УДК 510.2

ИСКЛЮЧЕНИЯ В МЕТОДЕ КРЫЛОВА А.Н.

Бакушев Сергей Васильевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Булавина Дарья Андреевна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Аннотация

Рассматривается алгоритм метода А.Н. Крылова для определения собственных значений матрицы. Показано, что для симметричных относительно двух диагоналей матриц в качестве начального вектора необходимо в обязательном порядке брать несимметричный вектор.

Ключевые слова: матрицы, определение собственных значений, метод А.Н.Крылова, начальный вектор.

EXCEPTION IN THE METHOD KRYLOV A.N.

Bakushev Sergey Vasilevish,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Bulavina Daria Andreevna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

The algorithm of A.N. Krylov method for the determination of the eigenvalues of the matrix. It is shown that for symmetrical on the two diagonals of the matrix as the initial vector is mandatory to take asymmetrical vector.

Keywords: matrix, define your own values, A.N. Krylov method, initial vector.

Введение

Задачи на определение собственных значений матриц занимают в механике деформируемого твёрдого тела не последнее место. Достаточно вспомнить, например, задачу из курса теории упругости на определение главных напряжений и главных деформаций, а также ориентацию главных площадок и главных направлений; задачу на определение частот собственных колебаний стержневых систем; задачу на определение критических сил при расчёте стержневых систем на устойчивость; задачу на определение скоростей распространения упругих и упруго-пластических волн деформаций – нестационарных поверхностей сильных разрывов вторых производных перемещений, являющихся, вообще говоря, поверхностями слабых разрывов деформаций и напряжений. Все эти задачи связаны с определением собственных значений и собственных векторов матриц.

Теоретические основы метода

Обратимся к одному из классических методов определения коэффициентов характеристического полинома – методу А.Н.Крылова [1, 2].

Характеристический полином матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

как известно, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

В развёрнутом виде уравнение (2) получает, вообще говоря, следующую форму:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_n = 0. \tag{3}$$

Согласно метода Крылова А.Н., коэффициенты $p_j,\ j=1,2,\dots,n$ характеристического полинома (3) определяется из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(n-1)}\cdot p_1 + y_1^{(n-2)}\cdot p_2 + \dots + y_1^{(0)}\cdot p_n = -y_1^{(n)}, \\ y_2^{(n-1)}\cdot p_1 + y_2^{(n-2)}\cdot p_2 + \dots + y_2^{(0)}\cdot p_n = -y_2^{(n)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n^{(n-1)}\cdot p_1 + y_n^{(n-2)}\cdot p_2 + \dots + y_n^{(0)}\cdot p_n = -y_n^{(n)}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

причём, коэффициенты системы (4) вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{array}{l} y_i^{(1)} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^{(0)}; \\ y_i^{(2)} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^{(1)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots; \\ y_i^{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^{(n-1)}. \end{array}\right\} \quad i=1,2,\dots,n \tag{5}$$

При этом, координаты начального вектора $\overline{\mathbf{y}}^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\right)^T$ – произвольные числа.

Теоретическое обоснование.

Метод А.Н.Крылова является простым по сути, не слишком трудоёмким, хорошо поддающемся алгоритмизации. Никаких ограничений на исходную матрицу коэффициентов $\mathbf{A}$ и координаты начального вектора $\overline{\mathbf{y}}^{(0)}$ не накладывается, за исключением того, что хотя бы одна из координат начального вектора должна быть отлична от нуля. Недоразумения могут возникнуть лишь при решении системы линейных уравнений (4), поскольку системы линейных уравнений наряду с единственным решением могут иметь бесчисленное множество решений, либо быть несовместными, то есть не иметь решений. Эти ситуации сопровождаются, в частности, равенством нулю главного определителя матрицы коэффициентов системы (4). Но чтобы главный определитель матрицы коэффициентов системы (4) стал равен нулю, элементы его двух строк должны быть либо равны, либо пропорциональны; либо одна из строк должна быть линейной комбинацией каких-либо остальных строк.

При произвольно заданных координатах начального вектора $\bar{\mathbf{y}}^{(0)}$ равенство нулю главного определителя системы (4) может быть только случайным. Однако численные расчёты показали, что это не совсем так. Численные исследования результатов применения метода А.Н. Крылова показывают, что найти собственные значения матрицы, симметричной относительно двух диагоналей исходя из произвольного симметричного начального вектора затруднительно, практически невозможно, так как при этом система линейных уравнений (4) будет иметь бесчисленное множество решений, её главный и побочные определители будут равны нулю.

Действительно, рассмотрим симметричную относительно двух диагоналей произвольную матрицу, например четвёртого порядка:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{13} \\ a_{13} & a_{23} & a_{22} & a_{12} \\ a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{6}$$

В качестве начального вектора выберем произвольный симметричный вектор

$$\mathbf{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

По формуле (5) вычислим коэффициенты системы (4):

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_2 + a_{14}y_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_2 + a_{13}y_1 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{22}y_2 + a_{12}y_1 \\ a_{14}y_1 + a_{13}y_2 + a_{12}y_2 + a_{11}y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_1^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Видим, что вектор коэффициентов $\mathbf{y}^{(1)}$ является симметричным. Очевидно, что и вектора $\mathbf{y}^{(2)}$, $\mathbf{y}^{(3)}$, $\mathbf{y}^{(4)}$ коэффициентов системы (4) также будут симметричными:

$$\mathbf{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \\ y_2^{(2)} \\ y_1^{(2)} \end{pmatrix}; \ \mathbf{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \\ y_2^{(3)} \\ y_1^{(3)} \end{pmatrix}; \ \mathbf{y}^{(4)} = \begin{pmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_1^{(4)} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Формируя при помощи векторов (8) и (9) систему (4), запишем её в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(3)} & y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(3)} & y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_2^{(3)} & y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_1^{(3)} & y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_1^{(4)} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Первая строка в матрице коэффициентов системы (10) равна четвёртой строке, а вторая строка равна третьей. Это означает, что определитель матрицы коэффициентов системы (10) равен нулю. Кроме того и все побочные определители системы (10) также равны нулю. Следовательно, система (10) имеет бесчисленное множество решений.

Представленное выше обоснование легко обобщается на случай симметричной относительно двух диагоналей матрицы $n-$го порядка.

Численные исследования

Рассмотрим характерный пример.

Методом А.Н.Крылова найти коэффициенты характеристического полинома и собственные значения матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Выберем начальный вектор: $\mathbf{y}^{(0)} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$.

Пользуясь формулами (5), найдём:

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(4)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{pmatrix}.$$

Составим систему (4):

$$\begin{pmatrix} y_1^{(3)} & y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(3)} & y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(3)} & y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \\ y_4^{(3)} & y_4^{(2)} & y_4^{(1)} & y_4^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_3^{(4)} \\ y_4^{(4)} \end{pmatrix},$$

которая, в нашем случае, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 208 & 30 & 1 & 1 \\ 178 & 22 & 2 & 0 \\ 192 & 18 & 3 & 0 \\ 242 & 20 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{pmatrix}. \qquad \text{(а)}$$

Определитель матрицы коэффициентов системы (а) отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 208 & 30 & 1 & 1 \\ 178 & 22 & 2 & 0 \\ 192 & 18 & 3 & 0 \\ 242 & 20 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -180.$$

Решив систему (а), получим значения коэффициентов характеристического полинома: $p_1 = -4;\ p_2 = -40;\ p_3 = -56;\ p_4 = -20$.

Следовательно, характеристический полином исходной матрицы имеет вид:

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20 = 0. \qquad \text{(б)}$$

Решив уравнение (б), получаем собственные значения исходной матрицы:

$\lambda_1 = -3{,}414;\ \lambda_2 = -1{,}099;\ \lambda_3 = -0{,}586;\ \lambda_4 = 9{,}099$.

Проверим наше решение, выбрав другой начальный вектор:

$\mathbf{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

При этом получаем:

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 370 \\ 370 \\ 450 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(4)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 370 \\ 370 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4100 \\ 3360 \\ 3360 \\ 4100 \end{pmatrix}.$$

Составим систему (4):

$$\begin{pmatrix} 450 & 50 & 5 & 1 \\ 370 & 40 & 5 & 0 \\ 370 & 40 & 5 & 0 \\ 450 & 50 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4100 \\ 3360 \\ 3360 \\ 4100 \end{pmatrix}. \qquad \text{(в)}$$

Главный определитель матрицы коэффициентов системы (в) и все побочные определители равны нулю, следовательно, система (в) имеет бесчисленное множество решений:

$$p_1 = -8 - \frac{p_3}{10} + \frac{2}{25} p_4; \quad p_2 = -10 + \frac{4}{5} p_3 - \frac{37}{50} p_4;$$

$p_3,\ p_4$ – произвольные числа.

Например, если $p_3 = -56;\ p_4 = -20$, то $p_1 = -4;\ p_2 = -40$;

если $p_3 = 5;\ p_4 = -5$, то $p_1 = -8{,}9;\ p_2 = -2{,}3$.

если $p_3 = -12;\ p_4 = 7$, то $p_1 = -6{,}24;\ p_2 = -24{,}78$.

Таким образом, исходная матрица **A** имеет бесчисленное множество значений коэффициентов характеристического полинома.

Например, характеристический полином

$$\lambda^4 - 8{,}9\lambda^3 - 2{,}3\lambda^2 + 5\lambda - 5 = 0$$

имеет два действительных корня: $\lambda_1 = -1{,}099;\ \lambda_2 = 9{,}099$.

Характеристический полином $\lambda^4 - 6{,}24\lambda^3 - 24{,}78\lambda^2 - 12\lambda + 7 = 0$ имеет четыре действительных корня: $\lambda_1 = -2{,}094;\ \lambda_2 = -1{,}099;\ \lambda_3 = -0{,}334;\ \lambda_4 = 9{,}099$.

Многочисленные численные исследования позволяют сделать следующие выводы.

Выводы:

1. Если исходная матрица $\mathbf{A}$ n-ого порядка симметрична относительно двух диагоналей и начальный вектор несимметричен, то

- главный определитель матрицы коэффициентов системы (4) отличен от нуля;

- коэффициенты характеристического уравнения являются взаимно-независимыми;

- характеристическое уравнение имеет n действительных корней – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$.

2. Если исходная матрица $\mathbf{A}$ n-ого порядка симметрична относительно двух диагоналей и начальный вектор симметричен, то

- главный и побочный определители матрицы коэффициентов системы (4) равны нулю;

- коэффициенты характеристического уравнения являются взаимозависимыми, причём, среди множества совокупностей корней характеристического многочлена присутствует и совокупность корней, полученных для несимметричного начального вектора;

- характеристическое уравнение для различных начальных векторов имеет разное число действительных корней.

3. Метод Крылова содержит исключение, а именно – для определения собственных значений матрицы, симметричной относительно двух диагоналей, следует в обязательном порядке в качестве начального вектора брать несимметричный вектор.

Библиографический список:

1. Демидович В.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука. 1963. 660 с.

2. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз. 1963. 656 с.