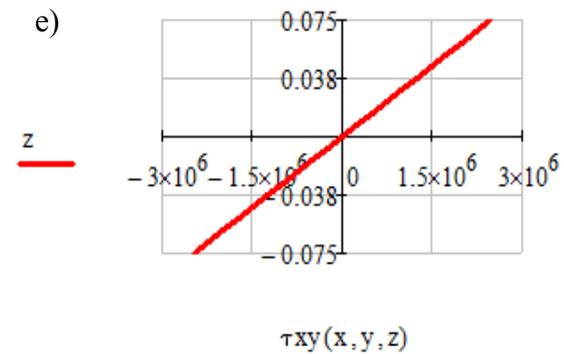
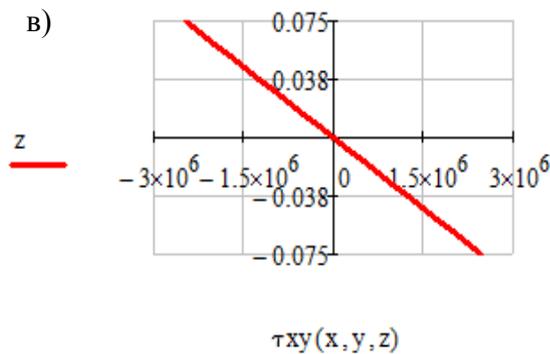
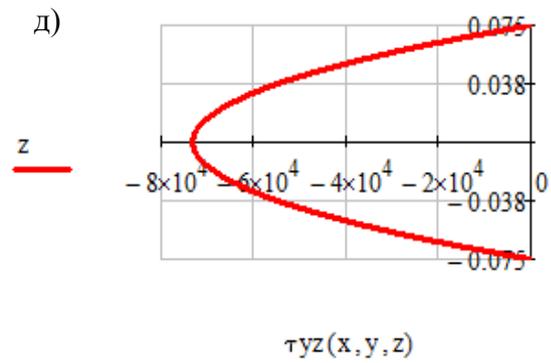
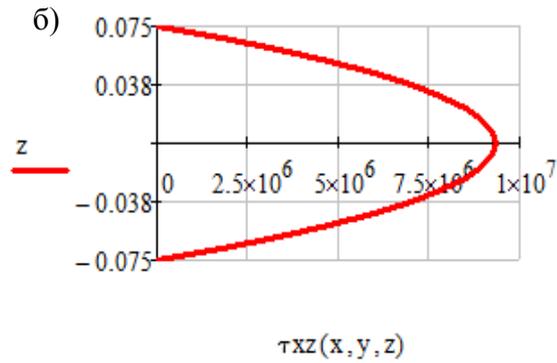
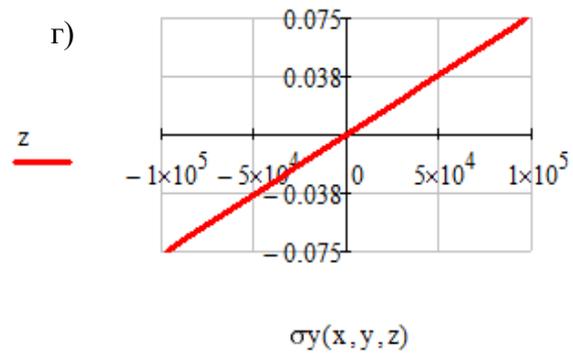
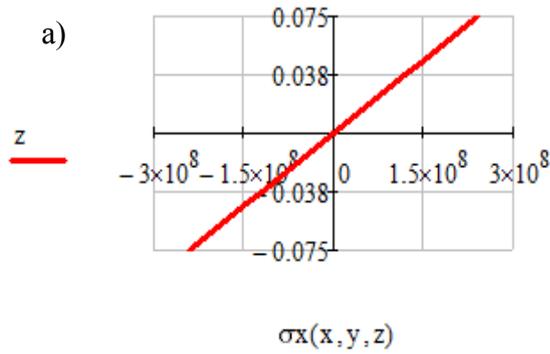


Рисунок 8 - Эпюры напряжений в пластинке:

а) эпюра $\sigma_x(x, y, z)$ в сечении $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$;

б) эпюра $\tau_{xz}(x, y, z)$ в сечении $x = 0$, $y = 0$;

в) эпюра $\tau_{xy}(x, y, z)$ в сечении $x = 0$, $y = \frac{b}{2}$;

г) эпюра $\sigma_y(x, y, z)$ в сечении $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$;

д) эпюра $\tau_{xz}(x, y, z)$ в сечении $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$;

е) эпюра $\tau_{xy}(x, y, z)$ в сечении $x = a$, $y = \frac{b}{2}$.

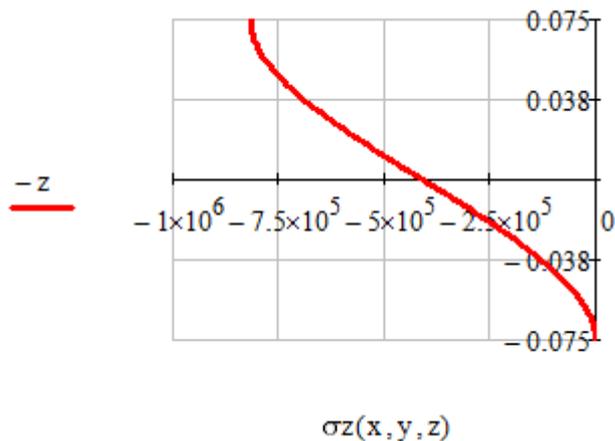


Рисунок 9 - Эпюра напряжений

$$\sigma_z(x, y, z) \text{ в сечении } x = \frac{a}{2}, y = 0$$

оси X , превышают касательные напряжения τ_{yz} , действующие на площадках, перпендикулярных к оси Y , на два порядка. Касательные напряжения τ_{xy} достигают наибольших значений в углах пластины. Наибольшая величина напряжения σ_z на две три порядка ниже, чем напряжение σ_x в той же точке пластинки.

Результаты численного расчёта балки

Исходные данные для расчёта: стержень, длиной $a = 3$ м, прямоугольного поперечного сечения с размерами $b = 0,1$ м и $h = 0,15$ м имеет шарнирное опирание по концам (рисунок 1). Стержень загружен равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q_c . Материал стержня – сталь Ст.3, то есть $\mu = 0,2$ и $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Величину погонной интенсивности равномерно-распределённой нагрузки на стержень найдём путём умножения поверхностной интенсивности равномерно-распределённой нагрузки на пластину на её ширину:

$$q_c = q \cdot b = 8 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Расчётные соотношения (рисунок 1):

Расчёты показали, что в центре пластины нормальные напряжения σ_x , действующие на площадках, перпендикулярных к оси X на три порядка больше нормальных напряжений σ_y , действующие на площадках, перпендикулярных к оси Y . На контуре пластинки касательные напряжения τ_{xz} , действующие на площадках, перпендикулярных к

$$M_x(z) = q_c(a-z)\frac{z}{2}; \quad Q_y(z) = q_c\frac{a}{2} - q_c z = q_c\left(\frac{a}{2} - z\right);$$

$$\sigma_z(y,z) = \frac{M_x(z)}{I_x} y; \quad \tau_{zy}(y,z) = \frac{Q_y(z) \cdot S_x(y)}{I_x b}; \quad \sigma_y(y) = \frac{q_c}{2b} \left[1 + 3\frac{y}{h} - 4\left(\frac{y}{h}\right)^3 \right];$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad S_x(y) = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) \right]; \quad V(z) = q_c \frac{z}{12EI_x} \left(az^2 - \frac{z^3}{2} - \frac{a^3}{2} \right).$$

Результаты определения внутренних усилий и напряжений в балке по формулам сопротивления материалов представлены графически на рисунке 10.

Анализ результатов расчёта

Сопоставление результатов расчётов балки-пластинки методами сопротивления материалов и теории упругости показывает следующее:

1. Максимальные прогибы в центре пластинки $w\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ и в центре балки $V\left(\frac{a}{2}\right)$ получились одинаковыми, то есть $w\left(\frac{a}{2}, 0\right) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0,015 \text{ м}$.

2. Максимальный изгибающий момент в центре пластинки, приведённый к равнодействующему моменту $M_x\left(\frac{a}{2}, 0\right) \cdot b = 9,018 \cdot 10^4 \text{ Нм}$, в то время как максимальный изгибающий момент в центре балки $M_x\left(\frac{a}{2}\right) = 9,0 \cdot 10^4 \text{ Нм}$, то есть превышение составляет 0,2%.

3. Максимальная поперечная сила на опоре пластинки, приведённая к равнодействующей $Q_x(0,0) \cdot b = 0,934 \cdot 10^5 \text{ Н}$, а максимальная поперечная сила на опоре балки $Q_y(0) = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Н}$, то есть превышение составляет 28,5%.

4. Максимальное нормальное напряжение в центре пластинки $\sigma_x\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{2}\right) = 2,04 \cdot 10^8 \text{ Па}$, максимальное нормальное напряжение в центре балки $\sigma_z\left(\frac{h}{2}, \frac{a}{2}\right) = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Па}$, то есть превышение составляет 2,0%.

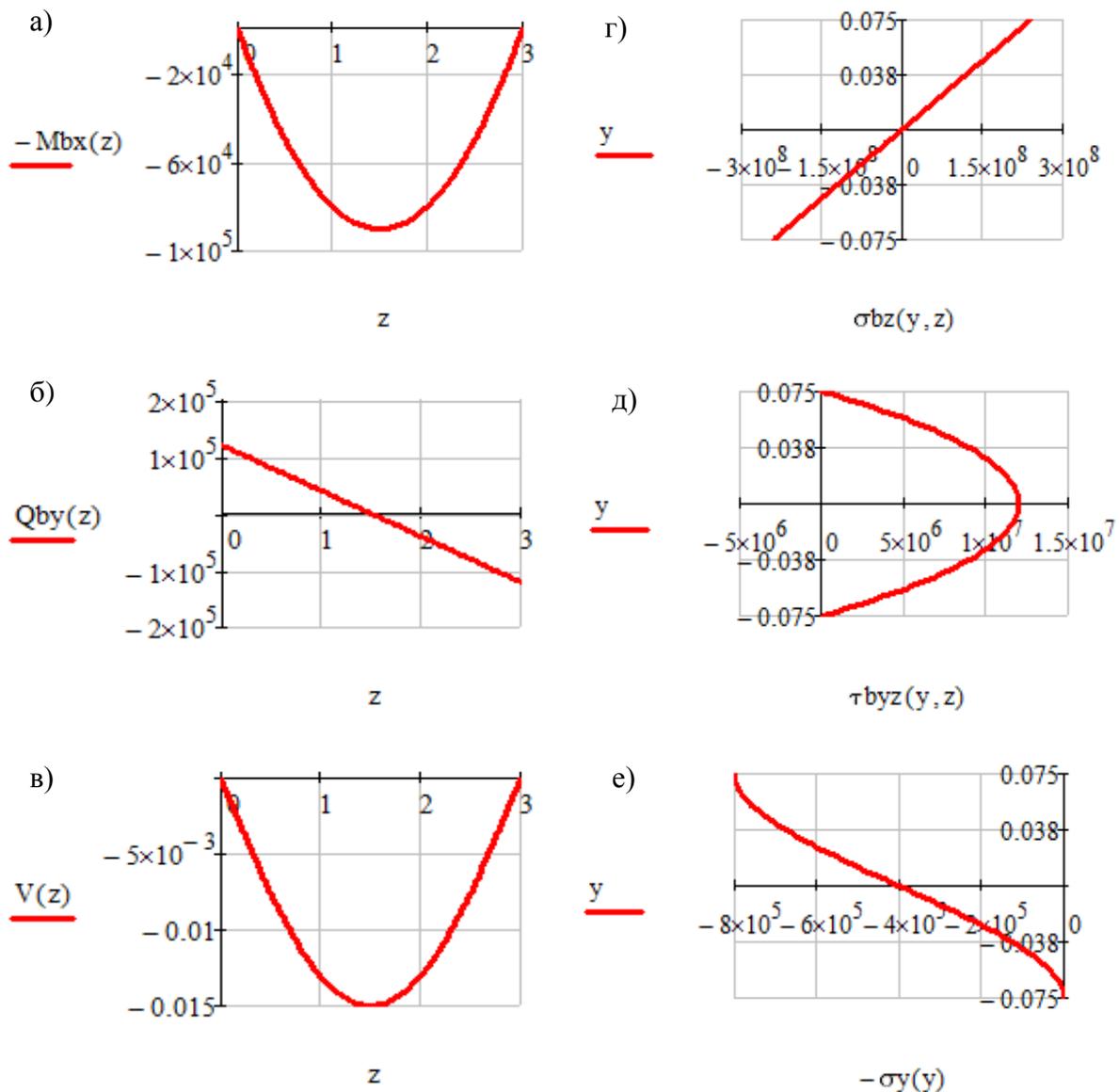


Рисунок 10 - Эпюры внутренних усилий и напряжений в балке:

а) эпюра $M_x(z)$; б) эпюра $Q_y(z)$; в) эпюра $V(z)$;

г) эпюра $\sigma_z(y, z)$ в сечении $z = \frac{a}{2}$; д) эпюра $\tau_{yz}(y, z)$ в сечении $z = 0$;

е) эпюра $\sigma_y(y)$ в сечении $z = \frac{a}{2}$.

5. Максимальное касательное напряжение на опоре в пластинке $\tau_{xz}(0,0,0) = 0,934 \cdot 10^7$ Па, а максимальное касательное напряжение на опоре в балке $\tau_{yz}(0,0) = 1,2 \cdot 10^7$ Па, то есть превышение составляет 28,5%.

6. Максимальное нормальное напряжение в пластинке

$\sigma_z\left(\frac{a}{2}, 0, -\frac{h}{2}\right) = -8,828 \cdot 10^5 \text{ Па}$, в то время как максимальное нормальное

напряжение в балке $\sigma_y\left(-\frac{h}{2}\right) = -8 \cdot 10^5 \text{ Па}$, то есть превышение составляет 9,4%.

7. В балке-пластинке, рассчитываемой методами теории упругости, в отличие от балки, рассчитываемой методами сопротивления материалов, действуют ещё изгибающие моменты M_y , крутящие моменты H и поперечные силы Q_y . Эти усилия в сопротивлении материалов игнорируются ввиду их малости по отношению, например к изгибающему моменту M_x . Например, $M_y^{\max} = 290 \text{ Н}$; $H^{\max} = 9,3 \cdot 10^3 \text{ Н}$; $Q_y^{\max} = 7,85 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$.

8. Кроме того, в балке-пластинке, рассчитываемой методами теории упругости, возникают напряжения σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} , которые также не принимаются во внимание при расчёте балки методами сопротивления материалов. Максимальные значения указанных напряжений равны: $\sigma_y^{\max} = 9,75 \cdot 10^4 \text{ Па}$; $\tau_{xy}^{\max} = 2,48 \cdot 10^6 \text{ Па}$; $\tau_{yz}^{\max} = 7,32 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

Выводы:

1. Результаты выполненных исследований показывают, что прогибы балки, определяемые методом сопротивления материалов и методами теории упругости, совпадают.

2. Сопротивление материалов незначительно занижает величину максимального изгибающего момента в балке, по сравнению с теорией упругости. Соответственно сопротивление материалов и теория упругости дают примерно равные значения для максимального нормального напряжения на площадках, перпендикулярных к продольной оси балки.

3. Сопротивление материалов значительно (более чем на четверть) завышает величину перерезывающей силы в балке, по сравнению с теорией упругости. Соответственно максимальные касательные напряжения на

площадках, перпендикулярных к продольной оси балки, определяемые методами сопротивления материалов, более чем на четверть превышают их величину, определяемую методами теории упругости.

4. Максимальные нормальные напряжения на горизонтальных площадках, определяемые методами сопротивления материалов, занижены по сравнению с их значениями, определяемыми методами теории упругости не более чем на 10%.

5. Основываясь на результатах точного (методами теории упругости) расчёта стержня с прямоугольным поперечным сечением, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба, можно утверждать, что в каждой точке стержня имеет место быть сложное напряжённое состояние и, следовательно, волокна стержня не находятся в условиях простого растяжения-сжатия.

Заключение

Расчёт шарнирно-опёртой балки методами теории упругости (при помощи одинарных тригонометрических рядов – решение М. Леви) показал, что характер напряжённого и деформированного состояния, в общем и целом, соответствует получаемому методами сопротивления материалов, однако имеют место быть и существенные отличия в числовых значениях, особенно в части касательных напряжений, а также нормальных напряжений, действующих на площадках, параллельных продольной оси стержня.

Библиографический список:

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ./ Под ред. Г.С. Шапиро. 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 560 с.

2. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для строит. спец. Вузов. 2-е изд. испр. М.: Высшая школа, 2002. 400 с.: ил.

3. Новожилов В.В. Две статьи о математических моделях в механике сплошной среды. Москва: Институт проблем механики, 1983. 56 с.

4. Бакушев С.В., Павлова А.Д. Анализ напряженного состояния балки при помощи тригонометрических рядов [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no5/stroitel'naya-mehanika/5.7/at_download/file