УДК 624.04

РАСЧЁТ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ В АВТОМАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

Монахов Владимир Андреевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Мартышкин Даниил Олегович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Аннотация

Приводится алгоритм расчёта стержневой системы на устойчивость на основе модели расщеплённого стержня. Изгибные деформации модели отражаются непрерывной упругой ветвью, а деформации сжатия – многозвенной шарнирной цепью, которой «окована» упругая ветвь. Решение задачи заключается в определении наибольшего собственного числа матрицы критического состояния или потери устойчивости стержневой системы, подвергнутой дискретизации. Процедура формирования матрицы устойчивости состоит из построения и последующего перемножения двух матриц: матрицы податливости упругой ветви и матрицы равновесия шарнирной цепи, которые осуществляются в автоматическом режиме.

Ключевые слова: стержневая система, граф рамы, геометрическая матрица, матрица податливости, вектор перемещений, деформации изгиба, растяжения, матрица критического состояния.

THE CALCULATION OF THE FRAMED STRUCTURE STABILITY IN AUTOMATIC MODE

Monakhov Vladimir Andreevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".
Martishkin Daniil Olegovich,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Student.

Abstract

The algorithm of calculation of the framed structure stability of model-based split rod. The Flexural deformation of the model are reflected continuous elastic bough, and strain of compression - multi-link articulated chain, where "bound" elastic bough. The solution to the problem is to determine the largest eigenvalues of the matrix of critical condition or buckling rod system subjected to sampling. The procedure of formation of the matrix of sustainability consists of the construction and the subsequent multiplication of the two matrices: matrix of elastic compliance bough, and the matrix of equilibrium articulated chains, which are carried out in automatic mode.

Keywords: core system, count frames, geometric matrix, flexibility matrix, the vector of displacement, deformation strain, bending, stretching, the matrix of critical condition.

В качестве модели упругой стержневой системы при расчёте на устойчивость Г-образной рамы используется двухветвенная стержневая система, разделённая на четыре элемента (рисунок 1). Представленная в статье методика расчёта на основе данной модели позволяет избежать использования классических методов строительной механики, являясь по существу альтернативой последним. Ключом предлагаемого метода расчёта стержневых систем на устойчивость служит формирование геометрической матрицы в матричной форме [1].

Алгоритм построения геометрической матрицы состоит в следующем. На расчётной схеме рамы осуществляется дискретизация стержневой системы:

намечаются расчётные сечения (узлы) и элементы (отрезки стержней конечной длины); на рисунке первые обозначены арабскими цифрами $(i = 1, 2, ..., 5)$, вторые – римскими (j = I, II,…, IV). В соответствии с алгоритмом формирования геометрической матрицы вводятся локальные системы координат $x_j O_j y_j$ $(j = 1, 2, ..., 5)$, оси абсцисс которых совмещается с осями элементов.

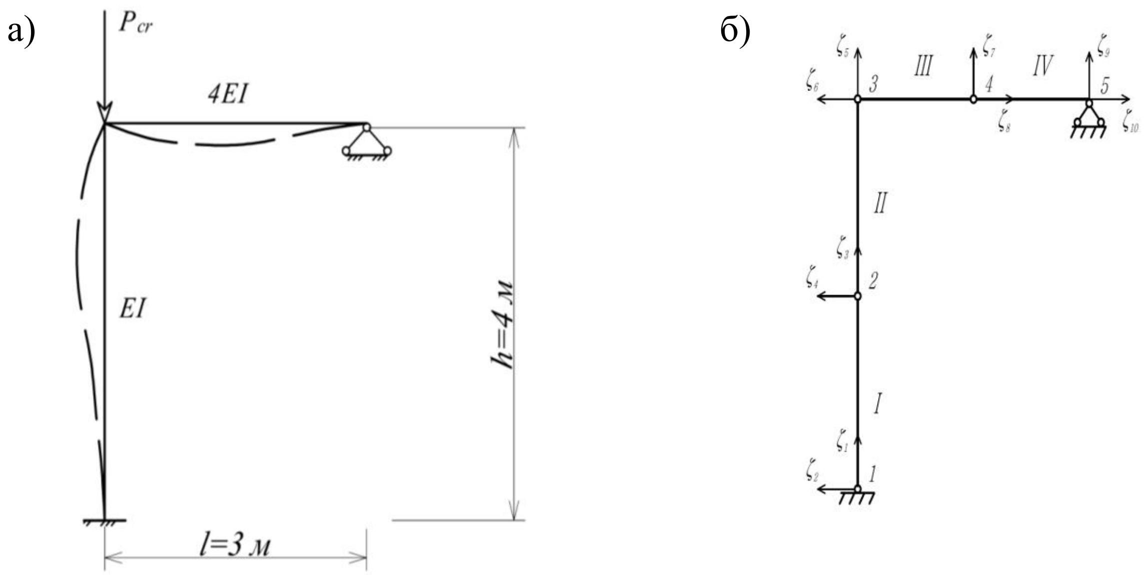

Рисунок 1 – Расчётная схема рамы и её модель

В дальнейшем необходимо построить граф дискретной схемы рамы (рисунок 2а) и составить матрицу инцидентности графа [2].

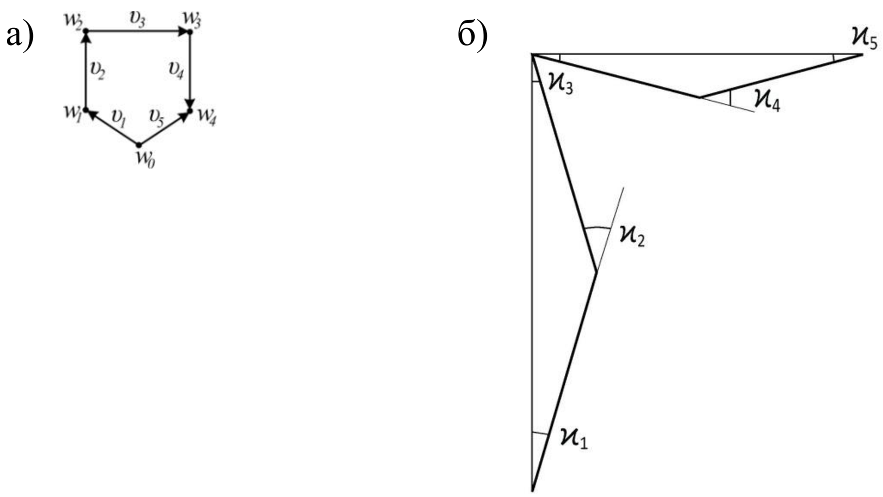

Рисунок 2 – Граф модели и схема деформаций

Матрица инцидентности, сопутствующая данному графу, имеет простейшую структуру, т. е.

$$[S]=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формирование геометрической матрицы $[\Gamma]$ осуществляется в несколько этапов. Во-первых, сначала находят вектор *приращений перемещений* $\bar{\gamma}$ в зависимости от перемещений узловых точек в глобальной системе координат $\bar{\gamma}=[\Gamma]\bar{\zeta}$. Здесь вектор $\bar{\gamma}=(\lambda_1,\chi_1,...,\lambda_4,\chi_4)$ представлен своими компонентами: абсолютными удлинениями участков – λ_i $(i=1,...,4)$ и их перекосами – χ_i $(i=1,...,4)$, число которых соответствует количеству участков, полученных при дискретизации*. Матрица $[\Gamma]$ является композицией двух последовательных преобразований. Одно из них, $\bar{Z}=[\phi]\bar{\zeta}$, позволяет перейти от записи узловых перемещений $\bar{\zeta}$, заданных в глобальной системе, к перемещениям узлов, принятым в локальных системах. Локальные системы координат привязаны к отдельным звеньям в соответствии с рисунком 2,б.

Матрица рассматриваемого преобразования обладает квазидиагональной структурой:

* Перекосом стержня называется взаимное смещение концов стержня в направлении, перпендикулярном оси стержня.

$$
[\varphi]_{(12\times 10)} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & \\
-1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & 0 & & \\
 & & -1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & -1 & 0 & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array},
$$

состоящей из блок-матриц поворота векторов перемещений отдельных звеньев,

$$
[\varphi_i] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ 0 & 0 & -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix} \quad (i = 1,\ldots,4)\ .
$$

В частности, блок вида

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

характеризует преобразование векторов перемещений двух смежных узлов отдельного участка стойки рамы при повороте на угол $\varphi = 90^\circ$ против хода часовой стрелки. Для рассматриваемой модели рамы число таких блоков равно четырём.

Другое преобразование, совершаемое на следующем этапе, связано с определением *приращений перемещений* $\bar{\gamma}$ в расчётных сечениях стержневой системы непосредственно от перемещений, описанных в локальных координатах, т.е. $\bar{\gamma} = \left[\tilde{S}\right] \bar{Z}$. Данная процедура выполняется с помощью *расширенной* матрицы инцидентности (ср. со стандартной матрицей $\left[S\right]$):

$$\left[\tilde{S}\right]_{(8\times 12)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & & & & & 0 & & \\ & & & -1 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & -1 & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & & & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & & -1 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Результатом обоих преобразований, очевидно, является матрица $\left[\Gamma\right] = \left[\tilde{S}\right] \left[\phi\right]$. В рассматриваемом примере её структура такова

$$\left[\Gamma\right]_{(8\times 10)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее матрица $\left[\Gamma\right]$ подлежит корректировке с целью учёта граничных условий и других особенностей расчётной схемы рамы. Если, к примеру, при расчёте рамы пренебрегают продольными деформациями стержней, то в матрице избавляются от нечётных строк. Кроме того, в данном примере следует опустить первый, второй, четвёртый, седьмой, девятый и десятый столбцы, поскольку перемещения опор отсутствуют и стержни (в местах стыков элементов непрерывны. В итоге приходят к матрице

$$\left[G\right]_{(4\times 4)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

с помощью которой вычисляют только *перекосы* звеньев цепи $\bar{\chi} = \left[G\right] \bar{\zeta}$. В этой формуле компонентами вектора $\bar{\zeta}$ служат перемещения точек стыков элементов в направлениях, перпендикулярных их осям, а также перемещения узла рамы. В аналитической записи последняя формула представлена равенствами:

$$\chi_1 = -\zeta_3, \qquad \chi_2 = \zeta_3 - \zeta_5, \qquad \chi_3 = \zeta_8 - \zeta_6, \qquad \chi_4 = -\zeta_8.$$

Очевидно, при отсутствии продольных деформаций стержней, перемещения узла рамы невозможны. Следовательно, компоненты перемещения узла как по вертикали, так и по горизонтали равны нулю ($\zeta_5 = \zeta_6 = 0$) и тогда перекосы участков, равные $\chi_1 = -\zeta_3$, $\chi_2 = \zeta_3$, $\chi_3 = \zeta_8$, $\chi_4 = -\zeta_8$, характеризуют перемещениями стыков элементов. И это вполне очевидный факт. Умножение матрицы инцидентности на вектор перекосов, компоненты которого отнесены к длинам соответствующих звеньев, приводит к вектору сосредоточенных изгибных деформаций $\bar{\bar{\varkappa}} = (\varkappa_1\, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4, \varkappa_5)$ в узлах рамы*

$$\bar{\bar{\varkappa}} = [S]^T\,[L]^{-1}\,\bar{\chi}.$$

А поскольку перекосы связаны с глобальными координатами преобразованием $[G]$, то геометрическая матрица, которая даёт возможность установить *сосредоточенные деформации изгиба* рамы в расчётных сечениях согласно

$$\bar{\bar{\varkappa}} = [H]\,\bar{\zeta}\,,$$

определяется по формуле

$$[H] = [S]^T\,[L]^{-1}[G]\,.$$

Выполнив умножение, легко установить структуру геометрической матрицы [3]

$$[H] = \begin{bmatrix} -2/h & 0 \\ 4/h & 0 \\ -2/h & 2/l \\ 0 & -4/l \\ 0 & 2/l \end{bmatrix}.$$

---

* Компоненты вектора изгибных деформаций, сосредоточенных в узлах, показаны на рис. 2,б.

Следует подчеркнуть, что матрица длин звеньев $[L]$, как, впрочем, и матрица направляющих косинусов $[C]$, также может быть получена на основе матрицы инцидентности [3]

$$[L]=\begin{bmatrix} h/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l/2 \end{bmatrix}, \qquad [C]=\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_4 \end{bmatrix},$$

где h, l – высота и пролёт рамы, φ_i (i =1,…,4) – углы наклона элементов в глобальной системе координат.

Предварительно определив матрицу единичных усилий в расчётных сечениях рамы при $\zeta_3 = 1,\ \zeta_6 = 1$

$$[T]=[r][H]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12{,}66 & -5{,}33 & 0 \\ 0 & 0 & -5{,}33 & 18{,}66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2/h & 0 \\ 4/h & 0 \\ -2/h & 2/l \\ 0 & -4/l \\ 0 & 2/l \end{bmatrix} EI = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0{,}67 \\ -7{,}33 & 15{,}55 \\ 2{,}67 & -28{,}39 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EI,$$

где $[r]$ – матрица внутренней жёсткости, и умножив её затем на матрицу равновесия $[V]=[H]^T$, находят матрицу (внешней) жёсткости рамы, составленной из четырёх элементов

$$[R]=\begin{bmatrix} -2/h & 4/h & -2/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l & 4/l & -2/l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0{,}67 \\ -7{,}33 & -15{,}55 \\ 2{,}67 & 28{,}39 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EI = \begin{bmatrix} 9{,}67 & 8{,}44 \\ 8{,}44 & 60{,}12 \end{bmatrix} EI\,.$$

Путём её обращения переходят к матрице податливости

$$[\Delta]=[R]^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}1225 & -0{,}0213 \\ -0{,}0213 & 0{,}0213 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{EI}.$$

Наряду с матрицей податливости в расчёте на устойчивость используется матрица равновесия $[N]$ шарнирной ветви рамы. При её формировании следует обратиться к расчету Г-образной рамы на прочность и найти соотношение между продольными силами в стойке N_1 и в ригеле N_2; оно составляет $\frac{N_1}{N_2}=\frac{1}{0,07}$. Принимая к сведению существенную разницу значений продольных сил ригеля и стойки, достаточно ограничиться учётом сжимающих сил лишь в стойке. Порядок матрицы $[N]$ равен степени дискретизации сжатого участка рамы. В рассматриваемом примере сжатый стержень разделен на две части. Таким образом, интересующая нас матрица будет второго порядка.

Структура матрицы равновесия шарнирной ветви с учётом указанного соотношения между продольными силами имеет вид

$$[N] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{d}.$$

Далее легко вычислить матрицу критического состояния рамы

$$[A] = [\Delta][N] = \begin{bmatrix} 0{,}1225 & -0{,}0213 \\ -0{,}0213 & 0{,}0213 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{l^2}{EI} = \begin{bmatrix} 0{,}2663 & -0{,}1651 \\ -0{,}0639 & 0{,}0639 \end{bmatrix} \frac{l^2}{EI}$$

и вектор собственных чисел $\overline{\omega}$ данной матрицы $\overline{\omega} = (0{,}309; \quad 0{,}011)$ [4]. При $\omega_{макс} = 0{,}309$ критическая сила принимает значение $P = \dfrac{3{,}23EI}{l^2}$.

Вывод. Предложенная методика расчёта стержневой системы на устойчивость с использованием матрицы критического состояния, формируемой в автоматическом режиме на основе матриц податливости упругой ветви и равновесия параллельной ей шарнирной цепи, позволяет определить в матричной форме критическую нагрузку рамы.

Библиографический список:

1. Монахов В.А. Дискретная механика стержневых систем [Текст]. Пенза: ПГУАС, 2017. 412с.
2. Зубов В.С. Справочник программиста. Базовые методы решения графовых задач и сортировки [Текст]. М.: Изд. дом «Филинъ», 1999. 256 с.
3. Ржаницын А.Р. Строительная механика [Текст]. М.: Высшая школа, 1982. 400 с.
4. Расчёт сооружений с применением вычислительных машин [Текст] / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Н.Н. Шапошников, Б.Я. Лащенников. М.: Стройиздат, 1964. 380 с.