УДК 624.041

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННОГО Z-ОБРАЗНОГО СТЕРЖНЯ С ОТБОРТОВКОЙ И С ЗАКРУГЛЕНИЕМ

Волков Владимир Павлович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Кустова Ольга Владимировна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

аспирант.

Аннотация

Статья посвящена определению геометрических характеристик гнутого тонкостенного стержня Z-образного профиля с отбортовкой и с закруглением при расчете его на растяжение и изгиб с кручением. Приведены расчетные формулы для определения относительных значений длины контура, главных осевых моментов инерции и главных осевых моментов сопротивления, главных секториальных координат.

Ключевые слова: гнутый тонкостенный стержень, Z-образный профиль, главные центральные оси сечения, главные осевые моменты инерции, главные осевые моменты сопротивления, главные секториальные координаты.

GEOMETRIC CHARACTERITICS THIN-WALLED Z-SHAPED ROD WITH EDGE AND WITH ANY CURVING

Volkov Vladimir Pavlovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department «Mechanics».

Kustova Olga Vladimirovna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Postgraduate.

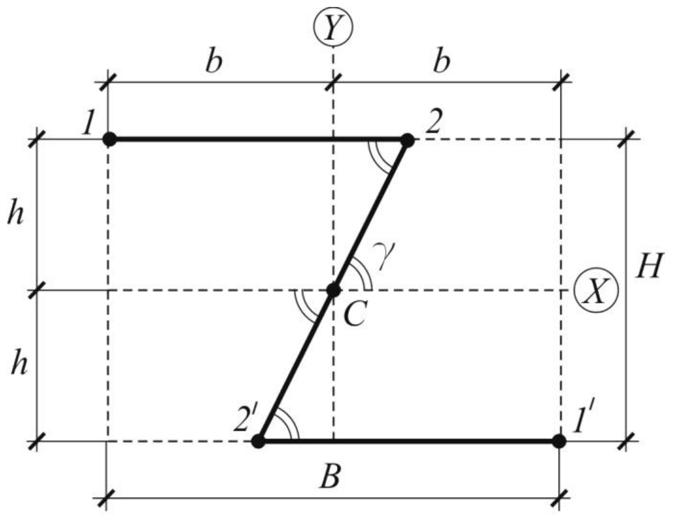
Abstract

Article is devoted to definition of the geometric characteristics of a buckler thin-walled rod Z-shaped profile with edge and with any curving for calculation this on tension, curve, turn. To deduce a formula of calculation dimensions length of contours, main axes moments of inertia and main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Keywords: buckler thin-walled rod, Z-shaped profile, the main central axes section, main axes moments of inertia, main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Условные обозначения: XY – главные центральные оси сечения; $B=2b$ – габаритная ширина профиля сечения; $H=2h$ – габаритная высота срединной линии профиля сечения; L – полная длина срединной линии профиля сечения.

Относительные геометрические размеры тонкостенного Z-образного сечения постоянной толщины δ без учета закругления и без отбортовки (рисунок 1) определяются из [1]



$$0 < \gamma < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{B}{H} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{\cos^2\gamma}{1-\cos^2\gamma}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3\cos\gamma}\right)};$$

$$\frac{L}{H} \Rightarrow \frac{B}{H} + \frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Рисунок 1 – Z-образное сечение без закругления

Задача определения геометрических размеров гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения постоянной толщины δ с учетом закругления r, но без отбортовки, (рисунок 2) рассмотрена в [2], [3].

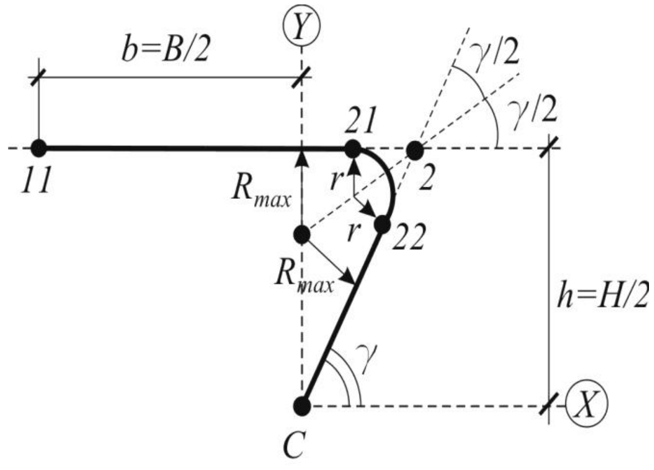
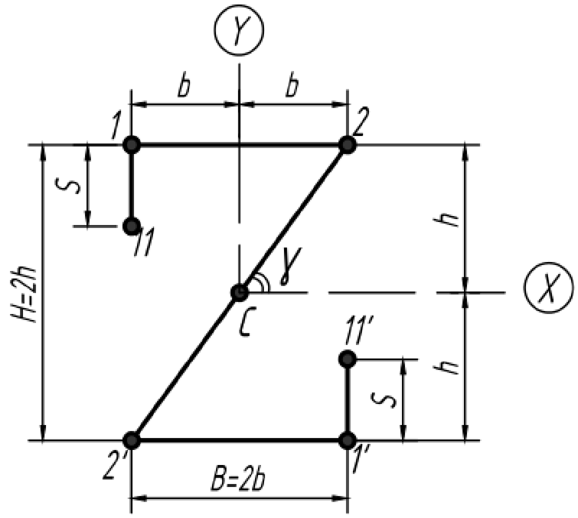


Рисунок 2 – Верхняя половина Z-образного сечения с закруглением

Задача определения геометрических размеров гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения постоянной толщины δ с отбортовкой s, но без закругления (рисунок 3) рассмотрена в [4]:



$$0 < s \leq h,$$

$$\frac{s}{h} = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3 \cdot \sin\gamma}}\right),$$

где $\sin\gamma \geq \frac{2}{3},\ т.е.$

$$\frac{H}{B} \geq \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89443.$$

Рисунок 3 – Z-образное сечение с отбортовкой

Рассмотрим задачу определения геометрических размеров гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения постоянной толщины δ с отбортовкой s и закруглением r (рисунок 4):

Дано: B, H $\left(где\ 0{,}73 \leq\ \gamma < \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57\right)$ $и\ r$ Найти: s.

$$0 < r < R_{max} \Rightarrow \frac{H}{2} \cdot \frac{\tan\left({}^{\gamma}/_{2}\right)}{\tan\gamma}, \qquad 0 < s < 2 \cdot R_{max}\,.$$

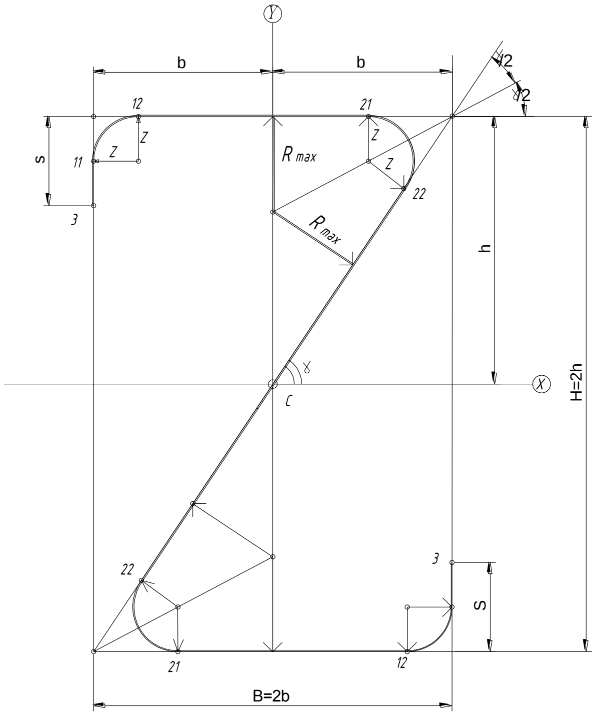


Рисунок 4 – Z-образное сечение с отбортовкой и с закруглением

Учитывая центральную симметрию, рассмотрим верхнюю половину сечения. Декартовые координаты x, y характерных точек и длины соответствующих участков l (рисунок 4):

$x_{12} = -b + r;$ $\quad y_{12} = h;$ $\quad l_{12} = b - r;$

$x_{11} = -b;$ $\quad y_{11} = h - r;$ $\quad l_{11} = r \cdot \frac{\pi}{2};$

$x_{3} = -b;$ $\quad y_{3} = h - s;$ $\quad l_{3} = s - r;$

$x_{21} = \frac{h}{\tan\gamma} - \frac{r}{\tan\left({}^{\gamma}/_{2}\right)};$ $\quad y_{21} = h;$ $\quad l_{21} = x_{21};$

$x_{22} = \frac{h}{\tan\gamma} - \frac{r\cdot\cos\gamma}{\tan\left({}^{\gamma}/_{2}\right)};$ $\quad y_{22} = h - \frac{r\cdot\sin\gamma}{\tan\left({}^{\gamma}/_{2}\right)};$ $\quad l_{22} = r \cdot (\pi - \gamma);$

$x_{C} = 0;$ $\quad y_{C} = 0;$ $\quad l_{C} = \frac{h}{\sin\gamma} - \frac{r}{\tan\left({}^{\gamma}/_{2}\right)}.$

Центральные оси XY (рисунок 4) являются главными [5], если

$$I_{XY} = \int_{L/_{2}} \delta(s) \cdot x(s) \cdot y(s) \cdot ds \Rightarrow 0,$$

$$(s-r)\cdot b\cdot\left(h-\frac{s+r}{2}\right)+\frac{(b-r)^2\cdot h}{2}+$$

$$+\frac{r^3}{2}+(h-r+b-r)\cdot r^2+(h-r)\cdot(b-r)\cdot r\cdot\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{l_C\cdot x_{22}\cdot y_{22}}{3}+\frac{l_{21}^2\cdot h}{2}+$$

$$+r\cdot\left[\left(x_{21}\cdot(\pi-\gamma)+r\cdot(1+\cos\gamma)\right)\cdot(h-r)+\left(x_{21}+\frac{r\cdot\sin\gamma}{2}\right)\cdot r\cdot\sin\gamma\right].$$

Введем обозначения для относительных величин:

$$\varepsilon=\frac{r}{R_{max}},\qquad 0<\varepsilon\le 1;$$

$$\psi=\frac{b}{h}\Rightarrow\frac{1}{\tan\gamma};\qquad r_h=\frac{r}{h}\Rightarrow\varepsilon\cdot\psi\cdot\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right);$$

$$x_{21}^h=\frac{x_{21}}{h}\Rightarrow(1-\varepsilon)\cdot\psi;\qquad y_{22}^h=\frac{y_{22}}{h}\Rightarrow 1-\varepsilon\cdot\cos\gamma;$$

$$l_C^h=\frac{l_C}{h}\Rightarrow\frac{y_{22}^h}{\sin\gamma};\qquad x_{22}^h=\frac{x_{22}}{h}\Rightarrow y_{22}^h\cdot\psi.$$

$$s_h=\frac{s}{h},\ \textit{где}\qquad r_h<s_h<\frac{2\cdot\tan\left({}^{\gamma}/_{2}\right)}{\tan\gamma};\qquad \beta=\pi-\gamma.$$

Тогда, задаваясь относительными значениями $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ для тонкостенного Z-образного сечения постоянной толщины δ с учетом закругления и отбортовки относительно главных центральных осей XY (рисунок 4) относительные значения $\boldsymbol{s_h}$ определяются из решения квадратного уравнения:

$$(\boldsymbol{s_h}-r_h)\cdot\frac{\psi}{2}\cdot(2-\boldsymbol{s_h}-r_h)+\frac{(\psi-r_h)^2}{2}+$$

$$+r_h\cdot\left(\frac{{r_h}^2}{2}+(1+\psi-2\cdot r_h)\cdot r_h+(1-r_h)\cdot(\psi-r_h)\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\frac{l_C^h\cdot x_{22}^h\cdot y_{22}^h}{3}-\frac{x_{21}^h\cdot x_{21}^h}{2}-\qquad(1)$$

$$-r_h\cdot\left[\left(x_{21}^h\cdot\beta+r_h\cdot(1+\cos\gamma)\right)\cdot(1-r_h)+\left(x_{21}^h+\frac{r_h\cdot\sin\gamma}{2}\right)\cdot r_h\cdot\cdot\sin\gamma\right]=0.$$

Относительная длина контура гнутого Z-образного профиля:

$$\frac{L}{H}=\frac{{}^{L}/_{2}}{h}\Rightarrow s_h+r_h\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\pi-2-\gamma\right)+\psi+x_{21}^h+l_C^h,\qquad(2)$$

где ${}^{L}/_{2}=s-r+r\cdot\frac{\pi}{2}+b-r+x_{21}+r\cdot(\pi-\gamma)+l_C.$

Главные осевые моменты инерции определяются по формулам:

$$I_X=\int_A y^2(s)\cdot dA\Rightarrow 2\cdot\delta\cdot\int_{{}^{L}/_{2}}y^2(s)\cdot ds\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\delta\cdot\left\{\frac{(s-r)^3}{12}+(s-r)\cdot\left(h-\frac{s+r}{2}\right)^2+r^3\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot(h-r)\cdot r^2+(h-r)^2\cdot r\cdot\frac{\pi}{2}+\right.$$

$$\left.(b-r+x_{21})\cdot h^2+\frac{1}{3}\cdot l_C\cdot y_{22}^2++\int_0^\beta\left(h-r\cdot(1-\cos\alpha)\right)^2\cdot r\cdot d\alpha\right\},$$

$$I_x\cdot\frac{1}{2\cdot\delta\cdot h^3}\Rightarrow\frac{(s_h-r_h)^3}{12}+(s_h-r_h)\cdot\left(1-\frac{s_h+r_h}{2}\right)^2+{r_h}^3\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot(1-r_h)\cdot{r_h}^2+$$

$$+(1-r_h)^2\cdot r_h\cdot\frac{\pi}{2}+\left(\psi-r_h+\ x_{21}^h\right)+\frac{1}{3}\cdot l_C^h\cdot\left(y_{22}^h\right)^2+$$

$$+r_h\cdot\left[(1-r_h)^2\cdot\beta+\ 2\cdot(1-r_h)\cdot r_h\cdot\sin\beta+{r_h}^2\cdot\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\sin 2\beta}{4}\right)\right];\quad(3)$$

$$I_Y=\int_A\ x^2(s)\cdot dA\Rightarrow 2\cdot\delta\cdot\int_{L/_2}x^2(s)\cdot ds\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\delta\cdot\left\{\frac{(b-r)^3}{3}+\frac{(x_{21})^3}{3}+\frac{l_C\cdot(x_{22})^2}{3}+r^3\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot(b-r)\cdot r^2+(b-r)^2\cdot r\cdot\frac{\pi}{2}+\right.$$

$$\left.+(s-r)\cdot b^2+\int_0^\beta(x_{21}+r\cdot\sin\alpha)^2\cdot r\cdot d\alpha\right\},$$

$$I_y\cdot\frac{1}{2\cdot\delta\cdot h^3}\Rightarrow\frac{(\psi-r_h)^3}{3}+\frac{\left(\ x_{21}^h\right)^3}{3}+\frac{l_C^h\cdot\left(\ x_{22}^h\right)^2}{3}+{r_h}^3\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot(\psi-r_h)\cdot{r_h}^2+$$

$$+(\psi-r_h)^2\cdot r_h\cdot\frac{\pi}{2}+(s_h-r_h)\cdot\psi^2+$$

$$+r_h\cdot\left[\left(\ x_{21}^h\right)^2\cdot\beta+2\cdot\ x_{21}^h\cdot r_h\cdot(1-\cos\beta)+(r_h)^2\cdot\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\sin 2\beta}{4}\right)\right].\qquad(4)$$

Главные осевые моменты сопротивления определяются по формулам:

$$W_x=\frac{I_x}{y_{max}}\Rightarrow\frac{1}{h}\cdot I_x,\qquad(5)$$

$$W_y=\frac{I_y}{x_{max}}\Rightarrow\frac{1}{b}\cdot I_y=\frac{1}{\psi}\cdot\frac{1}{h}\cdot I_y,\qquad(6)$$

Для нахождения главного секториального момента инерции $I_\omega=\int_A\ \overline{\omega}^2(s)\cdot dA$ введем секториальные координаты ω (удвоенная площадь сектора, где полюс и начальная точка отсчета выбраны в точке ***C***):

$$\omega_C=\omega_{22}\Rightarrow 0;$$

$$\omega(s)\Rightarrow r^2\cdot(\alpha-\sin\alpha)+l_C\cdot r\cdot(1-\cos\alpha),\quad 0\le\alpha\le\beta,$$

$$\omega_{21}=(l_C+\beta\cdot r+x_{21})\cdot r\Rightarrow h^2\cdot\left(\left(l_C^h+\beta\cdot r_h+x_{21}^h\right)\cdot r_h\right);\qquad(7)$$

$$\omega_{12}=\omega_{21}+(b-r+x_{21})\cdot h\Rightarrow h^2\cdot\left(\frac{\omega_{21}}{h^2}+\left(\psi-r_h+x_{21}^h\right)\right);\qquad(8)$$

$$\omega_{11}=\omega_{12}+\left(h-r+\frac{\pi}{2}\cdot r+x_{12}\right)\cdot r\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 \cdot \left(\frac{\omega_{12}}{h^2} + \left(1 - r_h + \frac{\pi}{2} \cdot r_h + x_{12}^h\right) \cdot r_h\right); \tag{9}$$

$$\omega_3 = \omega_{11} + (s - r) \cdot b \Rightarrow h^2 \cdot \left(\frac{\omega_{11}}{h^2} + (s_h - r_h) \cdot \psi\right). \tag{10}$$

Секториальный статический момент:

$$S = \int_A \omega \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_{L/2} \omega \cdot ds = 2 \cdot S_3,$$

$$S_C = S_{22} \Rightarrow 0;$$

$$S_{21} = \delta \cdot \left(l_C \cdot \beta + \frac{\beta^2}{2} \cdot r - h\right) \cdot r^2 \Rightarrow \delta \cdot h^3 \cdot \left(l_C^h \cdot \beta + \frac{\beta^2}{2} \cdot r_h - 1\right) \cdot (r_h)^2;$$

$$S_{12} = S_{21} + \delta \cdot \frac{\omega_{12} + \omega_{21}}{2} \cdot (b - r + x_{21}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \cdot h^3 \cdot \left(\left(l_C^h \cdot \beta + \frac{\beta^2}{2} \cdot r_h - 1\right) \cdot (r_h)^2 + \frac{\omega_{11} + \omega_{21}}{h^2} \cdot \frac{(\psi - r_h + x_{21}^h)}{2}\right);$$

$$S_{11} \approx S_{12} + \delta \cdot \frac{\omega_{12} + \omega_{11}}{2} \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta \cdot h^3 \cdot \left(\frac{S_{12}}{\delta \cdot h^3} + \delta \cdot \frac{\omega_{12} + \omega_{11}}{2 \cdot h^2} \cdot r_h \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$S_3 = S_{11} + \delta \cdot \frac{\omega_3 + \omega_{11}}{2} \cdot (s - r) \Rightarrow \delta \cdot h^3 \cdot \left(\frac{S_{11}}{\delta \cdot h^3} + \delta \cdot \frac{\omega_3 + \omega_{11}}{2 \cdot h^2} \cdot (s_h - r_h)\right). \tag{11}$$

Постоянная D, определяющая главную начальную точку отсчета M_0:

$$D = \frac{S}{\int_A dA} \Rightarrow \frac{S_3}{\delta \cdot L/2} \Rightarrow h^2 \cdot \frac{\left(\frac{S_{11}}{\delta \cdot h^3} + \delta \cdot \frac{\omega_3 + \omega_{11}}{2 \cdot h^2} \cdot (s_h - r_h)\right)}{s_h + r_h \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \pi - 2 - \gamma\right) + \psi + x_{21}^h + l_C^h}; \tag{12}$$

Главные секториальные координаты:

$$\overline{\omega} = \omega - D.$$

Библиографический список:

1. Волков В.П., Волкова О.В. Определение геометрических характеристик тонкостенного Z-образного стержня [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitelnaya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostennogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.

2. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением [Электронный ресурс] //

Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitelnaya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostennogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.

3. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением для расчета на изгиб с кручением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitelnaya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostennogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.

4. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №4. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitelnaya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostennogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.

5. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. М: Высш. шк., 1995. 560 с.

6. Волков В.П., Волкова О.В., Земцова О.Г. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня без закругления // Эффективные строительные конструкции: теория и практика: Сборник статей XV Международной научно-технической конференции. 2015. С. 42-46.