УДК 539.37

РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Бакушев Сергей Васильевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Для плоской деформации сплошных сред, механическое поведение которых описывается математическими моделями, в которых среднее напряжение пропорционально объёмной деформации, а сдвиговые напряжения пропорциональны сдвиговым деформациям, рассматривается построение разрешающих уравнений в перемещениях в цилиндрической системе координат. Геометрическая нелинейность учитывается при помощи геометрических соотношений, в которых, в отличие от геометрически линейных сплошных сред, сохраняются квадратичные слагаемые. Разрешающая система уравнений представляет собой систему двух квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка от двух независимых переменных – перемещений точек сплошной среды в радиальном и тангенциальном направлениях.

Ключевые слова: сплошная среда, геометрическая и физическая нелинейность, разрешающие уравнения в перемещениях, цилиндрическая система координат.

ALLOW THE FLAT DEFORMATION EQUATION IN CYLINDRICAL COORDINATES FOR PHYSICALLY AND GEOMETRICALLY NONLINEAR CONTINUOUS MEDIUM

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Abstract

For the flat deformation solid Wednesday, mechanical behavior of describing mathematical models in which the average voltage is proportional to volumetric deformation and shear strain are proportional to compression counterpart deformations, how to construct allowing equations in displacement in the cylindrical coordinate system. Geometric non-linearity is taken into account using geometrical ratios where, unlike geometrically continuous linear quadratic terms persisted Wednesday. Resolution of the system is a system of two equations of quasilinear differential equations of the second order from two independent variables-motion solid points Wednesday in the radial and tangential directions.

Keywords: solid array, geometrical and physical nonlinearity, allow equations in displacement, cylindrical coordinate system.

Введение

Общая теория ортогональных криволинейных координат достаточно подробно описана в монографии В.В.Новожилова [1]. Здесь же приведён необходимый минимум расчётных формул для геометрически и физически нелинейной теории упругости, как в трёхмерной постановке, так и для решения плоской задачи. Однако ряд положений, в частности, построение разрешающих уравнений в перемещениях для плоской деформации геометрически и физически нелинейных сплошных сред в цилиндрической системе координат, остались за рамками монографии. В данной работе выполнено построение разрешающих дифференциальных уравнений в перемещениях в цилиндрической системе координат для плоской деформации сплошных сред с учётом геометрической и физической нелинейности, основываясь на материалах книги [1].

Построение уравнений

Введём цилиндрические координаты: r, φ, Z. Связь цилиндрических координат с декартовыми x, y, z описывается известными соотношениями:

$$x = r\cdot\cos\varphi;\; y = r\cdot\sin\varphi;\; \mathrm{z} = \mathrm{Z}. \tag{1}$$

Пусть $\alpha_1 = r,\; \alpha_2 = \varphi,\; \alpha_3 = Z$. При этом параметры Ляме [1] будут равны:

$$H_1 = 1,\; H_2 = r,\; H_3 = 1. \tag{2}$$

Пусть u_r, u_φ, u_Z – проекции вектора перемещения некоторой точки $M(r,\varphi,Z)$ сплошной среды на оси локального триэдра единичных векторов $\mathbf{k}_r, \mathbf{k}_\varphi, \mathbf{k}_Z$ в состоянии до деформации. В случае плоской деформации перемещение в направлении оси Z будет равно нулю, то есть $u_Z = 0$, а перемещения в направлении двух других осей координат не будут зависеть от координаты z: $u_r = u_r(r,\varphi);\; u_\varphi = u_\varphi(r,\varphi)$.

При этом параметры, образующие компоненты тензора нелинейных деформаций (формулы (2.6) и (2.7) [1]), получают вид:

$$\begin{gathered}
e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r};\; e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right);\; e_{ZZ} = 0;\\
e_{r\varphi} = e_{\varphi r} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}u_\varphi;\; e_{\varphi Z} = e_{Z\varphi} = 0;\; e_{Zr} = e_{rZ} = 0;\\
2\omega_r = 0;\; 2\omega_\varphi = 0;\; 2\omega_Z = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Следовательно, в цилиндрической системе координат, компоненты тензора нелинейных деформаций (формулы (2.15) [1]) будут равны:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{rr} = e_{rr} + \frac{1}{2}\left[e_{rr}^2 + \left(e_{r\varphi}^+\right)^2\right];\; \varepsilon_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + \frac{1}{2}\left[e_{\varphi\varphi}^2 + \left(e_{r\varphi}^-\right)^2\right];\\
\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = e_{r\varphi} + e_{rr}e_{r\varphi}^- + e_{\varphi\varphi}e_{r\varphi}^+;\\
\varepsilon_{\varphi Z} = \varepsilon_{Z\varphi} = 0;\; \varepsilon_{Zr} = \varepsilon_{rZ} = 0;\; \varepsilon_{ZZ} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

В формулах (4) обозначено:

$$e_{r\varphi}^+ = \frac{1}{2}e_{r\varphi} + \omega_Z;\; e_{r\varphi}^- = \frac{1}{2}e_{r\varphi} - \omega_Z. \tag{5}$$

Физические соотношения при этом получают вид:

$$\sigma^*_{rr} = K^*\varepsilon + 2G^*\left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right);\ \sigma^*_{\varphi\varphi} = K^*\varepsilon + 2G^*\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right);$$
$$\sigma^*_{r\varphi} = G^*\varepsilon_{r\varphi};\ \sigma^*_{\varphi r} = G^*\varepsilon_{\varphi r};\ \sigma^*_{ZZ} = K^*\varepsilon - \frac{2}{3}G^*\varepsilon; \tag{6}$$
$$\sigma^*_{rZ} = \sigma^*_{Zr} = 0;\ \sigma^*_{\varphi Z} = \sigma^*_{Z\varphi} = 0.$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{ZZ}$; K^* – геометрически нелинейный аналог модуля объёмного расширения (сжатия); G^* – геометрически нелинейный аналог модуля сдвига; $\sigma^*_{rr},\ \sigma^*_{\varphi\varphi},\ \sigma^*_{r\varphi} = \sigma^*_{\varphi r},\ \sigma^*_{ZZ}$ – обобщённые ненулевые напряжения.

Выпишем далее коэффициенты s_{ij} системы уравнений равновесия (формулы (3.8) [1]), учитывая при этом соотношения (6) и (3):

$$\begin{aligned}
&s_{11} = s_{rr} = \sigma^*_{rr}(1 + e_{rr}) + \sigma^*_{r\varphi}e^-_{r\varphi};\\
&s_{12} = s_{r\varphi} = \sigma^*_{rr}e^+_{r\varphi} + \sigma^*_{r\varphi}(1 + e_{\varphi\varphi});\\
&s_{13} = s_{rZ} = \sigma^*_{rZ} = 0;\\
&s_{21} = s_{\varphi r} = \sigma^*_{\varphi r}(1 + e_{rr}) + \sigma^*_{\varphi\varphi}e^-_{r\varphi};\\
&s_{22} = s_{\varphi\varphi} = \sigma^*_{\varphi r}e^+_{r\varphi} + \sigma^*_{\varphi\varphi}(1 + e_{\varphi\varphi});\\
&s_{23} = s_{\varphi Z} = \sigma^*_{\varphi Z} = 0;\\
&s_{31} = s_{Zr} = \sigma^*_{Zr}(1 + e_{rr}) + \sigma^*_{Z\varphi}e^-_{r\varphi};\\
&s_{32} = s_{Z\varphi} = \sigma^*_{Zr}e^+_{r\varphi} + \sigma^*_{Z\varphi}(1 + e_{\varphi\varphi});\\
&s_{33} = s_{ZZ} = \sigma^*_{ZZ}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения равновесия (формула (3.11) [1]), принимая во внимание формулы (7), получают вид:

$$\begin{cases}
r\dfrac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \dfrac{\partial s_{\varphi r}}{\partial \varphi} + s_{rr} - s_{\varphi\varphi} + rF^*_r = 0;\\
r\dfrac{\partial s_{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{\partial s_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + s_{r\varphi} + s_{\varphi r} + rF^*_\varphi = 0;\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad rF^*_Z = 0.
\end{cases} \tag{8}$$

Здесь $F^*_r,\ F^*_\varphi,\ F^*_Z$ – проекции объёмной силы на оси локального триэдра $\mathbf{k}_r, \mathbf{k}_\varphi, \mathbf{k}_Z$.

Подставляя в уравнения (8) формулы (7) и, учитывая соотношения (6) и (4), а также принимая во внимание, что в рамках рассматриваемой математической модели

$$K^* = K^*(\varepsilon);\ G^* = G^*(\Gamma),$$

то есть

$$\frac{\partial K^*}{\partial r} = \frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r};\ \ \frac{\partial K^*}{\partial \varphi} = \frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi};\ \ \frac{\partial G^*}{\partial r} = \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial r};\ \ \frac{\partial G^*}{\partial \varphi} = \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi},$$

причём $\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + \frac{3}{4}\varepsilon_{r\varphi}^2}$, получим запись уравнений равновесия (8) в следующей форме:

$$\begin{cases} A_{rrr}\frac{\partial e_{rr}}{\partial r} + A_{r\varphi r}\frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial r} + A_{\varphi\varphi r}\frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial r} + A_{\omega Zr}\frac{\partial \omega_Z}{\partial r} + \\ + A_{rr\varphi}\frac{\partial e_{rr}}{\partial \varphi} + A_{\varphi r\varphi}\frac{\partial e_{\varphi r}}{\partial \varphi} + A_{\varphi\varphi\varphi}\frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + A_{\omega Z\varphi}\frac{\partial \omega_Z}{\partial \varphi} + E_1 + rF_r^* = 0; \\ B_{rrr}\frac{\partial e_{rr}}{\partial r} + B_{r\varphi r}\frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial r} + B_{\varphi\varphi r}\frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial r} + B_{\omega Zr}\frac{\partial \omega_Z}{\partial r} + \\ + B_{rr\varphi}\frac{\partial e_{rr}}{\partial \varphi} + B_{\varphi r\varphi}\frac{\partial e_{\varphi r}}{\partial \varphi} + B_{\varphi\varphi\varphi}\frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + B_{\omega Z\varphi}\frac{\partial \omega_Z}{\partial \varphi} + E_2 + rF_\varphi^* = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь

$$A_{rrr} = B'_{\varepsilon r}(1 + e_{rr}) + B'_{\Gamma r}\frac{2(1 + e_{rr})}{3\Gamma}(2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) + B'_{\Gamma r}\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma}e^-_{r\varphi} + rG^*\left(e^-_{r\varphi}\right)^2 + $$
$$+ 2rG^*(1 + e_{rr})^2 + r\sigma^*_{rr};$$

$$A_{r\varphi r} = B'_{\varepsilon r}\frac{\left(e^+_{r\varphi} + e^-_{r\varphi}\right)}{2} + B'_{\Gamma r}\frac{e^+_{r\varphi}}{3\Gamma}(2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) + B'_{\Gamma r}\frac{e^-_{r\varphi}}{3\Gamma}(2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) +$$
$$+ \left(B'_{\Gamma r}\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma} + rG^*e^-_{r\varphi}\right)\left(1 + \frac{e_{rr}}{2} + \frac{e_{\varphi\varphi}}{2}\right) + rG^*(1 + e_{rr})e^+_{r\varphi} + r\frac{\sigma^*_{r\varphi}}{2};$$

$$A_{\varphi\varphi r} = B'_{\varepsilon r}(1 + e_{\varphi\varphi}) + B'_{\Gamma r}\frac{2(1 + e_{\varphi\varphi})}{3\Gamma}(2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) + B'_{\Gamma r}\frac{\varepsilon_{r\varphi}e^+_{r\varphi}}{\Gamma} + rG^*e^+_{r\varphi}e^-_{r\varphi};$$

$$A_{\omega Zr} = B'_{\varepsilon r}\left(e^+_{r\varphi} - e^-_{r\varphi}\right) + B'_{\Gamma r}\frac{2e^+_{r\varphi}}{3\Gamma}(2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) - B'_{\Gamma r}\frac{2e^-_{r\varphi}}{3\Gamma}(2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) +$$
$$+ B'_{\Gamma r}\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma}(e_{\varphi\varphi} - e_{rr}) + 2rG^*e^+_{r\varphi}(1 + e_{rr}) + rG^*e^-_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - e_{rr}) - r\sigma^*_{r\varphi};$$

$$A_{rr\varphi}=B'_{\varepsilon r}\left(1+e_{rr}\right)+B'_{\Gamma\varphi}\frac{2\left(1+e_{rr}\right)}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)+B'_{\Gamma\varphi}\frac{\varepsilon_{r\varphi}e^{-}_{r\varphi}}{\Gamma}+$$
$$+G^{*}e^{-}_{r\varphi}\left(1+e_{rr}\right)+\sigma^{*}_{\varphi r};$$

$$A_{\varphi r\varphi}=B'_{\varepsilon\varphi}\frac{\left(e^{+}_{r\varphi}+e^{-}_{r\varphi}\right)}{2}+B'_{\Gamma\varphi}\frac{e^{+}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)+B'_{\Gamma\varphi}\frac{e^{-}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr}\right)+$$
$$+\left[B'_{\Gamma\varphi}\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma}+G^{*}\left(1+e_{rr}\right)\right]\left(1+\frac{e_{rr}}{2}+\frac{e_{\varphi\varphi}}{2}\right)+G^{*}\left(e^{-}_{r\varphi}\right)^{2}+\frac{1}{2}\sigma^{*}_{\varphi\varphi};$$

$$A_{\varphi\varphi\varphi}=B'_{\varepsilon\varphi}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)+B'_{\Gamma\varphi}\frac{2\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr}\right)+B'_{\Gamma\varphi}\frac{\varepsilon_{r\varphi}e^{+}_{r\varphi}}{\Gamma}+$$
$$+G^{*}e^{+}_{r\varphi}\left(1+e_{rr}\right)+2G^{*}e^{-}_{r\varphi}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right);$$

$$A_{\omega Z\varphi}=B'_{\varepsilon\varphi}\left(e^{+}_{r\varphi}-e^{-}_{r\varphi}\right)+B'_{\Gamma\varphi}\frac{2e^{+}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)-B'_{\Gamma\varphi}\frac{2e^{-}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr}\right)+$$
$$+B'_{\Gamma\varphi}\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma}\left(e_{\varphi\varphi}-e_{rr}\right)+G^{*}\left(1+e_{rr}\right)\left(e_{\varphi\varphi}-e_{rr}\right)-2G^{*}\left(e^{-}_{r\varphi}\right)^{2}-\sigma^{*}_{\varphi\varphi};$$

$$B_{rrr}=B''_{\varepsilon r}\left(1+e_{rr}\right)+B''_{\Gamma r}\frac{2\left(1+e_{rr}\right)}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)+B''_{\Gamma r}\frac{\varepsilon_{r\varphi}e^{-}_{r\varphi}}{\Gamma}+$$
$$+2rG^{*}e^{+}_{r\varphi}\left(1+e_{rr}\right)+rG^{*}e^{-}_{r\varphi}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right);$$

$$B_{r\varphi r}=B''_{\varepsilon r}\frac{\left(e^{+}_{r\varphi}+e^{-}_{r\varphi}\right)}{2}+B''_{\Gamma r}\frac{e^{+}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)+B''_{\Gamma r}\frac{e^{-}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr}\right)+$$
$$+\left[B''_{\Gamma r}\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma}+rG^{*}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)\right]\left(1+\frac{e_{rr}}{2}+\frac{e_{\varphi\varphi}}{2}\right)+rG^{*}\left(e^{+}_{r\varphi}\right)^{2}+r\frac{1}{2}\sigma^{*}_{rr};$$

$$B_{\varphi\varphi r}=B''_{\varepsilon r}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)+B''_{\Gamma r}\frac{2\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr}\right)+B''_{\Gamma r}\frac{\varepsilon_{r\varphi}e^{+}_{r\varphi}}{\Gamma}+$$
$$+rG^{*}e^{+}_{r\varphi}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)+\sigma^{*}_{r\varphi};$$

$$B_{\omega Zr}=B''_{\varepsilon r}\left(e^{+}_{r\varphi}-e^{-}_{r\varphi}\right)+B''_{\Gamma r}\frac{2e^{+}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)-B''_{\Gamma r}\frac{2e^{-}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr}\right)+$$
$$+B''_{\Gamma r}\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma}\left(e_{\varphi\varphi}-e_{rr}\right)+2rG^{*}\left(e^{+}_{r\varphi}\right)^{2}+rG^{*}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)\left(e_{\varphi\varphi}-e_{rr}\right)+r\sigma^{*}_{rr};$$

$$B_{rr\varphi}=B''_{r\varphi}\left(1+e_{rr}\right)+B''_{\Gamma\varphi}\frac{2\left(1+e_{rr}\right)}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)+B''_{\Gamma\varphi}\frac{\varepsilon_{r\varphi}e^{-}_{r\varphi}}{\Gamma}+G^{*}e^{+}_{r\varphi}e^{-}_{r\varphi};$$

$$B_{\varphi r\varphi}=B''_{\varepsilon\varphi}\frac{\left(e^{+}_{r\varphi}+e^{-}_{r\varphi}\right)}{2}+B''_{\Gamma\varphi}\frac{e^{+}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)+B''_{\Gamma\varphi}\frac{e^{-}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr}\right)+$$

$$+\left(B''_{\Gamma\varphi}\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma}+G^{*}e^{+}_{r\varphi}\right)\left(1+\frac{e_{rr}}{2}+\frac{e_{\varphi\varphi}}{2}\right)+G^{*}e^{-}_{r\varphi}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)+\frac{1}{2}\sigma^{*}_{\varphi r};$$

$$B_{\varphi\varphi\varphi}=B''_{\varepsilon\varphi}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)+B''_{\Gamma\varphi}\frac{2\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr}\right)+B''_{\Gamma\varphi}\frac{\varepsilon_{r\varphi}e^{+}_{r\varphi}}{\Gamma}+G^{*}\left(e^{+}_{r\varphi}\right)^{2}+$$

$$+2G^{*}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)^{2}+\sigma^{*}_{\varphi\varphi};$$

$$B_{\omega Z\varphi}=B''_{\varepsilon\varphi}\left(e^{+}_{r\varphi}-e^{-}_{r\varphi}\right)+B''_{\Gamma\varphi}\frac{2e^{+}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)-B''_{\Gamma\varphi}\frac{2e^{-}_{r\varphi}}{3\Gamma}\left(2\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr}\right)+$$

$$+B''_{\Gamma\varphi}\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma}\left(e_{\varphi\varphi}-e_{rr}\right)+G^{*}e^{+}_{r\varphi}\left(e_{\varphi\varphi}-e_{rr}\right)-2G^{*}e^{-}_{r\varphi}\left(1+\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)+\sigma^{*}_{\varphi r};$$

$$E_{1}=\sigma^{*}_{rr}\left(1+e_{rr}\right)-\sigma^{*}_{\varphi\varphi}\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)-2\sigma^{*}_{r\varphi}\omega_{Z};$$

$$E_{2}=\sigma^{*}_{rr}e^{+}_{r\varphi}+\sigma^{*}_{\varphi\varphi}e^{-}_{r\varphi}+\sigma^{*}_{r\varphi}\left(2+e_{rr}+e_{\varphi\varphi}\right).$$

Кроме того

$$B'_{\varepsilon r}=r\left[\left(1+e_{rr}\right)A_{\varepsilon r}\right];\quad B'_{\Gamma r}=r\left[\left(1+e_{rr}\right)A_{\Gamma r}+e^{-}_{r\varphi}\varepsilon_{r\varphi}\frac{\partial G^{*}}{\partial\Gamma}\right];$$

$$B'_{\varepsilon\varphi}=\left[e^{-}_{r\varphi}A_{\varepsilon\varphi}\right];\quad B'_{\Gamma\varphi}=\left[\left(1+e_{rr}\right)\varepsilon_{\varphi r}\frac{\partial G^{*}}{\partial\Gamma}+e^{-}_{r\varphi}A_{\Gamma\varphi}\right];$$

$$B''_{\varepsilon r}=r\left[e^{+}_{r\varphi}A_{\varepsilon r}\right];\quad B''_{\Gamma r}=r\left[e^{+}_{r\varphi}A_{\Gamma r}+\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)\varepsilon_{r\varphi}\frac{\partial G^{*}}{\partial\Gamma}\right];$$

$$B''_{\varepsilon\varphi}=\left[\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)A_{\varepsilon\varphi}\right];\quad B''_{\Gamma\varphi}=\left[e^{+}_{r\varphi}\varepsilon_{\varphi r}\frac{\partial G^{*}}{\partial\Gamma}+\left(1+e_{\varphi\varphi}\right)A_{\Gamma\varphi}\right],$$

причём

$$A_{\varepsilon r}=K^{*}+\varepsilon\frac{\partial K^{*}}{\partial\varepsilon}-\frac{2}{3}G^{*};\quad A_{\varepsilon\varphi}=K^{*}+\varepsilon\frac{\partial K^{*}}{\partial\varepsilon}-\frac{2}{3}G^{*};$$

$$A_{\Gamma r}=2\left(\varepsilon_{rr}-\frac{1}{3}\varepsilon\right)\frac{\partial G^{*}}{\partial\Gamma};\quad A_{\Gamma\varphi}=2\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}-\frac{1}{3}\varepsilon\right)\frac{\partial G^{*}}{\partial\Gamma}.$$

Вычисляя по формулам (3) производные от параметров e_{rr}, $e_{\varphi\varphi}$, $e_{r\varphi}=e_{\varphi r}$, ω_Z по цилиндрическим координатам r и φ, и, подставляя их в систему (9), получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно двух независимых переменных - перемещений точек сплошной среды в радиальном u_r и тангенциальном u_φ направлениях:

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + A_2 \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + A_3 \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + A_4 \dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \\ + A_5 \dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + A_6 \dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + A + rF_r^* = 0; \\ B_1 \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + B_2 \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + B_3 \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + B_4 \dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \\ + B_5 \dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + B_6 \dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + B + rF_\varphi^* = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

В системе (10) коэффициенты при вторых производных от перемещений по цилиндрическим координатам равны:

$$A_1 = A_{rrr}; \qquad A_4 = A_{r\varphi r} + \frac{1}{2} A_{\omega Zr};$$

$$A_2 = A_{r\varphi r}\frac{1}{r} - A_{\omega Zr}\frac{1}{2r} + A_{rr\varphi}; \qquad A_5 = A_{\varphi\varphi r}\frac{1}{r} + A_{\varphi r\varphi} + \frac{1}{2}A_{\omega Z\varphi};$$

$$A_3 = \left(A_{\varphi r\varphi} - \frac{1}{2}A_{\omega Z\varphi} \right)\frac{1}{r}; \qquad A_6 = A_{\varphi\varphi\varphi}\frac{1}{r};$$

$$A = A_{r\varphi r}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}u_\varphi - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + A_{\varphi\varphi r}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) \right] +$$

$$+ A_{\omega Zr}\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\varphi \right) - A_{\varphi r\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + A_{\varphi\varphi\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} +$$

$$+ A_{\omega Z\varphi}\frac{1}{2r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + E_1;$$

$$B_1 = B_{rrr}; \qquad B_4 = B_{r\varphi r} + \frac{1}{2} B_{\omega Zr};$$

$$B_2 = B_{r\varphi r}\frac{1}{r} - B_{\omega Zr}\frac{1}{2r} + B_{rr\varphi}; \qquad B_5 = B_{\varphi\varphi r}\frac{1}{r} + B_{\varphi r\varphi} + \frac{1}{2}B_{\omega Z\varphi};$$

$$B_3 = \left(B_{\varphi r\varphi} - \frac{1}{2}B_{\omega Z\varphi} \right)\frac{1}{r}; \qquad B_6 = B_{\varphi\varphi\varphi}\frac{1}{r};$$

$$B = B_{r\varphi r}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}u_\varphi - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right) + B_{\varphi\varphi r}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right)\right] +$$

$$+ B_{\omega Zr}\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\varphi\right) - B_{\varphi r\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + B_{\varphi\varphi\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} +$$

$$+ B_{\omega Z\varphi}\frac{1}{2r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + E_2.$$

Система квазилинейных дифференциальных уравнений (10) является окончательной разрешающей системой уравнений в перемещениях плоской деформации для физически и геометрически нелинейной сплошной среды, записанной в цилиндрических координатах. Для её интегрирования условия на поверхности нелинейно-упругого тела следует записывать в перемещениях. Учитывая квазилинейность данной системы дифференциальных уравнений, её интегрирование следует выполнять приближёнными (численными) методами. Если в основу решения положить итерационную процедуру, то в качестве начального приближения следует брать решение рассматриваемой задачи в геометрически и физически линейной постановке, когда разрешающая система дифференциальных уравнений в перемещениях для плоской деформации упругой сплошной среды в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\begin{cases} A_1\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + A_3\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + A_5\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r\partial \varphi} + A + F_r = 0; \\ B_2\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial \varphi} + B_4\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + B_6\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + B + F_\varphi = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Здесь

$$A_1 = K_0 + \frac{4}{3}G_0;\quad A_3 = \frac{1}{r^2}G_0;\quad A_5 = \frac{1}{r}\left(K_0 - \frac{1}{3}G_0\right);$$

$$A = -\left(K_0 - \frac{4}{3}G_0\right)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}u_r\right) - \frac{1}{r^2}G_0 +$$

$$+\frac{1}{r}\left\{\left(K_0 + \frac{4}{3}G_0\right)\left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{3K_0 - 2G_0}{3K_0 + 4G_0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}u_r\right)\right] -\right.$$

$$\left.-\left(K_0 + \frac{4}{3}G_0\right)\left[\frac{3K_0 - 2G_0}{3K_0 + 4G_0}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}u_r\right)\right]\right\};$$

$$B_2 = \frac{1}{r}\left(K_0 - \frac{1}{3}G_0\right); \quad B_4 = G_0; \quad B_6 = \frac{1}{r^2}\left(K_0 + \frac{4}{3}G_0\right);$$

$$B = -G_0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}u_\varphi\right) + \frac{1}{r^2}\left(K_0 + \frac{4}{3}G_0\right)\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} +$$

$$+\frac{2}{r}G_0\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right).$$

Заключение

Представленные в статье результаты могут быть востребованы при определении напряжённо-деформированного состояния геометрически нелинейных массивных тел, механическое поведение которых описывается зависимостями, в которых среднее напряжение пропорционально объёмной деформации, а сдвиговые напряжения пропорциональны сдвиговым деформациям, с использованием цилиндрических координат.

Библиографический список:

1. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз. 1958. 370с.