

УДК 539.371

**ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ  
РАВНОМЕРНО-РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПО ТОРЦАМ СТЕРЖНЯ  
НАГРУЗКАМИ ПРИ ПОМОЩИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ**

*Бакушев Сергей Васильевич,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

**Аннотация**

Рассматривается осевое растяжение прямолинейного тонкого стержня от действия равномерно-распределённой нагрузки, приложенной по торцам стержня и направленной вдоль его продольной оси. Решение строится при помощи тригонометрических рядов (решение Файлона). Стержень рассматривается как тонкая упругая полоска, находящаяся в условиях плоской задачи. В результате определяются характеристики напряжённо-деформированного состояния: нормальные и касательные напряжения, продольные и поперечные перемещения точек стержня. Показано, что в областях, примыкающих к торцам стержня, характер распределения и напряжений, и перемещений существенно искажается.

**Ключевые слова:** стержень, осевое растяжение, упругость, тригонометрические ряды.

**AXIAL TENSION OF A THIN ROD BY UNIFORM LOADING APPLIED ON  
THE ENDS OF THE ROD BY USING THE TRIGONOMETRIC ROWS**

*Bakushev Sergey Vasilevich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.*

## Abstract

The article is devoted to considering the question about the axial tension of a thin rod by uniform loading applied on the ends of the rod and directed along its longitudinal axis. The solution is forming by using trigonometric series (Filon solution). The rod is considered as a thin elastic strip, being in the conditions of a plane elastic problem. As a result, the characteristics of the stress-strain state are determined: normal and tangential stresses, longitudinal and transverse displacements of points of the rod. It is shown that in the areas adjacent to the ends of the rod, the nature of the pattern of stress and displacements is substantially distorted.

**Keywords:** rod, axial stretching, elasticity, trigonometric series.

## Введение

Использование тригонометрических рядов Фурье для решения плоской задачи теории упругости хотя и нельзя признать удовлетворительным, однако для нагрузок, трудно поддающихся аналитическому описанию – например, сосредоточенные воздействия – данный метод позволяет построить замкнутое аналитическое решение. В частности, замкнутое аналитическое решение построено для расчёта балок-стенок, нагруженных по верхнему и нижнему контуру произвольной, вообще говоря, нагрузкой [1]. Используя данное решение можно проанализировать напряжённо-деформированное состояние балок-стенок в зависимости от их геометрических размеров и видов нагрузок, действующих по верхней и нижней её сторонам. Данная задача рассматривалась многими исследователями: Mathien E., Ribiere M.C., Filon L.N.G., Timpe A., Mesmer G., Seewald F., Pigeaud M., Goodier J.N., Bleich F. и др.

Исследование характера напряжений и перемещений в балке-стенке высотой  $b$ , шириной  $a$  и толщиной  $h$ , когда  $h \ll a$  и  $b \gg a$ , то есть балке-стенке, представляющей собой тонкую полосу, а фактически тонкий плоский стержень (рисунок 1), выполнено в работах [2] и [3]. В работе [2] тонкий стержень загружен сосредоточенными силами, приложенными в центрах тяжести торцевых сечений, и находится в условиях осевого растяжения; в

работе [3] сосредоточенные силы действуют параллельно продольной оси

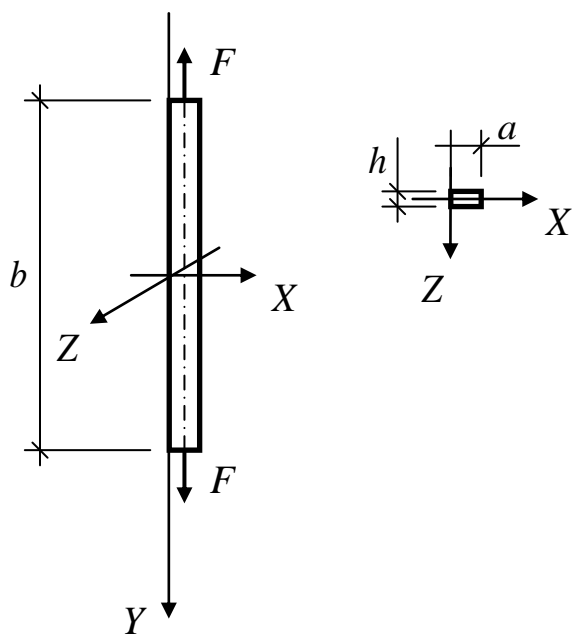


Рисунок 1

стержня и приложены в центрах боковых сторон торцевых сечений, то есть стержень также находится в условиях осевого растяжения. Выполненные исследования показали, что характер распределения напряжений и перемещений в тонкой полосе (тонком плоском стержне) повторяют характер распределения напряжений и перемещений в балке-стенке, у которой размеры  $a$  и  $b$  одного порядка.

В данной работе рассматривается осевое растяжение тонкого плоского стержня (тонкой упругой полоски), нагруженного по торцам равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности  $q$ . Стержень, с точки зрения теории упругости, будет находиться в условиях плоской задачи. Решение задачи будем выполнять при помощи тригонометрических рядов.

### Теоретические основы

В качестве функции напряжений примем бесконечный тригонометрический ряд по синусам:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin(\lambda_m x). \quad (1)$$

Здесь

$$Y_m(y) = C_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{3m} y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{4m} y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y), \quad (2)$$

причём  $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$ .

Для определения напряжений будем иметь следующие расчётные формулы [4]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \{ C_{1m} \lambda_m^2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \lambda_m^2 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \\
 &\quad + C_{3m} \lambda_m [2 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \lambda_m y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)] + \\
 &\quad + C_{4m} \lambda_m [2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y)] \} \sin(\lambda_m x); \\
 \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} [ C_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \\
 &\quad + C_{3m} y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{4m} y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) ] \lambda_m^2 \sin(\lambda_m x); \\
 \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = - \sum_{m=1}^{\infty} \{ \lambda_m C_{1m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \lambda_m C_{2m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \\
 &\quad + C_{3m} [ \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) ] + \\
 &\quad + C_{4m} [ \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \lambda_m y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) ] \} \lambda_m \cos(\lambda_m x).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Разложим нагрузку, действующую на стержень в тригонометрические ряды по синусам:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(\lambda_m x); \quad p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(\lambda_m x). \tag{4}$$

Здесь

$$A_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin(\lambda_m x) dx; \quad B_m = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \sin(\lambda_m x) dx, \tag{5}$$

причём

$$q(x) = q_0 (1 + x - x); \quad p(x) = p_0 (1 + x - x). \tag{6}$$

Таким образом, силовое воздействие на стержень моделируется функцией, принимающей постоянное значение в пределах ширины торцевого поперечного сечения.

Запишем граничные условия в напряжениях по верхнему и нижнему торцам стержня:

$$\text{- при } y = \frac{b}{2}, \quad \sigma_y = -p(x); \quad \tau_{yx} = 0;$$

$$\text{- при } y = -\frac{b}{2}, \quad \sigma_y = -q(x); \quad \tau_{yx} = 0.$$

Принимая во внимание соотношения (3) и (4), на основании граничных условий получаем систему четырёх линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$  для каждого номера  $m$ :

$$\begin{cases} C_{1m} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{2m} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{3m} \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{4m} \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) = \frac{B_m}{\lambda_m^2}; \\ C_{1m} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - C_{2m} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - C_{3m} \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - C_{4m} \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) = \frac{A_m}{\lambda_m^2}; \\ \left\{ \lambda_m C_{1m} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m C_{2m} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{3m} \left[ \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + C_{4m} \left[ \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] \right\} \lambda_m = 0; \\ \left\{ -\lambda_m C_{1m} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m C_{2m} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{3m} \left[ \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + C_{4m} \left[ -\operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] \right\} \lambda_m = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} C_{1m} &= \frac{A_m + B_m}{\lambda_m^2} \frac{\operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\lambda_m \frac{b}{2}\right) + 2\lambda_m \frac{b}{2}}; \\ C_{2m} &= -\frac{A_m - B_m}{\lambda_m^2} \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\lambda_m \frac{b}{2}\right) - 2\lambda_m \frac{b}{2}}; \\ C_{3m} &= \frac{A_m - B_m}{\lambda_m^2} \frac{\lambda_m \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\lambda_m \frac{b}{2}\right) - 2\lambda_m \frac{b}{2}}; \quad C_{4m} = -\frac{A_m + B_m}{\lambda_m^2} \frac{\lambda_m \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\lambda_m \frac{b}{2}\right) + 2\lambda_m \frac{b}{2}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для постоянных интегрирования  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$  в соотношения (3), получаем окончательные формулы для напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + B_m) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m y) \left[ \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) - \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \right] - \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) + \lambda_m b} + \right. \\
& \left. + (A_m - B_m) \frac{\operatorname{sh}(\lambda_m y) \left[ \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) - \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \right] + \lambda_m y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) - \lambda_m b} \right\} \times \\
& \times \sin(\lambda_m x); \\
\sigma_y = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + B_m) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m y) \left[ \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) + \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \right] - \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) + \lambda_m b} + \right. \\
& \left. + (A_m - B_m) \frac{\lambda_m y \cdot \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \operatorname{ch}(\lambda_m y) - \left[ \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \right] \operatorname{sh}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) - \lambda_m b} \right\} \times \\
& \times \sin(\lambda_m x); \\
\tau_{xy} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + B_m) \frac{\lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) - \lambda_m y \cdot \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) + \lambda_m b} + \right. \\
& \left. + (A_m - B_m) \frac{\lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \cdot \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) - \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) - \lambda_m b} \right\} \cos(\lambda_m x).
\end{aligned}$$

Для вычисления перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  в тонком плоском упругом стержне (тонкой упругой полоске), воспользуемся соотношениями [4, 5]:

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(y) \lambda_m \cos(\lambda_m x); \quad v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(y) \sin(\lambda_m x). \quad (7)$$

Здесь выражения для функций  $u_m(y)$  и  $v_m(y)$  имеют вид [4]:

$$\begin{aligned}
u_m(y) = & -\frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{\lambda_m} \left[ C_{1m} \lambda_m^2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \lambda_m^2 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + 2C_{3m} \lambda_m \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \right. \right. \\
& + C_{3m} y \lambda_m^2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + 2C_{4m} \lambda_m \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{4m} y \lambda_m^2 \operatorname{sh}(\lambda_m y) \left. \right] + \\
& + \mu \lambda_m \left[ C_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{3m} y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \right. \\
& \left. + C_{4m} y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \right] \left. \right\}; \\
v_m(y) = & \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{\lambda_m^2} \left[ C_{1m} \lambda_m^3 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{2m} \lambda_m^3 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + 3C_{3m} \lambda_m^2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \right. \right. \\
& + C_{3m} y \lambda_m^3 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + 3C_{4m} \lambda_m^2 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{4m} y \lambda_m^3 \operatorname{ch}(\lambda_m y) \left. \right] - \\
& - (2 + \mu) \left[ C_{1m} \lambda_m \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{2m} \lambda_m \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{3m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \right. \\
& \left. + C_{3m} y \lambda_m \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{4m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{4m} y \lambda_m \operatorname{ch}(\lambda_m y) \right] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Итак, все расчётные соотношения для вычисления напряжений и перемещений в тонком прямолинейном упругом стержне (тонкой упругой полоске), нагруженном по торцам равномерно-распределённой нагрузкой в направлении продольной оси стержня, построены.

## Результаты вычислений

Исходные данные для стального стержня:

- геометрические размеры стержня:  $a = 0,12$  м;  $b = 2,4$  м;
- модуль упругости материала стержня:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;
- коэффициент Пуассона:  $\mu = 0,3$ ;
- параметры нагрузки:  $q_0 = -5 \cdot 10^6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;  $p_0 = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ .

Параметры нагрузки подобраны так, чтобы нормальные напряжения  $\sigma_z$  не превышали расчётного сопротивления материала  $R_\sigma \cong 200$  МПа.

Решение задачи выполнено с использованием математического пакета MathCAD. Функция напряжений (1) принималась в виде ряда, содержащего семь слагаемых. Ниже представлены результаты вычислений.

На рисунке 2 показано распределения внешнего воздействия по торцам стержня.

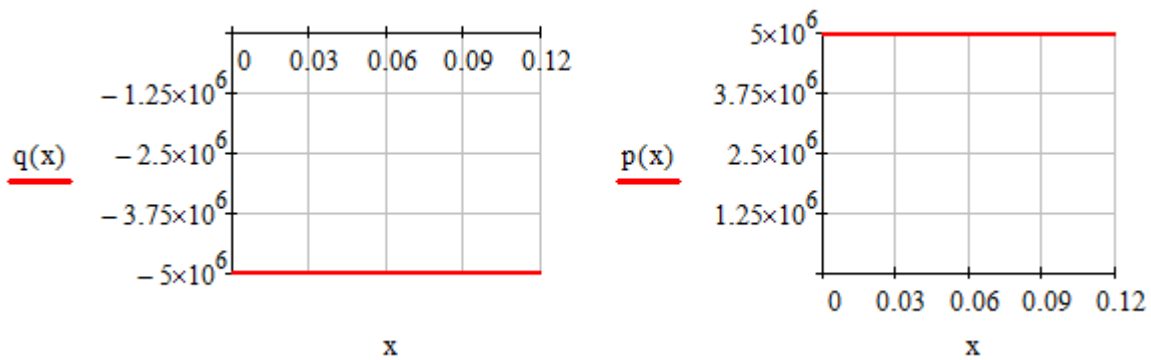


Рисунок 2 – Характер распределения внешнего давления по торцам стержня

Нормальные напряжения  $\sigma_x$  вдоль боковых сторон стержня при  $x = 0$  и  $x = a$  равны нулю. В вертикальных сечениях распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  у торцов стержня в небольшой зоне крайне неравномерное, затем монотонно убывающее до нуля в среднем поперечном сечении (рисунок 3).



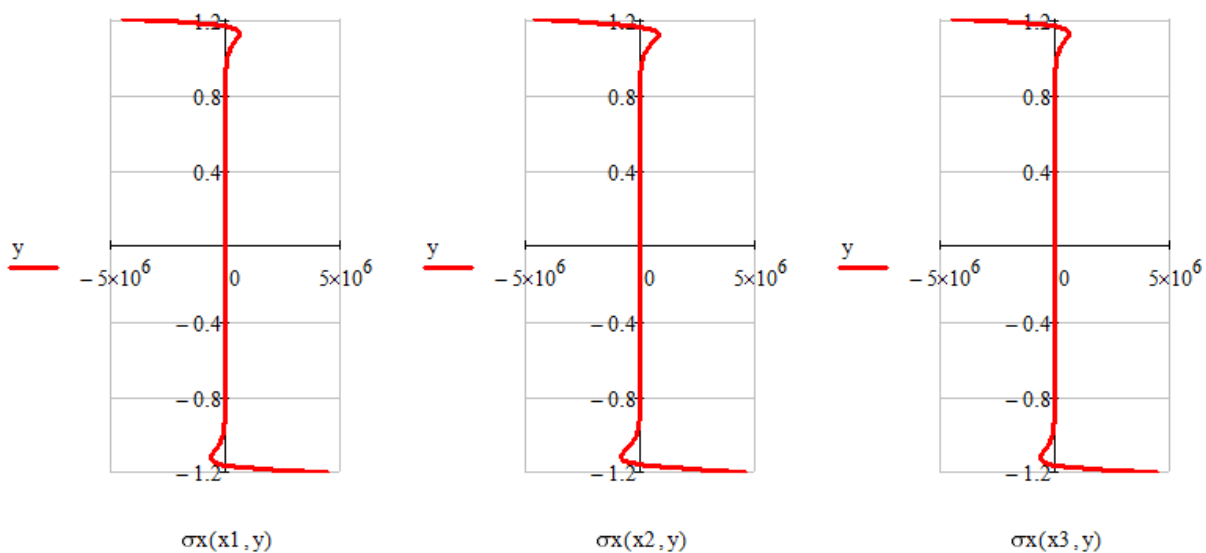
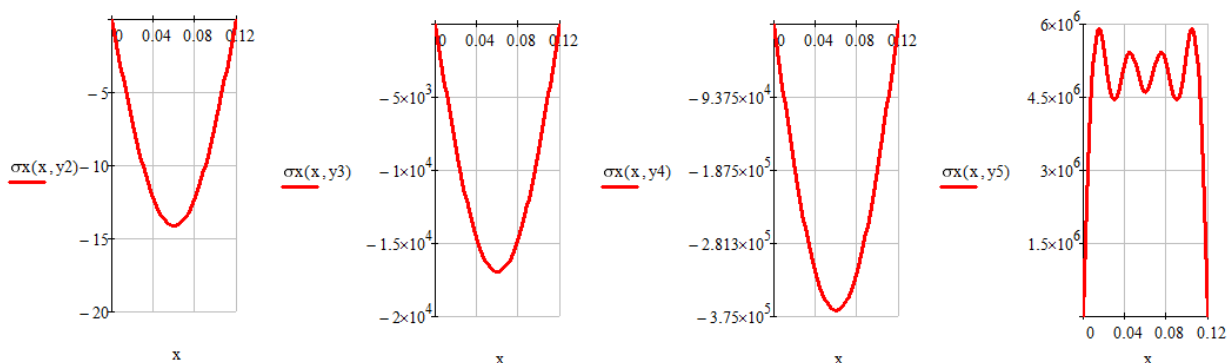


Рисунок 3 – Характер распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по длине стержня

На рисунке 3 обозначено:  $x_1 = \frac{a}{4}$ ;  $x_2 = \frac{a}{2}$ ;  $x_3 = \frac{3a}{4}$ .

Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$  по ширине сечения для верхней ( $y < 0$ ) и нижней ( $y > 0$ ) половин стержня показан на рисунке 4. Как следует из проведённых расчётов, нормальные напряжения  $\sigma_x$  изменяются по ширине сечения стержня по кривой, похожей на параболу второго порядка, причём интенсивность напряжений при удалении от средней линии стержня ( $y = 0$ ) монотонно возрастает.

$y < 0$



$y > 0$

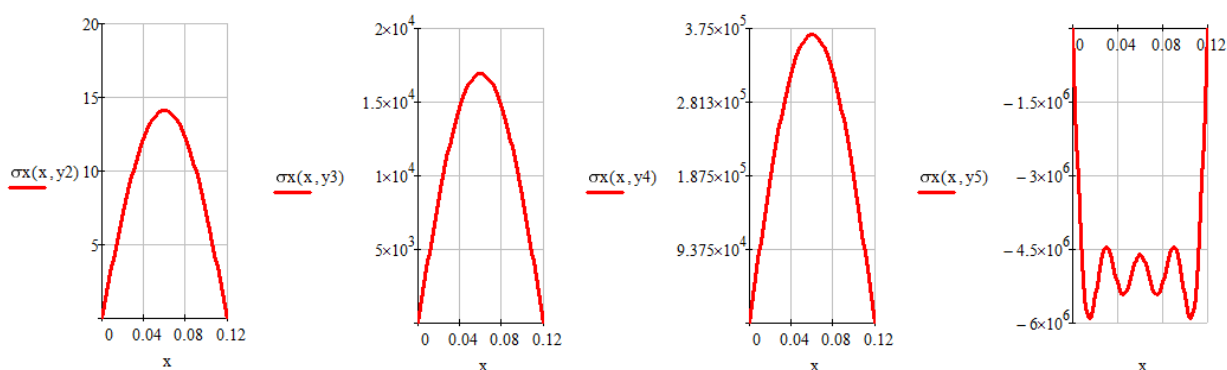


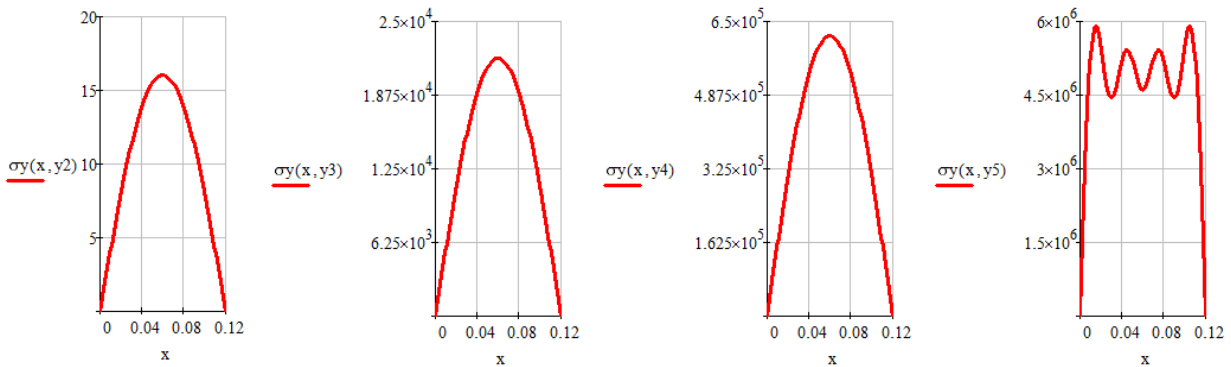
Рисунок 4 – Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$  по ширине сечения

На рисунке 4 обозначено:  $y_2 = \pm \frac{b}{4}$ ;  $y_3 = \pm \frac{3b}{8}$ ;  $y_4 = \pm \frac{7b}{16}$ ;  $y_5 = \pm \frac{b}{2}$ ,

причём знак «+» соответствует нижней половине, знак «-» – верхней половине стержня.

Нормальные напряжения  $\sigma_y$  распределяются как по высоте, так и по ширине сечения в области, примыкающей к торцам стержня, также крайне неравномерно. На боковых сторонах стержня при  $x = 0$  и  $x = a$ , а также на средней линии стержня при  $y = 0$  напряжения  $\sigma_y$  равны нулю. На рисунке 5 показано распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по ширине сечения на разных уровнях для верхней ( $y < 0$ ) и нижней ( $y > 0$ ) половинок стержня.

$y < 0$



$y > 0$

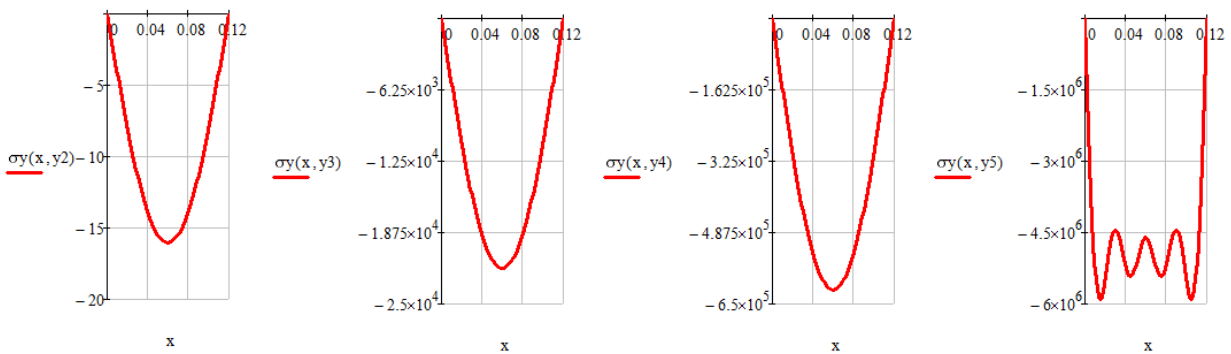


Рисунок 5 – Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_y$  по ширине сечения

На рисунке 5 обозначено:  $y_2 = \frac{b}{4}$ ;  $y_3 = \frac{3b}{8}$ ;  $y_4 = \frac{7b}{16}$ ;  $y_5 = \frac{b}{2}$ .

Из рисунка 5 следует, что нормальные напряжения  $\sigma_y$  изменяются по ширине сечения по кривой, похожей на параболу второго порядка. Интенсивность напряжений при удалении от средней линии стержня к его торцам напряжения увеличиваются по абсолютной величине.

Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_y$  по длине стержня для различных вертикальных сечений показан на рисунке 6.

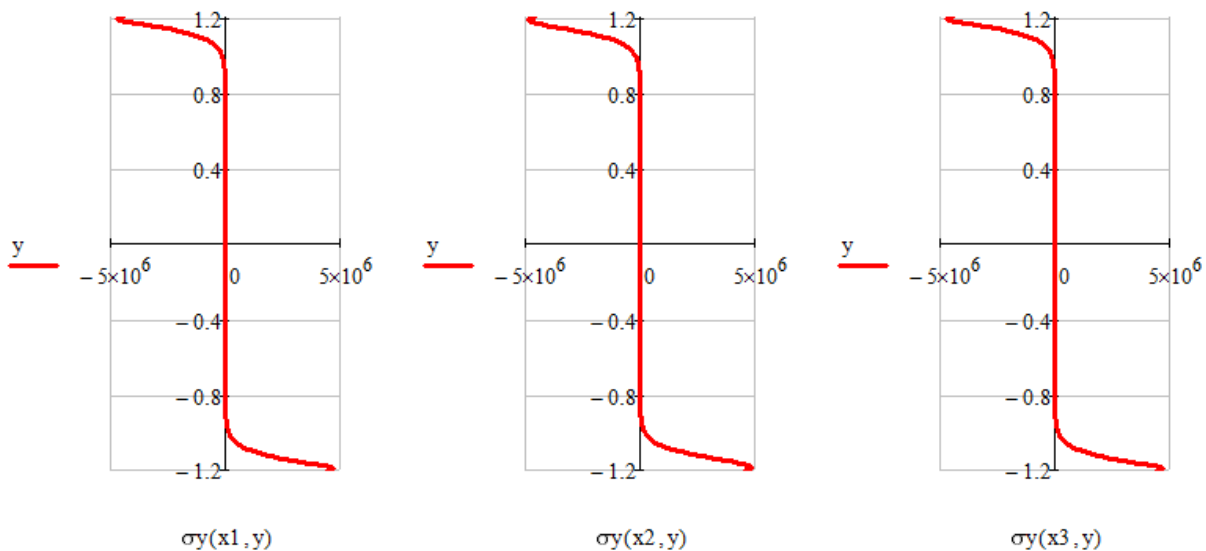


Рисунок 6 – Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_y$  по длине стержня

На рисунке 6 обозначено:  $x_1 = \frac{a}{4}$ ;  $x_2 = \frac{a}{2}$ ;  $x_3 = \frac{3a}{4}$ .

Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  изменяются вдоль высоты, в частности и вдоль боковых сторон (для  $x=0$  и  $x=a$ ) в области, примыкающей к торцам стержня, крайне неравномерно, изменяющееся от нуля в торцевых сечениях до максимального значения в сечениях, примыкающих к торцевым. На продольной оси стержня касательные напряжения  $\tau_{xy}$  равны нулю. На рисунке 7 представлено распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}$  вдоль длины стержня для различных вертикальных сечений.

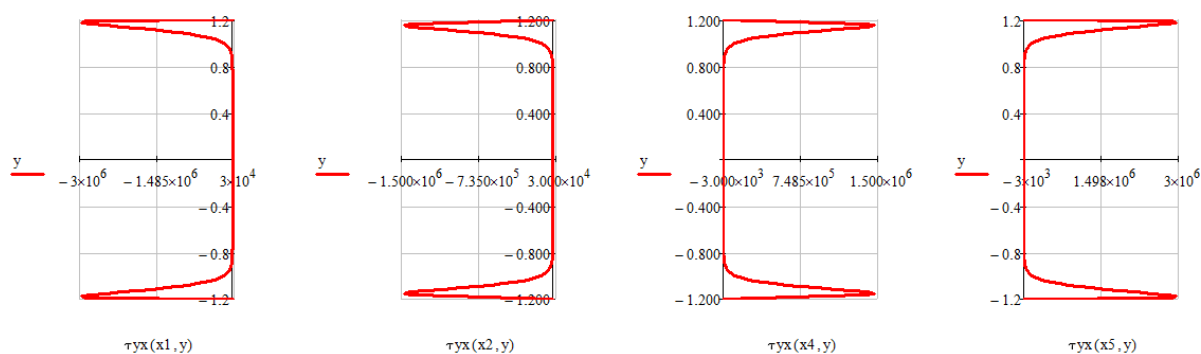


Рисунок 7 – Характер распределения касательных напряжений  $\tau_{xy}$  по длине стержня

На рисунке 7 обозначено:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{a}{4}$ ;  $x_4 = \frac{3a}{4}$ ;  $x_5 = a$ .

На рисунке 8 показан характер распределения касательных напряжений по ширине сечения стержня для различных уровней поперечных сечений.

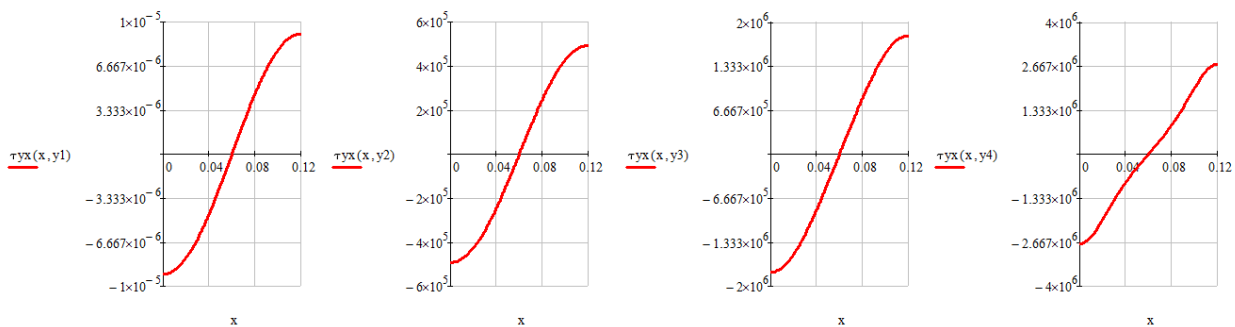


Рисунок 8 – Характер распределения касательных напряжений  $\tau_{xy}$  по ширине сечения

На рисунке 8 обозначено:  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = \frac{7b}{16}$ ;  $y_3 = \frac{15b}{32}$ ;  $y_4 = \frac{31b}{64}$ .

Вычисление перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  выполнялось по формулам (7).

На рисунке 9 показаны эпюры горизонтальных  $u(x, y)$  и вертикальных  $v(x, y)$  перемещений по длине стержня для различных вертикальных сечений. Следует отметить, что перемещения  $u(x, y)$  на продольной оси стержня ( $x = \frac{a}{2}$ ) равны нулю, а перемещения  $v(x, y)$  вдоль боковых сторон стержня ( $x = 0$  и  $x = a$ ) равны нулю. В среднем поперечном сечении стержня и поперечные перемещения  $u(x, y)$ , и продольные перемещения  $v(x, y)$  стремятся к нулю. В областях, примыкающих к торцам стержня, наблюдается крайне неравномерное распределение и продольных  $v(x, y)$ , и поперечных  $u(x, y)$  перемещений.

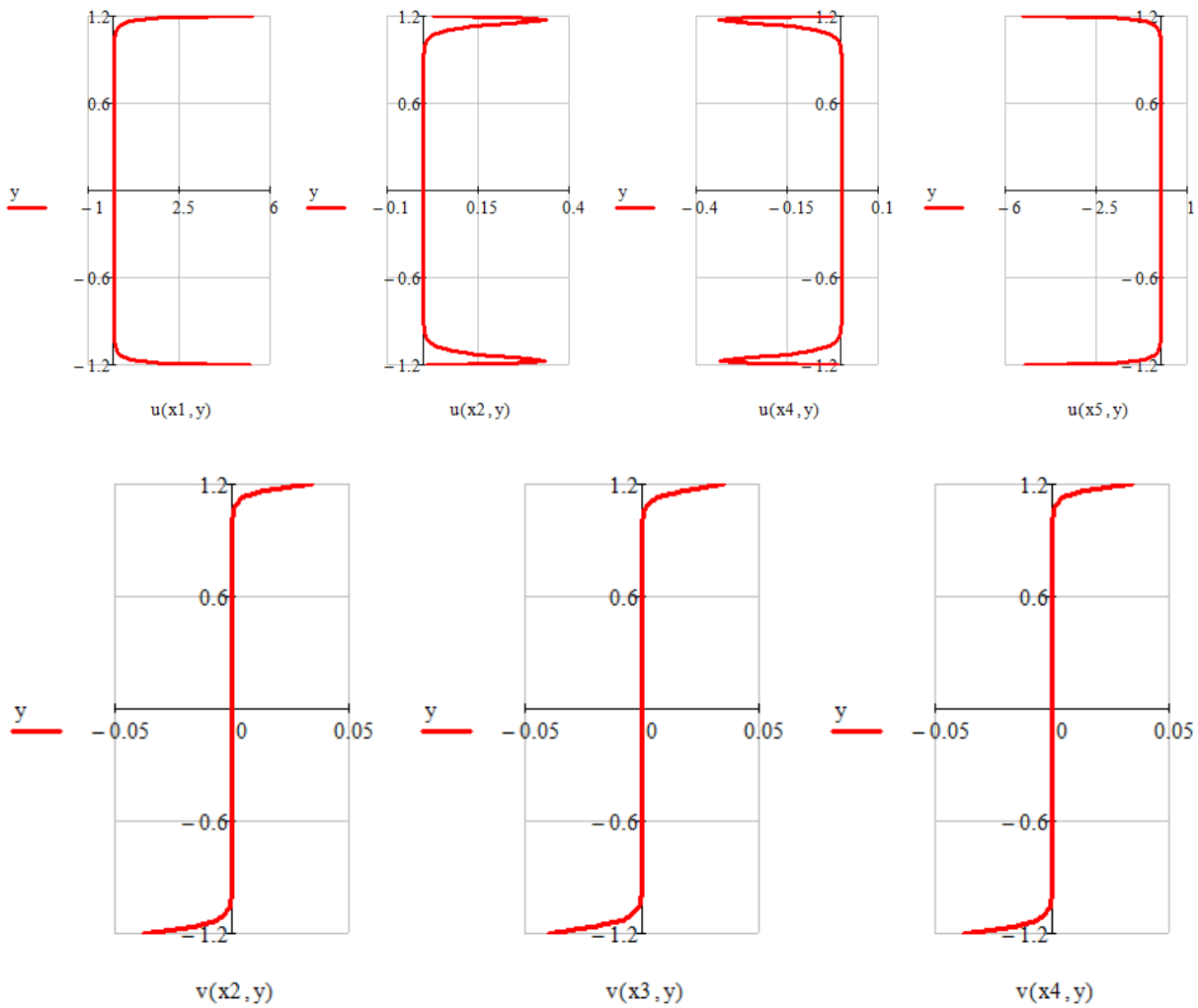


Рисунок 9 – Характер распределения перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  по длине стержня

На рисунке 9 обозначено:

- на эпюрах перемещений  $u(x, y)$ :  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{a}{4}$ ;  $x_4 = \frac{3a}{4}$ ;  $x_5 = a$ ;
- на эпюрах перемещений  $v(x, y)$ :  $x_2 = \frac{a}{4}$ ;  $x_3 = \frac{a}{2}$ ;  $x_4 = \frac{3a}{4}$ .

На рисунке 10 показан характер распределения перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  по ширине поперечного сечения стержня для различных значений вертикальной координаты  $y$ . Расчёты показывают, что продольные перемещения  $v(x, y)$  изменяются по ширине поперечного сечения стержня по кривой, похожей на параболу второго порядка. Величина продольных перемещений увеличивается при удалении от средней линии ( $y = 0$ ) стержня.

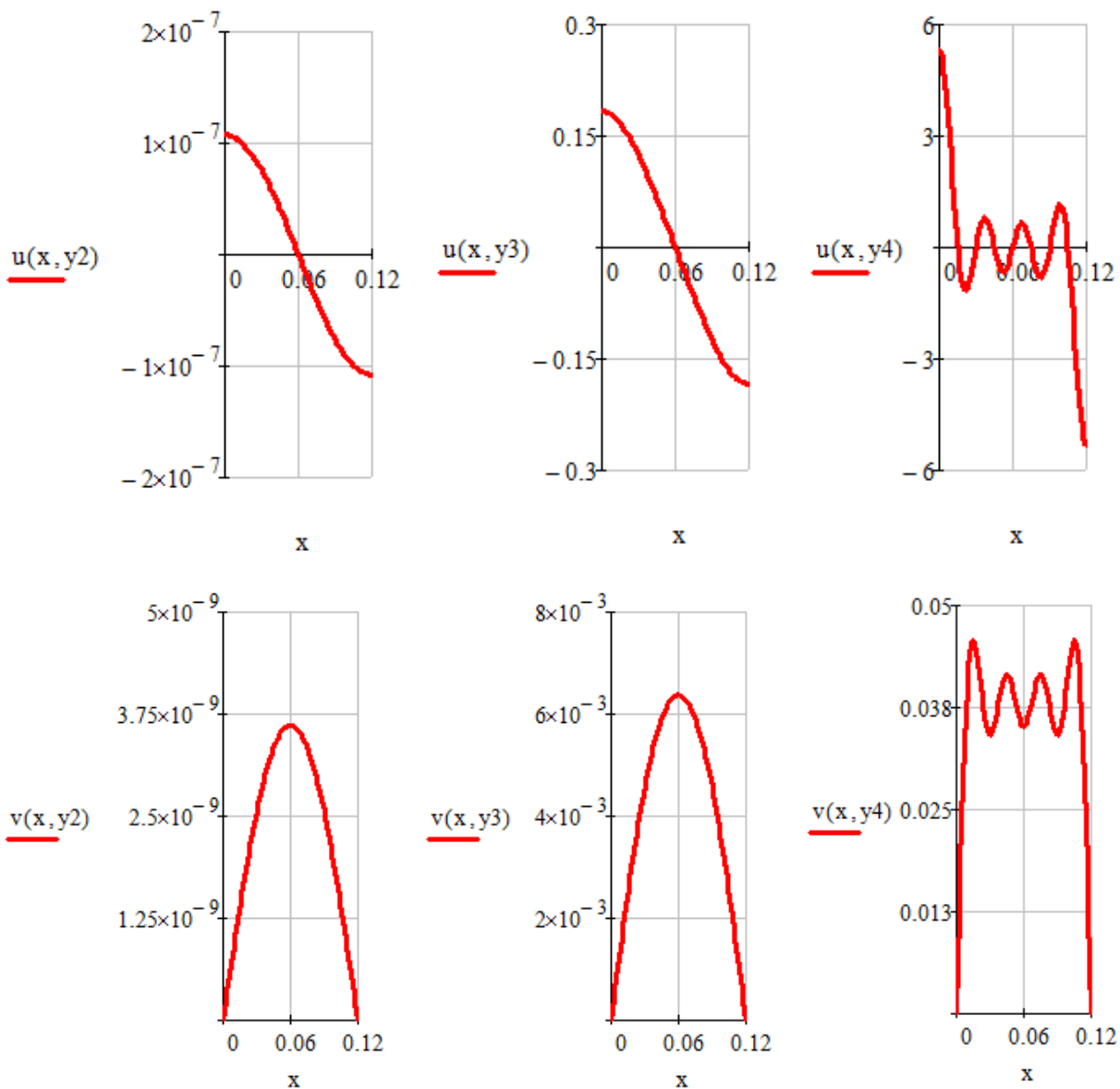


Рисунок 10 – Характер распределения перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  по ширине поперечного сечения стержня

На рисунке 10 обозначено:  $y_2 = \frac{b}{4}$ ;  $y_3 = \frac{15b}{32}$ ;  $y_4 = \frac{b}{2}$ .

## **Выводы**

1. Результаты выполненных исследований показывают, что использование тригонометрических рядов для оценки напряжений и перемещений в тонких упругих стержнях (тонкой упругой полоске) при задании внешней нагрузки в виде равномерно-распределённой по торцам нагрузки является приемлемым для участков стержня несколько удалённых от его торцов. В сечениях, примыкающих к торцам стержня (тонкой упругой полоске) характер распределения и напряжений, и перемещений существенно искажается и становится крайне неравномерным.

2. Нормальные напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных к продольной оси стержня не остаются постоянными ни по длине стержня, ни по ширине его поперечного сечения. Это обстоятельство противоречит классической теории растяжения тонких упругих стержней.

3. Вдоль боковых сторон стержня, свободных от внешней нагрузки, возникают касательные напряжения, интенсивность которых одного порядка с касательными напряжениями, возникающими на площадках внутри стержня. Это обстоятельство согласуется с теорией расчёта конструкций при помощи тригонометрических рядов Фурье.

## **Библиографический список:**

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер с англ. / Под ред. Г.С. Шапиро. 2-е изд. М.: Наука, 1979, 560 с.

2. Бакушев С.В., Быкова Е.А. Расчет стержня на осевое растяжение сосредоточенной силой при помощи тригонометрических рядов [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №4. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no4/stroitel'naya-mehanika/4.7/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no4/stroitel'naya-mehanika/4.7/at_download/file)



3. Бакушев С.В., Быкова Е.А. Расчет стержня на осевое растяжение двумя сосредоточенными силами при помощи тригонометрических рядов [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no5/stroitel'naya-mehanika/5.5/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no5/stroitel'naya-mehanika/5.5/at_download/file)

4. Бакушев С.В. Теория упругости. Краткий практический курс. Пенза: ПГУАС, 2016. 256 с.

5. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. Изд. 3-е. М.: Высшая школа, 2003. 560 с.