

УДК 539.371

АНАЛИЗ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛКИ ПРИ ПОМОЩИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Павлова Анна Дмитриевна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Статья посвящена анализу напряжённого состояния стержня на двух опорах, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба и нагруженного сосредоточенной силой в середине пролёта в первом случае и равномерно-распределённой нагрузкой по всему пролёту во втором случае. Решение осуществляется при помощи тригонометрических рядов (решение Файлона). Отмечено, что характер напряжённого состояния, в общем и целом, соответствует получаемому методами сопротивления материалов, однако есть и существенные отличия, особенно в части касательных напряжений, а также нормальных напряжений, действующих на площадках, параллельных продольной оси стержня.

Ключевые слова: стержень, плоский поперечный изгиб, упругость, тригонометрические ряды.

ANALYSIS OF THE STRESS STATE OF THE BEAM BY TRIGONOMETRIC SERIES

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Pavlova Anna Dmitrievna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

The article is devoted to the analysis of the stressed state of a hinged supported beam under the conditions of a flat transverse bending and loaded by a concentrated force in the middle of the span in the first case and by a uniform loading throughout the span in the second case. The solution is carried out by using trigonometric series (Filon solution). It is noted that the nature of the stress state, in general, corresponds to the results of the material resistance methods obtained, but there are also significant differences, especially in the tangential stresses, as well as in the normal stresses, acting on parallel sites to the longitudinal axis of the rod.

Keywords: rod, flat transverse bending, elasticity, trigonometric series.

Введение. Напряжённое состояние конструкции, определяемое методами сопротивления материалов (при возможности это сделать) и методами теории упругости, может значительно различаться [1]. Классическим примером этого является расчёт плотины треугольного профиля [2].

Одним из наиболее общих численно-аналитических методов решения задач теории упругости является метод решения при помощи тригонометрических рядов, хотя и он, как и другие расчётные методы, не лишён известных недостатков. Вместе с тем, в работе [3], в части «Математические модели и точность инженерных расчётов» утверждается, что требование внутренней непротиворечивости расчётной модели должно быть строго обосновано конечной целью расчёта и его реальных возможностей. Обосновывается мнение, что «и логические противоречия в модели могут быть терпимы, если обусловленные ими ошибки в расчётах не выходят за рамки

погрешности, следующей из принятых в модели допущений физического характера».

Рассмотрим определение напряжённого состояния однородного изотропного прямолинейного стержня с прямоугольным поперечным сечением, развитым в высоту, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба (рисунок 1). Стержень будет находиться, вообще говоря, в условиях плоской задачи и для определения его напряжённого состояния можно воспользоваться методом расчёта балок-стенок (решение плоской задачи теории упругости) при помощи тригонометрических рядов.

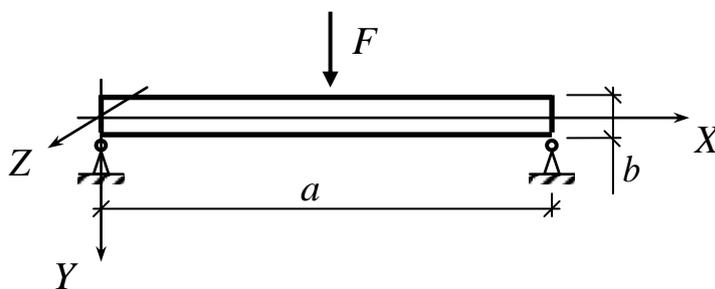


Рисунок 1 – Расчетная схема стержня

Если следовать строгому определению, то под стержнем в сопротивлении материалов понимается конструктивный элемент, два геометрических размера которого, определяющие размеры поперечного сечения, значительно меньше третьего, задающего длину стержня. Никаких количественных зависимостей между размерами при этом не вводится. Ввиду этого будем ограничивать высоту прямоугольного поперечного сечения этого стержня условием, по которому фактическая криволинейная эпюра нормальных напряжений в балке-стенке, действующих на площадках, нормали к которым параллельны продольной оси стержня, отличается от прямолинейной эпюры, соответствующей элементарной теории сопротивления материалов, не более чем на 1%. Ширина поперечного сечения стержня принимается исчезающе малой.

Теоретические основы. Для расчёта стержня воспользуемся решением при помощи тригонометрических рядов для расчёта балок-стенок [4]. Данное

решение было использовано ранее для оценки напряжённо-деформированного состояния тонкого стержня, находящегося в условиях осевого растяжения [5].

Итак, для определения напряжений будем иметь следующие расчётные формулы [4]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + B_m) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m y) \left[\lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] - \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) + \lambda_m b} + \right. \\
 & \left. + (A_m - B_m) \frac{\operatorname{sh}(\lambda_m y) \left[\operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] + \lambda_m y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) - \lambda_m b} \right\} \times \\
 & \times \sin(\lambda_m x); \\
 \sigma_y = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + B_m) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m y) \left[\lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] - \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) + \lambda_m b} + \right. \\
 & \left. + (A_m - B_m) \frac{\lambda_m y \cdot \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \operatorname{ch}(\lambda_m y) - \left[\operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] \operatorname{sh}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) - \lambda_m b} \right\} \times \\
 & \times \sin(\lambda_m x); \\
 \tau_{xy} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + B_m) \frac{\lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) - \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) + \lambda_m b} + \right. \\
 & \left. + (A_m - B_m) \frac{\lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \cdot \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) - \lambda_m b} \right\} \cos(\lambda_m x).
 \end{aligned} \tag{1}$$

В формулах (1) введены следующие обозначения:

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a}; \quad A_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin(\lambda_m x) dx; \quad B_m = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \sin(\lambda_m x) dx; \quad a - \text{длина}$$

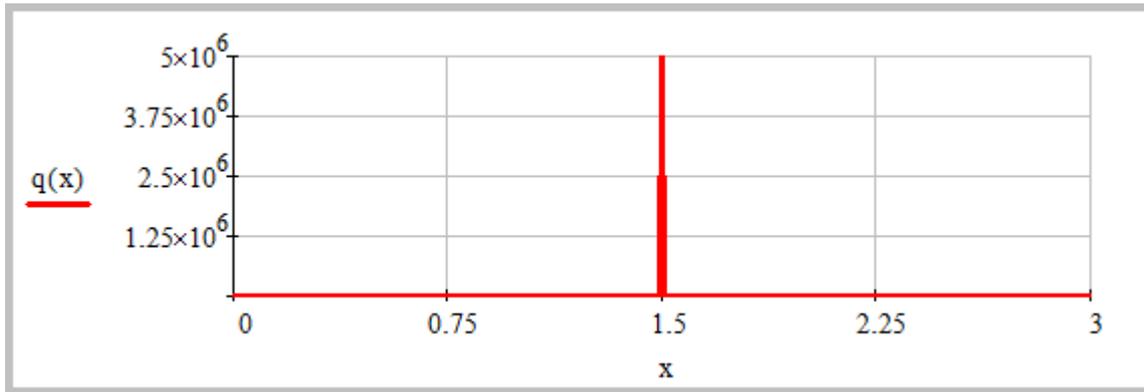
стержня; b – высота поперечного сечения стержня.

Для стержня, нагруженного сосредоточенной силой в середине пролёта (рисунок 1)

$$q(x) = q_0 100^{-1000 \left| x - \frac{a}{2} \right|}; \quad q(x) = p_0 \left(100^{-1000|x|} + 100^{-1000|x-a|} \right), \quad (2)$$

причём $q_0 = 5 \cdot 10^6$ Н, $p_0 = -2,5 \cdot 10^6$ Н, то есть условия равновесия стержня соблюдаются. Таким образом, сосредоточенное воздействие на стержень моделируется функцией, принимающей значение близкое нулю всюду кроме точки в середине пролёта стержня по его верхнему контуру, и кроме точек в начале и в конце стержня (на опорах) по его нижнему контуру. График функций (2) имеет вид (рисунок 2).

а). Характер распределения внешнего воздействия по верхнему контуру.



б). Характер распределения внешнего воздействия по нижнему контуру.

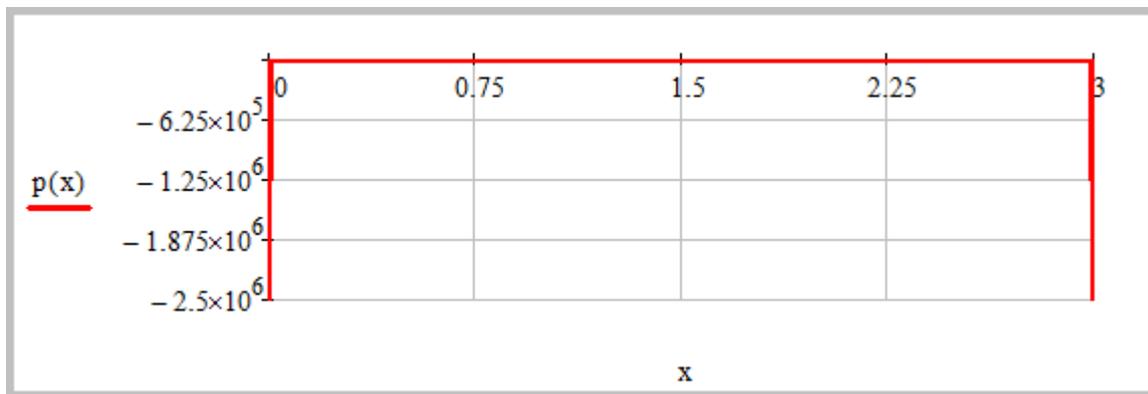


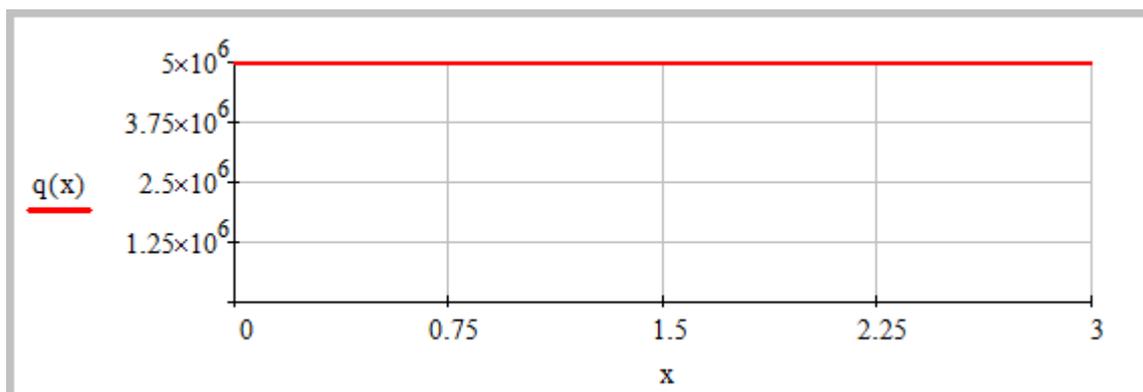
Рисунок 2 – График функций (2)

Для стержня, нагруженного равномерно-распределённой нагрузкой по всей длине пролёта

$$q(x) = q_0(1 - x + x); \quad q(x) = -p_0 \left(100^{-1000|x|} + 100^{-1000|x-a|} \right), \quad (3)$$

причём $q_0 = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$; $p_0 = \frac{q_0 \cdot a}{2}$. Таким образом, равномерно-распределённое воздействие на стержень моделируется функцией, принимающей постоянное значение всюду по его верхнему контуру, и близкое к нулю во всех точках нижнего контура кроме точек в начале и в конце стержня (на опорах). График функций (3) имеет вид (рисунок 3).

а). Характер распределения внешнего воздействия по верхнему контуру.



б). Характер распределения внешнего воздействия по нижнему контуру.

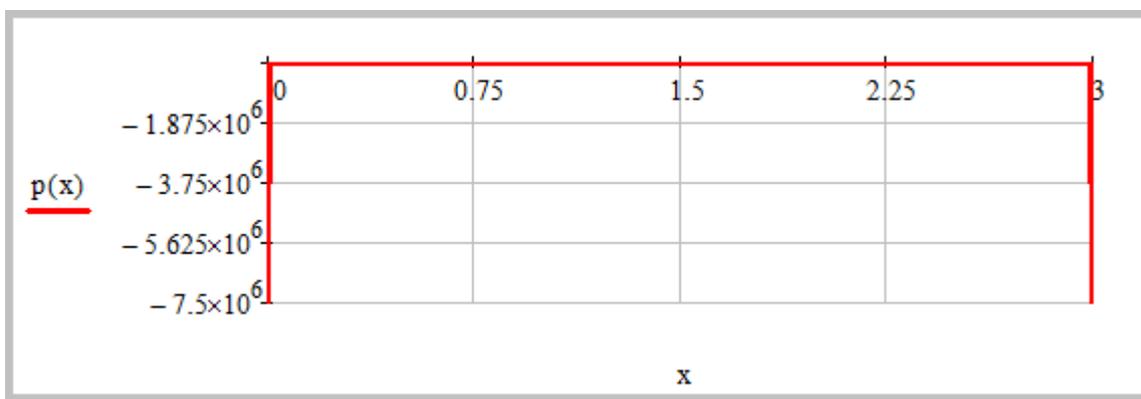


Рисунок 3 – График функций (3)

Результаты вычислений. Для стержня длиной $a = 3$ м, нагруженного сосредоточенной силой в середине пролёта, как показали расчёты, высота поперечного сечения, для обеспечения отклонения эпюры нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ от прямой линии не более 1% по всей длине стержня, не должна быть более 0,25 м, то есть составлять менее 10% от длины стержня. Характер распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ по длине стержня представлен на рисунке 4.

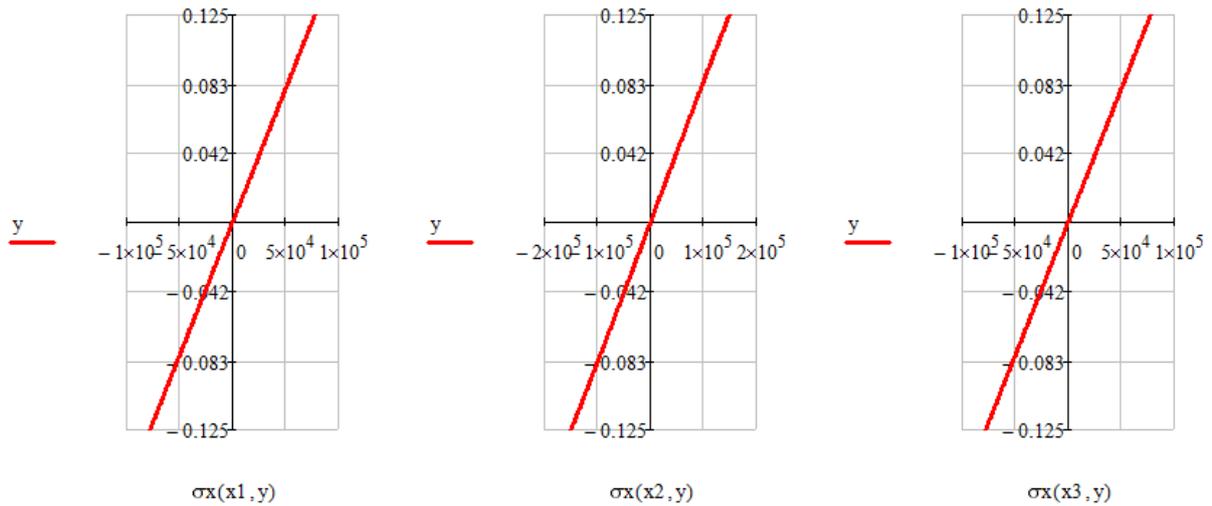


Рисунок 4 – Эпюры нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$

Для стержня длиной $a = 3$ м, нагруженного равномерно-распределённой нагрузкой по всей длине пролёта, высота поперечного сечения, как показали расчёты, для обеспечения отклонения эпюры нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ от прямой линии не более 1% по всей длине стержня, не должна быть более 0,6 м, то есть составлять менее 20% от длины стержня. Характер распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ по длине стержня представлен на рисунке 5.

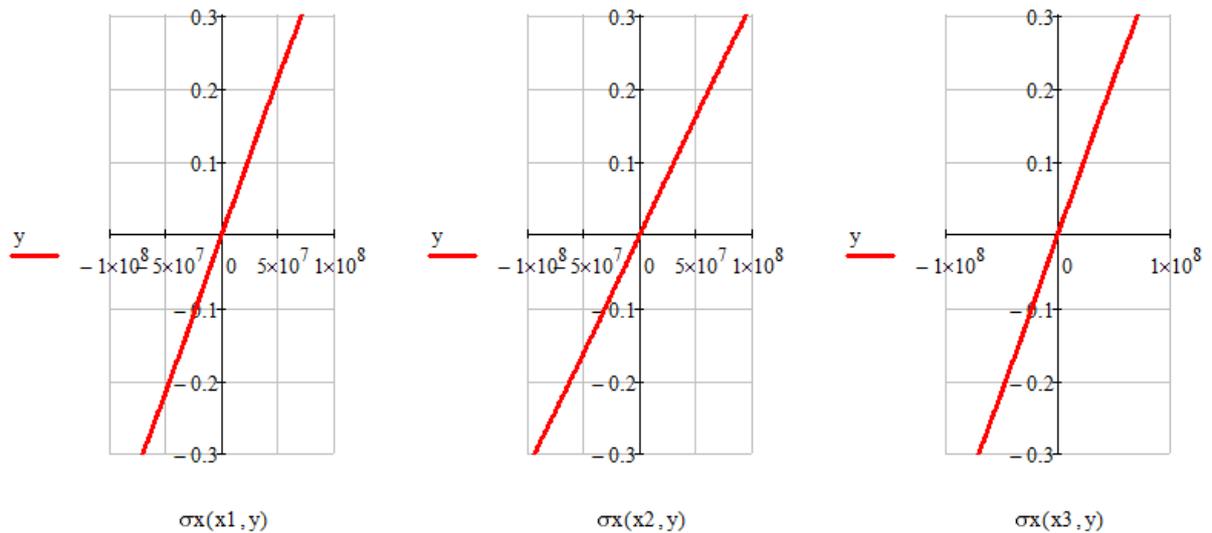


Рисунок 5 – Эпюры нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$

На рисунках 4 и 5 обозначено: $x_1 = \frac{a}{4}$; $x_2 = \frac{a}{2}$; $x_3 = \frac{3a}{4}$. Следует отметить, что на торцах стержня при $x=0$ и $x=a$ нормальные напряжения $\sigma_x(x, y) = 0$.

Характер распределения касательных напряжений $\tau_{xy}(x, y)$ в стержне, нагруженном сосредоточенной силой в середине пролёта представлен на рисунке 6. Следует отметить, что в среднем сечении стержня, под сосредоточенной силой, касательные напряжения $\tau_{xy}\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0$. Кроме того, по верхнему контуру стержня (на рисунке 6 это отрицательная вертикальная координатная полуось) касательные напряжения не равны нулю; отклонение от нуля составляет в среднем 10%.

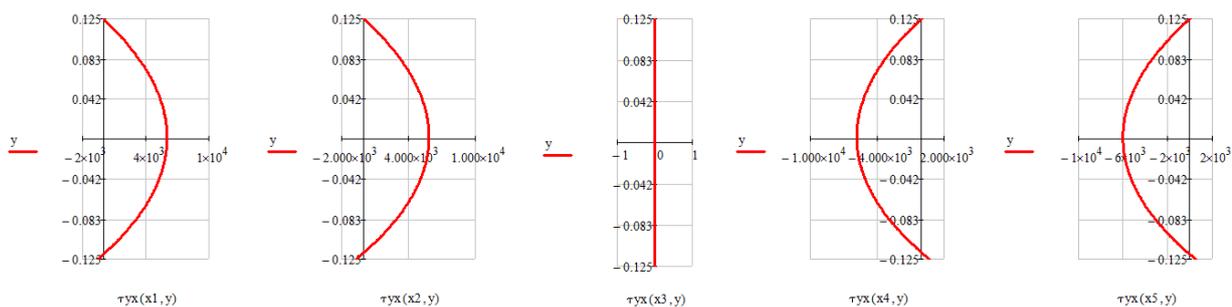


Рисунок 6 – Эпюры касательных напряжений $\tau_{xy}(x, y)$

Характер распределения касательных напряжений $\tau_{xy}(x, y)$ в стержне, нагруженном равномерно-распределённой нагрузкой по всей длине пролёта, представлен на рисунке 7. Следует отметить, что в среднем сечении стержня, при $x = \frac{a}{2}$, касательные напряжения $\tau_{xy}\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0$. Кроме того, по верхнему контуру стержня (на рисунке 7 это отрицательная вертикальная координатная полуось) касательные напряжения не равны нулю, причём, чем дальше находится расчётное сечение от среднего сечения стержня, тем отклонение от

нуля больше (на концах стержня отклонение касательных напряжений от нуля достигает 30%).

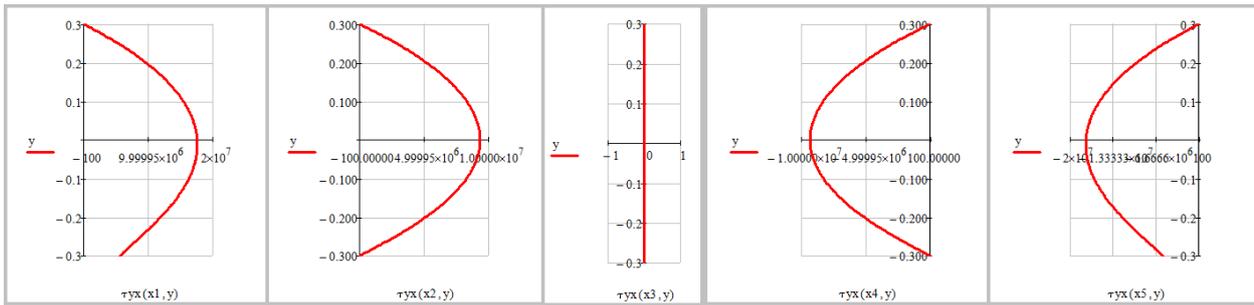


Рисунок 7 – Эпюры касательных напряжений $\tau_{xy}(x, y)$

На рисунках 6 и 7 обозначено: $x_1 = 0$ м; $x_2 = \frac{a}{4}$; $x_3 = \frac{a}{2}$; $x_4 = \frac{3a}{4}$; $x_5 = a$.

Характер распределения нормальных напряжений $\sigma_y(x, y)$, действующих на горизонтальных площадках в стержне, нагруженном сосредоточенной силой в середине пролёта, показан на рисунке 8.

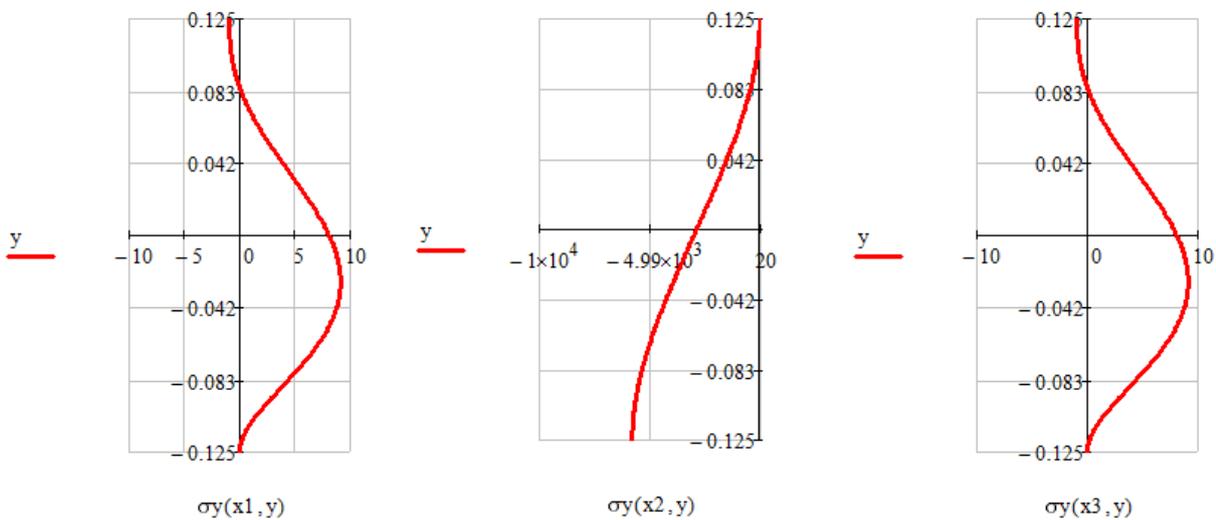


Рисунок 8 – Эпюры нормальных напряжений $\sigma_y(x, y)$

Расчёты показывают, что характер нормальных напряжений, развивающихся в сечении под сосредоточенной силой, качественно соответствует элементарной теории при нагружении стержня распределённой нагрузкой (верхний контур стержня соответствует отрицательным значениям вертикальной координатной оси). В торцевых сечениях стержня, при $x = 0$ м и

$x = a$, нормальные напряжения $\sigma_y(x, y) = 0$. В остальных поперечных сечениях стержня нормальные напряжения на горизонтальных площадках развиваются лишь в зонах выше нейтральной линии, причём их величина незначительна. Кроме того, на нижнем контуре стержня (это положительные значения вертикальной координатной оси) нормальные напряжения $\sigma_y(x, y)$ отличны, вообще говоря, от нуля.

Характер распределения нормальных напряжений $\sigma_y(x, y)$, действующих на горизонтальных площадках в стержне, нагруженном равномерно-распределённой нагрузкой по всей длине пролёта, показан на рисунке 9.

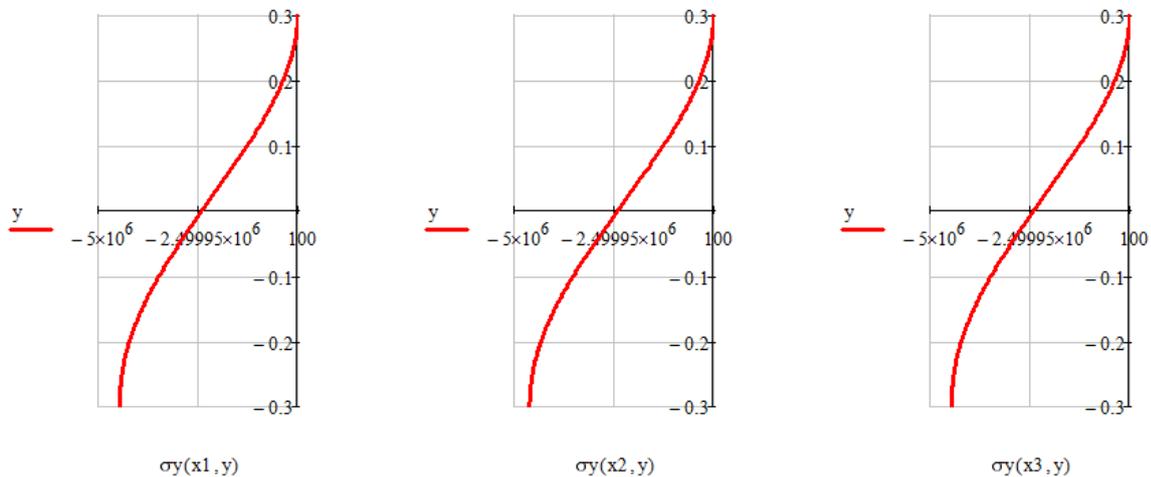


Рисунок 9 – Эпюры нормальных напряжений $\sigma_y(x, y)$

Расчёты показывают, что характер нормальных напряжений $\sigma_y(x, y)$, в поперечных сечениях стержня соответствует, вообще говоря, элементарной теории, несмотря на то, что величина напряжения на верхнем контуре стержня (это отрицательные значения вертикальной координатной оси) $\sigma_y\left[x, \left(-\frac{b}{2}\right)\right]$ не остаётся постоянной, а изменяется, хотя и незначительно, по длине стержня. На нижнем контуре стержня $\sigma_y\left[x, \frac{b}{2}\right] = 0$.

На рисунках 8 и 9 обозначено: $x_1 = \frac{a}{4}$; $x_2 = \frac{a}{2}$; $x_3 = \frac{3a}{4}$.

Выводы:

1. Результаты выполненных исследований показывают, что стержень, находящийся в условиях плоского поперечного изгиба, допустимо рассчитывать методами сопротивления материалов, если его высота не превышает 10% от его длины, при действии на стержень сосредоточенных сил, либо не превышает 20% его длины, если на стержень действует равномерно-распределённая нагрузка. При этом эпюра нормальных напряжений на площадках, перпендикулярных к продольной оси стержня, будет изменяться по высоте прямоугольного поперечного сечения стержня по линейному закону.

2. Численные расчёты методами теории упругости показывают, что характер эпюр нормальных напряжений на горизонтальных площадках, а также эпюр касательных напряжений, вообще говоря, соответствуют элементарной теории с незначительными отклонениями от последней.

3. При расчёте изгибаемого стержня при помощи тригонометрических рядов (решение Файлона), на свободных от нагрузки торцевых сечениях, возникают касательные усилия, величина которых значительна, в то время как в среднем сечении стержня касательные усилия равны нулю. Это обстоятельство согласуется с теорией расчёта конструкций при помощи тригонометрических рядов Фурье.

Библиографический список:

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. / Под ред. Г.С. Шапиро. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 560 с.

2. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. спец. вузов. М.: Высш. шк., 2002. 400 с.

3. Новожилов В.В. Две статьи о математических моделях в механике сплошной среды. М.: ИМП, (препринт института проблем механики АН СССР, №215), 1983. 56 с.

4. Бакушев С.В. Теория упругости. Краткий практический курс: учеб. пособие по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство». Пенза: ПГУАС, 2016. 256 с.

5. Бакушев С.В., Быкова Е.А. Расчет стержня на осевое растяжение сосредоточенной силой при помощи тригонометрических рядов [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №4. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no4/stroitel'naya-mehanika/4.7/at_download/file