

УДК 624.042.8

ВЫВОД МАТРИЦЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ С ОДНИМ ШАРНИРНЫМ КОНЦОМ

Шейн Александр Иванович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика».

Земцова Ольга Григорьевна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Аннотация

Статья посвящена методике получения матрицы геометрической жесткости для стержня с одним жестко заземленным и одним шарнирным концом. Полученная матрица может быть использована при расчете по деформированной схеме как в реальном проектировании, так и при решении учебных задач деформационного расчета и устойчивости.

Ключевые слова: деформационный расчет, расчет по деформированной схеме, матрица геометрической жесткости.

THE FORMING OF A MATRIX OF GEOMETRIC HARDNESS FOR A ROD WITH ONE HINGE END

Shein Alexander Ivanovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor, Head of the department “Mechanics”.

Zemtsova Olga Grigorevna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department “Mechanics”.

Abstract

The article is devoted to methods of obtaining of matrix of geometric hardness for a rod with one rigid fixing end and one hinge end. The resulting matrix can be used for calculating on the deformed scheme both in real design and in solving learning problems.

Keywords: deformation calculation, calculation by deformed scheme, matrix of geometric hardness.

При выполнении расчета по деформированной схеме учет изменения геометрии конструкции осуществляется за счет введения матрицы геометрической жесткости системы [1,2]. При этом матрица геометрической жесткости стержня с двумя жесткими узлами определяется по формуле [3]:

$$k_i^G = N_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5l_i} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5l_i} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2l_i}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{l_i}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5l_i} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5l_i} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{l_i}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2l_i}{15} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Получим матрицу геометрической жесткости для стержня, один конец которого закреплен шарнирно (рисунок 1). Узловые перемещения такого стержня определяются перемещениями w_1 и w_2 и углом поворота φ_2 оси балки на жестко защемленном конце (рисунок 1).

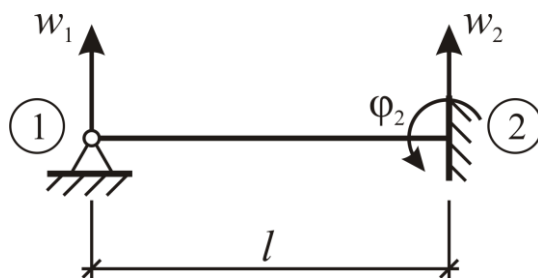


Рисунок 1 – Схема стержня

Прогиб оси балки в некоторой точке, лежащей на расстоянии x от конца балки, описывается полиномом второй степени [3]

$$w = a + bx + cx^2. \quad (2)$$

Коэффициенты a , b , c полинома определяются из граничных условий

$$\left. \begin{aligned} w(0) &= w_1 \\ w(l) &= w_2 \\ w'(l) &= \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставив граничные условия (3) в уравнение (2), учитывая, что

$$w' = b + 2cx,$$

получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= a \\ w_2 &= a + bl + cl^2 \\ \varphi_2 &= b + 2cl \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отсюда, находим коэффициенты полинома:

$$a = w_1. \quad (5)$$

$$c = \frac{w_1}{l^2} - \frac{w_2}{l^2} + \frac{\varphi_2}{l}. \quad (6)$$

$$b = -\varphi_2 - \frac{2w_1}{l} + \frac{2w_2}{l}. \quad (7)$$

Потенциальная энергия изменения геометрии при деформации равна

$$V_{II}^{III} = \frac{1}{2} \int_0^l N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} U^T k^I U. \quad (8)$$

Тогда для рассматриваемого стержня:

$$\begin{aligned} V_{II} &= \frac{1}{2} N \int_0^l (b + 2cx)^2 dx = \frac{1}{2} N \int_0^l (b^2 + 4bcx + 4c^2x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} N \left(b^2l + 2bcl^2 + \frac{4}{3}c^2l^3 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (6) и (7) в (9), получим [5]:

$$V_{II} = \frac{1}{2} N \left[\varphi_2^2 l + \frac{4w_1^2}{l} + \frac{4w_2^2}{l} + 4w_1\varphi_2 - 4w_2\varphi_2 - \frac{8w_1w_2}{l} - \right. \\ \left. - 2w_1\varphi_2 + 2w_2\varphi_2 - 2\varphi_2^2 l - \frac{4w_1^2}{l} + \frac{4w_1w_2}{l} - 4w_1\varphi_2 + \frac{4w_1w_2}{l} - \frac{4w_2^2}{l} + 4w_2\varphi_2 + \right. \\ \left. + \frac{4w_1^2}{3l} + \frac{4w_2^2}{3l} + \frac{4}{3}\varphi_2^2 l - \frac{8w_1w_2}{3l} + \frac{8}{3}w_1\varphi_2 - \frac{8}{3}w_2\varphi_2 \right].$$

$$V_{II} = \frac{1}{2} N \left(\frac{4w_1^2}{3l} + \frac{4w_2^2}{3l} + \frac{1}{3}\varphi_2^2 l - \frac{8w_1w_2}{3l} + \frac{2}{3}w_1\varphi_2 - \frac{2}{3}w_2\varphi_2 \right) = \\ = N \left(\frac{2w_1^2}{3l} + \frac{2w_2^2}{3l} - \frac{4w_1w_2}{3l} + \frac{1}{3}w_1\varphi_2 - \frac{1}{3}w_2\varphi_2 + \frac{1}{6}\varphi_2^2 l \right)$$

$$\frac{dV_{II}}{dw_i} = N \begin{bmatrix} \frac{4}{3l} & -\frac{4}{3l} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3l} & \frac{4}{3l} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{l}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Таким образом, матрица геометрической жесткости для стержня, изображенного на рисунке 1, имеет вид:

$$k_1^G = N \begin{bmatrix} \frac{4}{3l} & -\frac{4}{3l} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3l} & \frac{4}{3l} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{l}{3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Дополняя расчетную схему стержня горизонтальными перемещениями (рисунок 2),

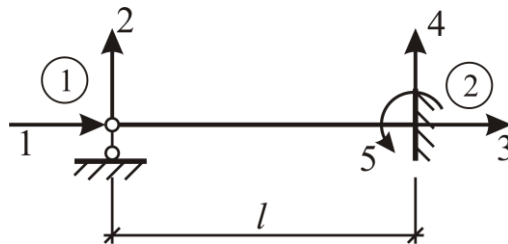


Рисунок 2 – Общая расчетная схема стержня

получим матрицу геометрической жесткости стержня с шарнирным закреплением одного конца в общем виде:

$$k^G = N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3l} & 0 & -\frac{4}{3l} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3l} & 0 & \frac{4}{3l} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Следует отметить, что при практическом применении данной формулы необходимо учитывать, что матрица геометрической жесткости получена для стержня с шарнирным закреплением, расположенным в начальном узле.

Библиографический список:

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428с.
2. Земцова О.Г., Шеин А.И., Волкова О.В. Метод конечных элементов в современных иностранных книгах // Современные научные исследования и инновации. 2015. № 3-1(47). С. 129-132.
3. Шеин А.И. Курс строительной механики. М.: АСВ, 2017. 352 с.
4. Шеин А.И. Математическое моделирование механических систем на примере задачи гашения колебаний высотных сооружений [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/matematiceskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/matematiceskoe-modelirovanie-mehanicheskikh-sistem-na-primere-zadachi-gasheniya-kolebanii-vysotnyh-sooruzhenii/at_download/file.
5. Земцова О.Г., Володин В.А. Комплексы программ, применяемые для моделирования и расчета конструкций зданий и сооружений [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL:

zhurnala/no1/matematiceskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/kompleksy-programm-primenyaemye-dlya-modelirovaniya-i-rascheta-konstrukcii-zdaniy-i-sooruzhenii/at_download/file