

УДК 539.371

**РАСЧЁТ СТЕРЖНЯ НА ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ДВУМЯ  
СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ ПРИ ПОМОЩИ  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ**

***Бакушев Сергей Васильевич,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

***Быкова Екатерина Александровна,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*студент.*

**Аннотация**

Рассматривается осевое растяжение прямолинейного тонкого стержня от действия сосредоточенных сил, приложенных в точках пересечения боковых поверхностей стержня с его торцевыми поверхностями, и направленных вдоль его продольной оси. Решение строится при помощи тригонометрических рядов Фурье (решение Файлона). В результате определяются характеристики напряжённо-деформированного состояния: нормальные и касательные напряжения, продольные и поперечные перемещения точек стержня. Показано, что внешние сосредоточенные силы, заданные в виде степенной функции с большим отрицательным показателем степени, приводят к существенному искажению характера распределения и напряжений, и перемещений в областях, примыкающих к концам стержня.

**Ключевые слова:** стержень, осевое растяжение, упругость, тригонометрические ряды.

## CALCULATION OF THE AXIAL ROD STRETCHING TWO CONCENTRATED FORCES USING TRIGONOMETRIC SERIES

*Bakushev Sergey Vasilevich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

*Bykova Ekaterina Alexandrovna,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*student.*

### **Abstract**

Considered axial stretching straight thin stalk from the concentrated force exerted at the intersection points of the side surfaces of the rod with its end surfaces, along its longitudinal axis. The solution is built using trigonometric Fourier series (decision Filon). As a result, are determined by the characteristics of the stress-strain State: normal and shear stresses, longitudinal and transverse displacement of the rod points. It is shown that external forces are concentrated, specified in the form of a power function with a large negative exponent, resulting in significant distortion and stress distribution and displacement in areas adjacent to the ends of the rod.

**Keywords:** rod, axial stretching, elasticity, trigonometric series.

**Введение.** В сопротивлении материалов расчёт тонкого прямолинейного упругого стержня является, вообще говоря, приближённым, так как основывается на гипотезе Я. Бернулли. Гипотеза Я. Бернулли состоит в том, что при растяжении или сжатии прямолинейного стержня его поперечные сечения, нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси стержня и после деформации. На основе этого допущения обосновывается утверждение, что нормальные напряжения, действующие по площадкам, совпадающим с поперечными сечениями стержня, распределяются по ширине сечения равномерно [1]. В работе [2] рассматривалось решение задачи о растяжении (сжатии) прямолинейного

стержня при отказе от гипотезы Я.Бернулли. При этом предполагалось, что нормальные напряжения распределяются по поперечным сечениям стержня по закону квадратной параболы.

В данной работе рассматривается решение задачи о растяжении тонкого прямолинейного упругого стержня методами теории упругости при помощи тригонометрических рядов Фурье. При этом никакие предположения относительно формы поперечных сечений стержня до и после деформации не вводятся, также, как не вводятся и предположения относительно характера распределения нормальных напряжений по площади поперечного сечения стержня.

**Теоретические основы.** Свяжем тонкий прямолинейный стержень длиной  $b$  с декартовой системой координат  $X, Y, Z$  (рисунок 1). Поперечное

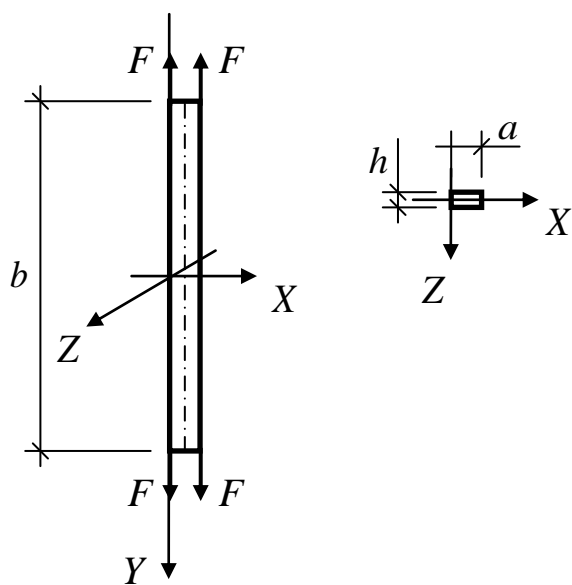


Рисунок 1 – Расчетная схема стержня

сечение стержня имеет размеры  $a \times h$ . Будем полагать, что  $h \ll a$  и  $b \gg a$ . Это означает, что стержень можно рассматривать как тонкую (единичной толщины) упругую балку-стенку, вытянутую в направлении оси  $Y$  и нагруженную по верхней и нижней сторонам сосредоточенными силами, действующими в направлении оси стержня и приложенными по краям

торцевых сечений. Следовательно, стержень будет находиться в условиях плоской задачи.

Решение задачи об определении напряжённо-деформированного состояния стержня будем искать при помощи тригонометрических рядов, то есть в качестве функции напряжений примем бесконечный тригонометрический ряд по синусам [3]:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin(\lambda_m x). \quad (1)$$

Здесь

$$Y_m(y) = C_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{3m} y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{4m} y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y), \quad (2)$$

причём  $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$ .

Для определения напряжений будем иметь следующие расчётные формулы [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \{C_{1m} \lambda_m^2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \lambda_m^2 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \\ &\quad + C_{3m} \lambda_m [2 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \lambda_m y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)] + \\ &\quad + C_{4m} \lambda_m [2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y)]\} \sin(\lambda_m x); \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} [C_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \\ &\quad + C_{3m} y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{4m} y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y)] \lambda_m^2 \sin(\lambda_m x); \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = - \sum_{m=1}^{\infty} \{ \lambda_m C_{1m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \lambda_m C_{2m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \\ &\quad + C_{3m} [\operatorname{ch}(\lambda_m y) + \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y)] + \\ &\quad + C_{4m} [\operatorname{sh}(\lambda_m y) + \lambda_m y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)] \} \lambda_m \cos(\lambda_m x). \end{aligned} \quad (3)$$

Разложим нагрузку, действующую на стержень в тригонометрические ряды по синусам:

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(\lambda_m x); \\ p(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(\lambda_m x). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$A_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin(\lambda_m x) dx; \quad B_m = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \sin(\lambda_m x) dx, \quad (5)$$

причём

$$\left. \begin{aligned} q(x) &= q_0 \left( 10^{-1000|x|} + 10^{-1000|x-a|} \right) \\ p(x) &= p_0 \left( 10^{-1000|x|} + 10^{-1000|x-a|} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, сосредоточенное воздействие на стержень моделируется функцией, принимающей значение близкое нулю всюду кроме точек пересечения боковых поверхностей и торцевых поверхностей. График функций (6) имеет вид (рисунок 2).

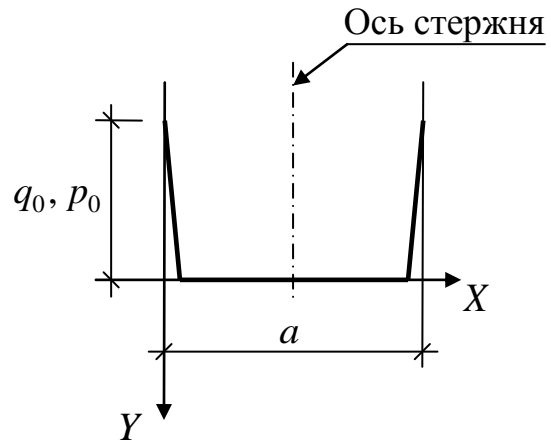


Рисунок 2 – График функций (6)

Запишем граничные условия в напряжениях по верхнему и нижнему торцам стержня:

- при  $y = \frac{b}{2}$ ,  $\sigma_y = -p(x)$ ;  $\tau_{yx} = 0$ ;

- при  $y = -\frac{b}{2}$ ,  $\sigma_y = -q(x)$ ;  $\tau_{yx} = 0$ . (7)

Принимая во внимание соотношения (3) и (4), на основании зависимостей (7) получаем систему четырёх линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$  для каждого номера  $m$ :

$$\left\{ \begin{aligned}
& C_{1m} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{2m} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{3m} \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{4m} \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) = \frac{B_m}{\lambda_m^2}; \\
& C_{1m} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - C_{2m} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - C_{3m} \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - C_{4m} \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) = \frac{A_m}{\lambda_m^2}; \\
& \left\{ \lambda_m C_{1m} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m C_{2m} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{3m} \left[ \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] + \right. \\
& \left. + C_{4m} \left[ \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] \right\} \lambda_m = 0; \\
& \left\{ -\lambda_m C_{1m} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m C_{2m} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + C_{3m} \left[ \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] + \right. \\
& \left. + C_{4m} \left[ -\operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) - \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) \right] \right\} \lambda_m = 0.
\end{aligned} \right.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned}
C_{1m} &= \frac{A_m + B_m}{\lambda_m^2} \frac{\operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\lambda_m \frac{b}{2}\right) + 2\lambda_m \frac{b}{2}}; \\
C_{2m} &= -\frac{A_m - B_m}{\lambda_m^2} \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\lambda_m \frac{b}{2}\right) - 2\lambda_m \frac{b}{2}}; \\
C_{3m} &= \frac{A_m - B_m}{\lambda_m^2} \frac{\lambda_m \operatorname{ch}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\lambda_m \frac{b}{2}\right) - 2\lambda_m \frac{b}{2}}; \\
C_{4m} &= -\frac{A_m + B_m}{\lambda_m^2} \frac{\lambda_m \operatorname{sh}\left(\lambda_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\lambda_m \frac{b}{2}\right) + 2\lambda_m \frac{b}{2}}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для постоянных интегрирования  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$  в соотношения (3), получаем окончательные формулы для напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + B_m) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m y) \left[ \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) - \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \right] - \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) + \lambda_m b} + \right. \\
& \left. + (A_m - B_m) \frac{\operatorname{sh}(\lambda_m y) \left[ \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) - \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \right] + \lambda_m y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) - \lambda_m b} \right\} \times \\
& \times \sin(\lambda_m x); \\
\sigma_y = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + B_m) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m y) \left[ \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) + \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \right] - \lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) + \lambda_m b} + \right. \\
& \left. + (A_m - B_m) \frac{\lambda_m y \cdot \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \operatorname{ch}(\lambda_m y) - \left[ \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) + \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \right] \operatorname{sh}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) - \lambda_m b} \right\} \times \\
& \times \sin(\lambda_m x); \\
\tau_{xy} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + B_m) \frac{\lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) - \lambda_m y \cdot \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) + \lambda_m b} + \right. \\
& \left. + (A_m - B_m) \frac{\lambda_m y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \cdot \operatorname{ch} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) - \lambda_m \frac{b}{2} \operatorname{sh} \left( \lambda_m \frac{b}{2} \right) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(\lambda_m b) - \lambda_m b} \right\} \cos(\lambda_m x). \quad (9)
\end{aligned}$$

Для вычисления перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  в стержне имеем соотношения [1, 4]

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(y) \lambda_m \cos(\lambda_m x); \quad v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(y) \sin(\lambda_m x). \quad (10)$$

Здесь выражения для функций  $u_m(y)$  и  $v_m(y)$  имеют вид [3]:

$$\begin{aligned}
u_m(y) = & -\frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{\lambda_m} [C_{1m} \lambda_m^2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \lambda_m^2 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + 2C_{3m} \lambda_m \operatorname{sh}(\lambda_m y) + \right. \\
& + C_{3m} y \lambda_m^2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + 2C_{4m} \lambda_m \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{4m} y \lambda_m^2 \operatorname{sh}(\lambda_m y)] + \\
& \left. + \mu \lambda_m [C_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{3m} y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{4m} y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y)] \right\}; \\
v_m(y) = & \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{\lambda_m^2} [C_{1m} \lambda_m^3 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{2m} \lambda_m^3 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + 3C_{3m} \lambda_m^2 \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \right. \\
& + C_{3m} y \lambda_m^3 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + 3C_{4m} \lambda_m^2 \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{4m} y \lambda_m^3 \operatorname{ch}(\lambda_m y)] - \\
& - (2 + \mu) [C_{1m} \lambda_m \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{2m} \lambda_m \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{3m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + \\
& \left. + C_{3m} y \lambda_m \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{4m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{4m} y \lambda_m \operatorname{ch}(\lambda_m y)] \right\}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Итак, все расчётные соотношения для вычисления напряжений и перемещений в тонком прямолинейном упругом стержне, нагруженном по торцам двумя сосредоточенными воздействиями в направлении продольной оси стержня, построены.

### Результаты вычислений.

Исходные данные для стального стержня:

- геометрические размеры стержня:  $a = 0,12$  м;  $b = 2,4$  м;
- модуль упругости материала стержня  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;
- коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ;
- параметры нагрузки:  $q_0 = -5 \cdot 10^6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;  $p_0 = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ .

Параметры нагрузки подобраны так, чтобы нормальные напряжения в стержне не превышали расчётного сопротивления материала  $R_\sigma \cong 200$  МПа.

Решение задачи выполнено с использованием математического пакета MathCAD. Функция напряжений (1) принималась в виде ряда, содержащего семь слагаемых. Ниже представлены результаты вычислений.

На рисунке 3 показано распределения внешнего воздействия по торцам стержня: рисунок 3 слева – для верхнего конца стержня, рисунок 3 справа – для нижнего конца стержня.



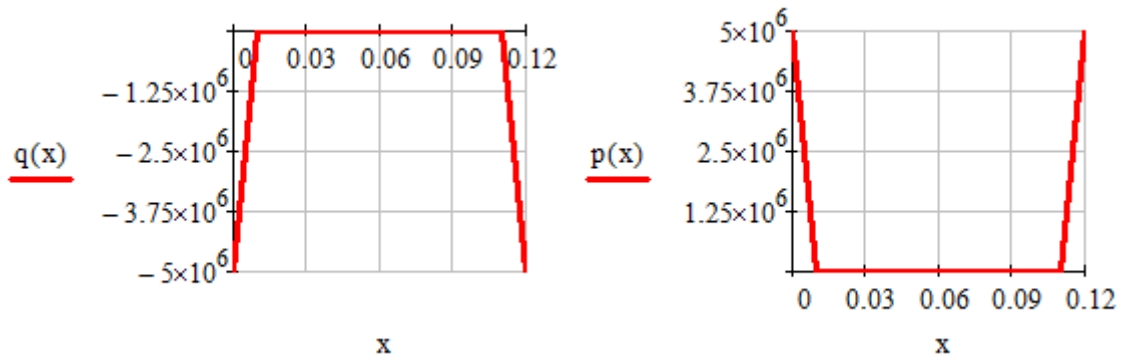


Рисунок 3 – Характер распределения внешнего давления по торцам стержня

Нормальные напряжения  $\sigma_x$  вдоль боковых сторон стержня, при  $x = 0$  и  $x = a$  равны нулю. В вертикальных сечениях распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  у торцов стержня в небольшой зоне крайне неравномерное, затем монотонно убывающее до нуля в среднем поперечном сечении (рисунок 4).

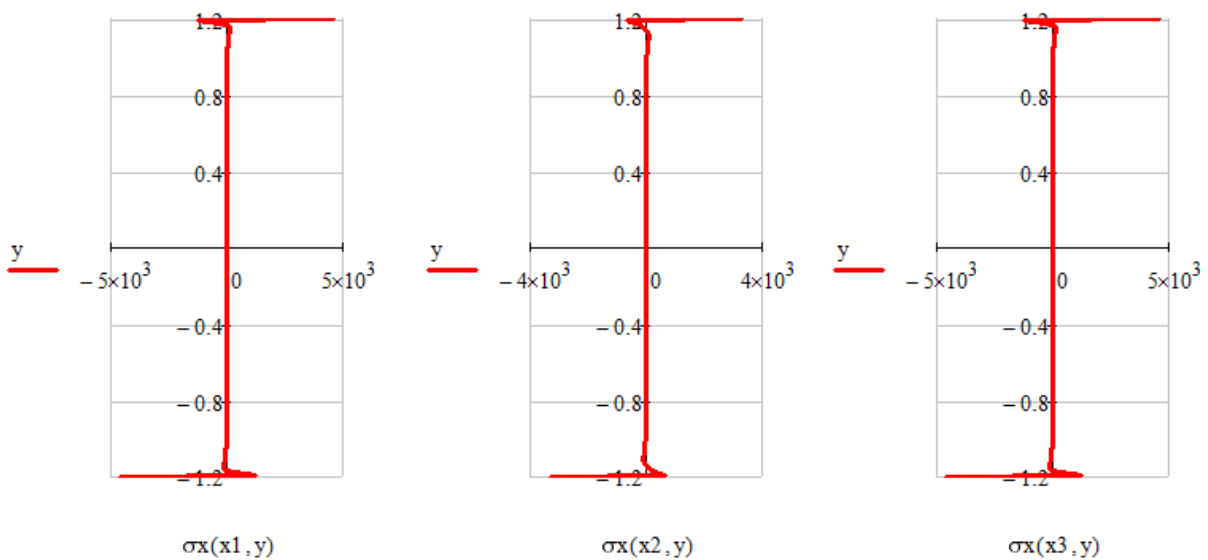
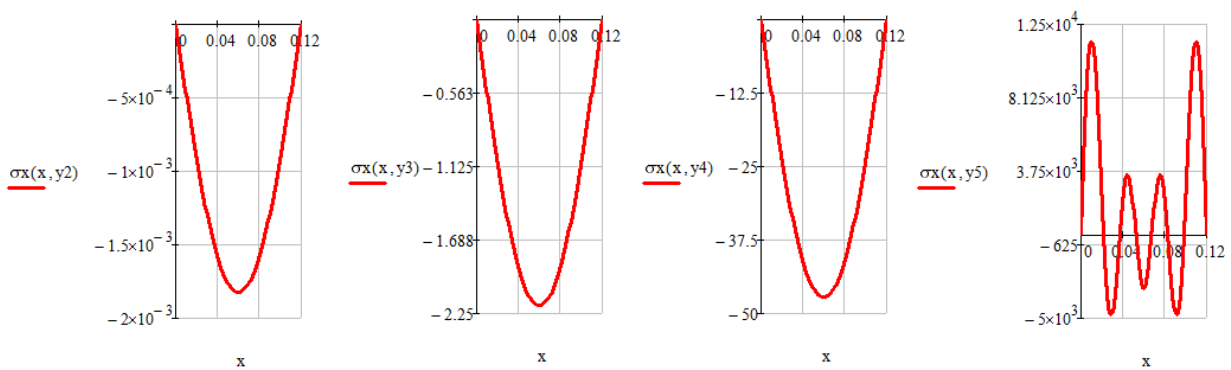


Рисунок 4 – Характер распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по длине стержня.

На рисунке 4 обозначено:  $x_1 = \frac{a}{4}$ ;  $x_2 = \frac{a}{2}$ ;  $x_3 = \frac{3a}{4}$ .

Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$  по ширине сечения для верхней ( $y < 0$ ) и нижней ( $y > 0$ ) половин стержня показан на рисунке 5. Как следует из проведённых расчётов, нормальные напряжения  $\sigma_x$  изменяются по ширине сечения стержня по кривой, похожей на параболу второго порядка, причём интенсивность напряжений при удалении от средней линии стержня ( $y = 0$ ) монотонно возрастает.

$y < 0$



$y > 0$

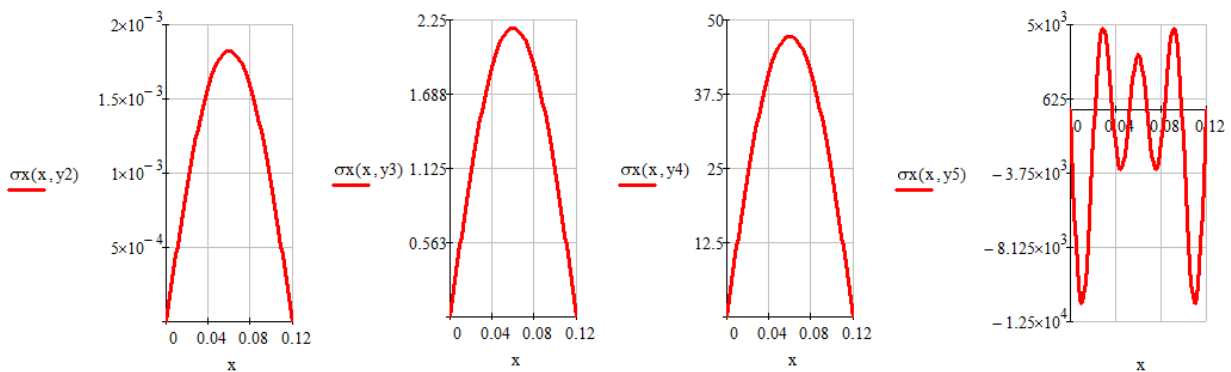


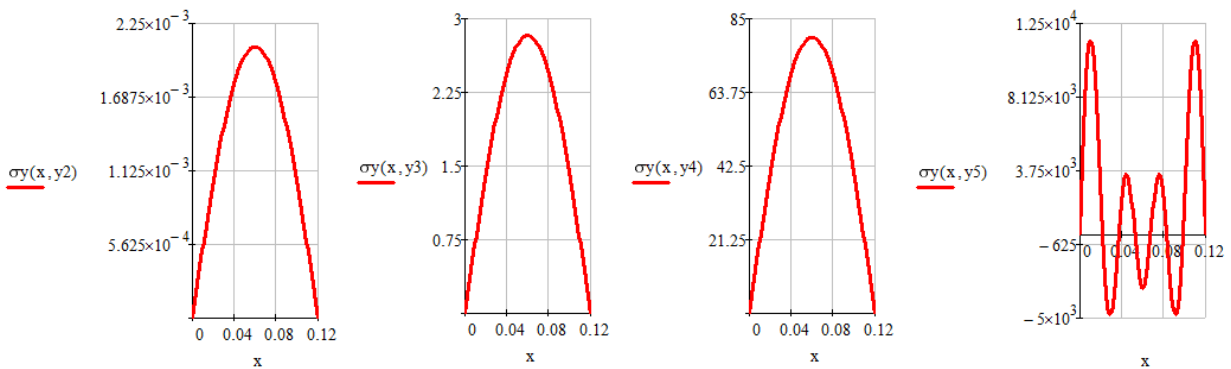
Рисунок 5 – Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$  по ширине сечения.

На рисунке 5 обозначено:  $y_2 = \pm \frac{b}{4}$ ;  $y_3 = \pm \frac{3b}{8}$ ;  $y_4 = \pm \frac{7b}{16}$ ;  $y_5 = \pm \frac{b}{2}$ ,

причём знак "+" соответствует нижней половине стержня, знак "-" - верхней половине.

Нормальные напряжения  $\sigma_y$  распределяются как по высоте, так и по ширине сечения в области, примыкающей к торцам стержня, также крайне неравномерно. На боковых сторонах стержня при  $x=0$  и  $x=a$ , а также на средней линии стержня при  $y=0$  напряжения  $\sigma_y$  равны нулю. На рисунке 6 показано распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по ширине сечения на разных уровнях для верхней ( $y < 0$ ) и нижней ( $y > 0$ ) половинок стержня.

$y < 0$



$y > 0$

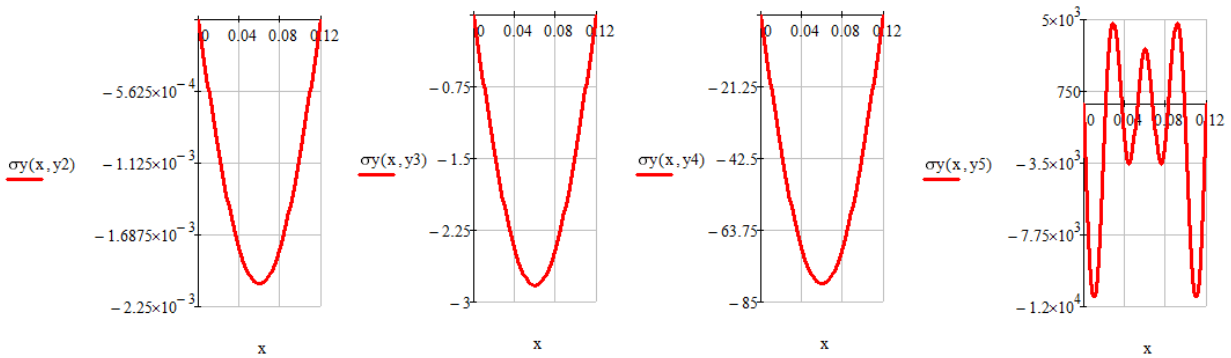


Рисунок 6 – Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_y$  по ширине сечения.

На рисунке 6 обозначено:  $y_2 = \frac{b}{4}$ ;  $y_3 = \frac{3b}{8}$ ;  $y_4 = \frac{7b}{16}$ ;  $y_5 = \frac{b}{2}$ .

Из рисунка 6 следует, что нормальные напряжения  $\sigma_y$  изменяются по ширине сечения по кривой, похожей на параболу второго порядка.

Интенсивность напряжений при удалении от средней линии стержня к его торцам увеличивается по абсолютной величине.

Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_y$  по длине стержня показан на рисунке 7.

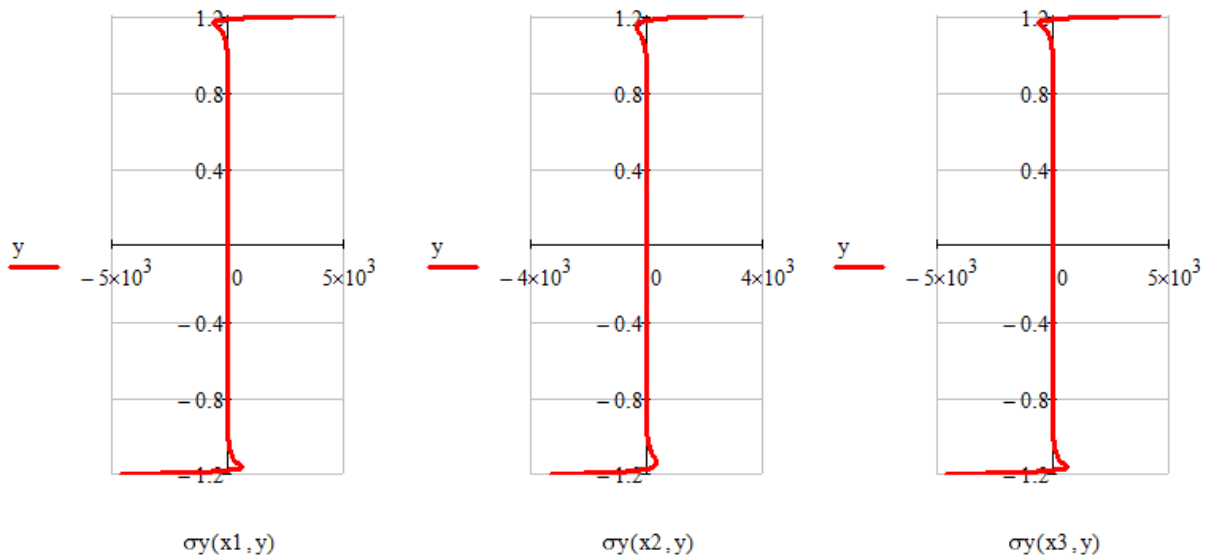


Рисунок 7 – Характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_y$  по длине стержня.

На рисунке 7 обозначено:  $x_1 = \frac{a}{4}$ ;  $x_2 = \frac{a}{2}$ ;  $x_3 = \frac{3a}{4}$ .

Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  изменяются вдоль высоты, в частности и вдоль боковых сторон (для  $x=0$  и  $x=a$ ) в области, примыкающей к торцам стержня, крайне неравномерно. На продольной оси стержня касательные напряжения  $\tau_{xy}$  равны нулю. На рисунке 8 представлено распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}$  вдоль длины стержня.

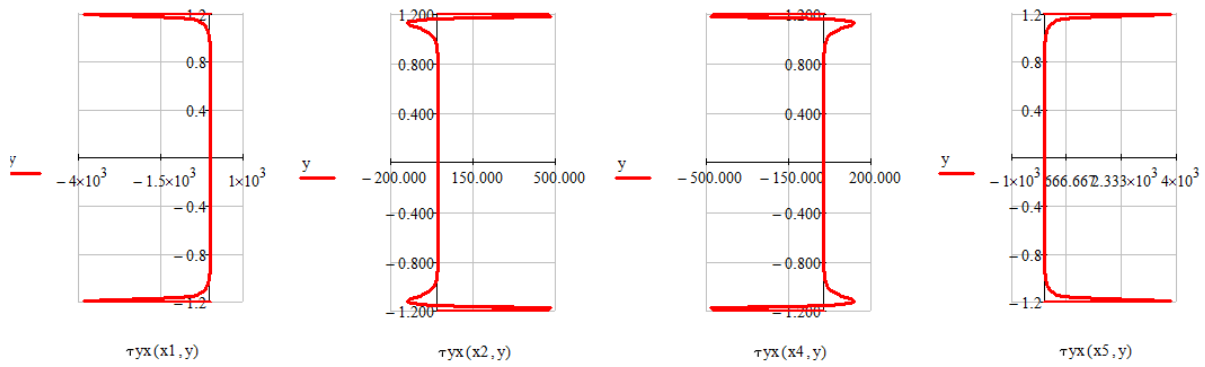


Рисунок 8 – Характер распределения касательных напряжений  $\tau_{xy}$  по длине стержня.

На рисунке 8 обозначено:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{a}{4}$ ;  $x_4 = \frac{3a}{4}$ ;  $x_5 = a$ .

На рисунке 9 показан характер распределения касательных напряжений по ширине сечения стержня для различных уровней поперечных сечений.

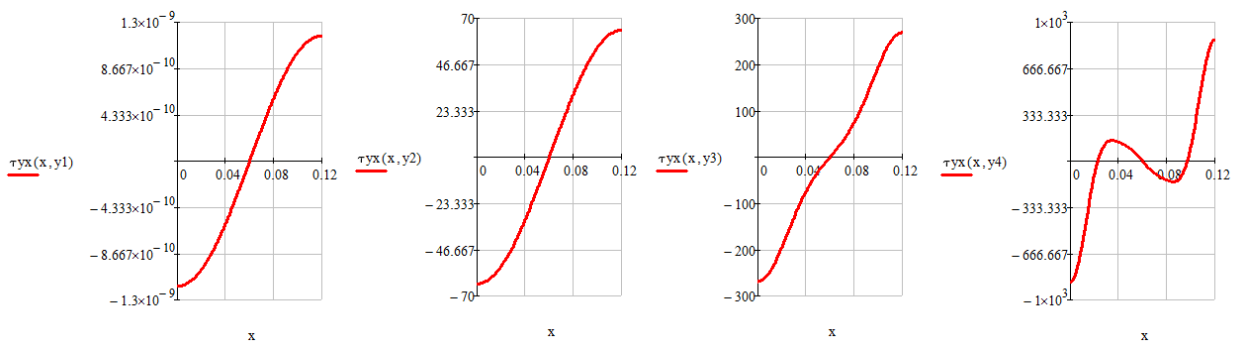


Рисунок 9 – Характер распределения касательных напряжений  $\tau_{xy}$  по ширине сечения.

На рисунке 9 обозначено:  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = \frac{7b}{16}$ ;  $y_3 = \frac{15b}{32}$ ;  $y_4 = \frac{31b}{64}$ .

Вычисление перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  выполнялось по формулам (11). На рисунке 10 показаны эпюры горизонтальных  $u(x, y)$  и вертикальных  $v(x, y)$  перемещений по длине стержня для различных вертикальных сечений. Следует отметить, что перемещения  $u(x, y)$  на продольной оси стержня ( $x = 0$ )

равны нулю, а перемещения  $v(x, y)$  вдоль боковых сторон стержня ( $x=0$  и  $x=a$ ) равны нулю, однако достигают наибольших значений на малом удалении от боковых сторон. В среднем поперечном сечении стержня и поперечные перемещения  $u(x, y)$ , и продольные перемещения  $v(x, y)$  стремятся к нулю. В областях, примыкающих к торцам стержня, наблюдается крайне неравномерное распределение и продольных  $v(x, y)$ , и поперечных  $u(x, y)$  перемещений.

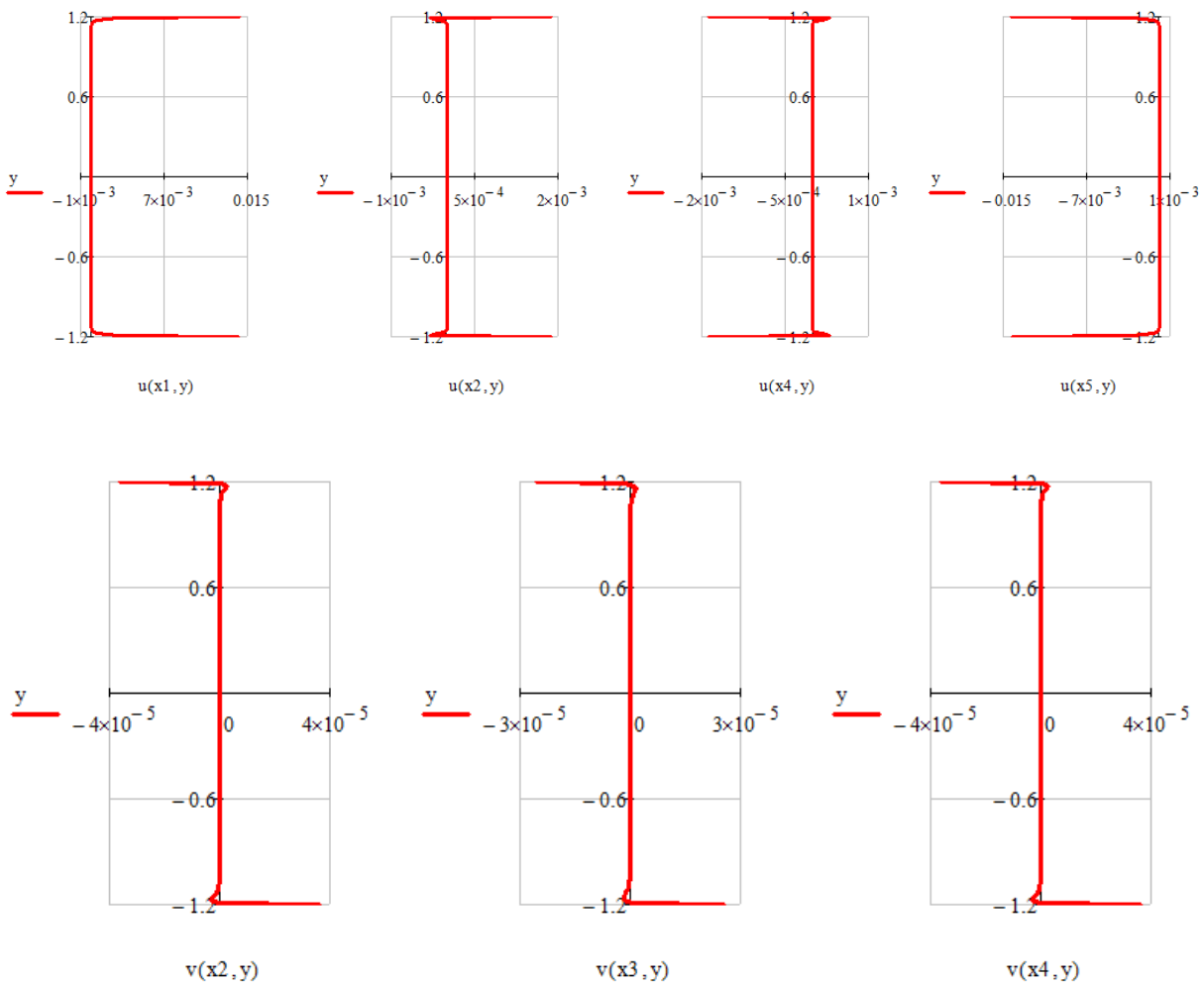


Рисунок 10 – Характер распределения перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  по длине стержня.

На рисунке 10 обозначено:

- на эпюрах перемещений  $u(x, y)$ :  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{a}{4}$ ;  $x_4 = \frac{3a}{4}$ ;  $x_5 = a$ ;

- на эпюрах перемещений  $v(x, y)$ :  $x_2 = \frac{a}{4}$ ;  $x_3 = \frac{a}{2}$ ;  $x_4 = \frac{3a}{4}$ .

На рисунке 11 показан характер распределения перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  по ширине поперечного сечения стержня. Расчёты показывают, что продольные перемещения  $v(x, y)$  изменяются по ширине поперечного сечения стержня по кривой, похожей на параболу второго порядка. Величина продольных перемещений увеличивается при удалении от средней линии ( $y = 0$ ) стержня.

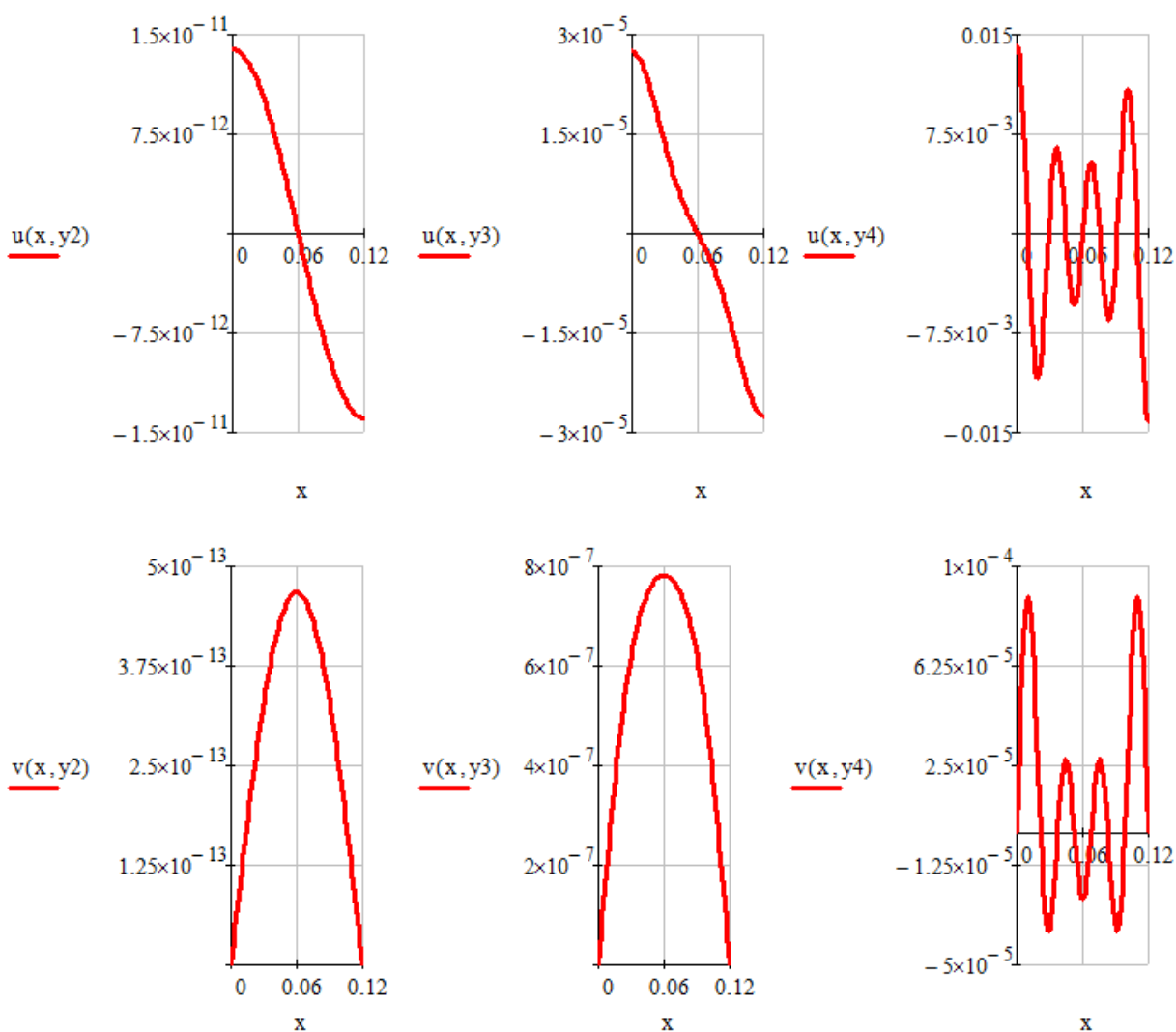


Рисунок 11 – Характер распределения перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  по ширине поперечного сечения стержня.

На рисунке 11 обозначено:  $y_2 = \frac{b}{4}$ ;  $y_3 = \frac{15b}{32}$ ;  $y_4 = \frac{b}{2}$ .

Численные значения напряжений  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  и  $\tau_{xy}(x, y)$ , а также перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  для участка стержня  $-\frac{3b}{8} \leq y \leq \frac{3b}{8}$ , т.е. исключая неравномерность напряжённо-деформированного состояния в областях, примыкающих к торцам стержня, сведены в таблице 1.

Таблица 1 – Характеристики НДС

Характеристики НДС	$x, \text{ м}$	$y = 0, \text{ м}$	$y = \frac{b}{8}$	$y = \frac{b}{4}$	$y = \frac{3b}{8}$
$\sigma_x, \text{ МПа}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\frac{a}{4}$	0,0	$7,680 \cdot 10^{-10}$	$1,290 \cdot 10^{-6}$	$1,548 \cdot 10^{-2}$
	$\frac{a}{2}$	0,0	$1,086 \cdot 10^{-9}$	$1,824 \cdot 10^{-6}$	$2,189 \cdot 10^{-2}$
	$\frac{3a}{4}$	0,0	$7,680 \cdot 10^{-10}$	$1,290 \cdot 10^{-6}$	$1,548 \cdot 10^{-2}$
	$a$	0,0	0,0	0,0	0,0
$\sigma_y, \text{ МПа}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\frac{a}{4}$	0,0	$-8,361 \cdot 10^{-10}$	$-1,465 \cdot 10^{-6}$	$-2,000 \cdot 10^{-2}$
	$\frac{a}{2}$	0,0	$-1,182 \cdot 10^{-9}$	$-2,072 \cdot 10^{-6}$	$-2,828 \cdot 10^{-2}$
	$\frac{3a}{4}$	0,0	$-8,361 \cdot 10^{-10}$	$-1,465 \cdot 10^{-6}$	$-2,000 \cdot 10^{-2}$
	$a$	0,0	0,0	0,0	0,0
$\tau_{xy}, \text{ МПа}$	0,0	$-1,174 \cdot 10^{-12}$	$-1,134 \cdot 10^{-9}$	$-1,194 \cdot 10^{-6}$	$-2,509 \cdot 10^{-2}$
	$\frac{a}{4}$	$-8,303 \cdot 10^{-13}$	$-8,021 \cdot 10^{-10}$	$-1,377 \cdot 10^{-6}$	$-1,774 \cdot 10^{-2}$



Продолжение таблицы 1

Характеристики НДС	$x, \text{ м}$	$y=0, \text{ м}$	$y = \frac{b}{8}$	$y = \frac{b}{4}$	$y = \frac{3b}{8}$
$\tau_{xy}, \text{ МПа}$	$\frac{a}{2}$	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\frac{3a}{4}$	$8,303 \cdot 10^{-13}$	$8,021 \cdot 10^{-10}$	$1,377 \cdot 10^{-6}$	$1,774 \cdot 10^{-2}$
	$a$	$1,174 \cdot 10^{-12}$	$1,134 \cdot 10^{-9}$	$1,948 \cdot 10^{-6}$	$2,509 \cdot 10^{-2}$
$u, \text{ м}$	0,0	0,0	$2,939 \cdot 10^{-15}$	$1,390 \cdot 10^{-11}$	$5,212 \cdot 10^{-8}$
	$\frac{a}{4}$	0,0	$2,078 \cdot 10^{-15}$	$9,830 \cdot 10^{-12}$	$3,685 \cdot 10^{-8}$
	$\frac{a}{2}$	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\frac{3a}{4}$	0,0	$-2,078 \cdot 10^{-15}$	$-9,830 \cdot 10^{-12}$	$-3,685 \cdot 10^{-8}$
	$a$	0,0	$-2,939 \cdot 10^{-15}$	$-1,390 \cdot 10^{-11}$	$-5,212 \cdot 10^{-8}$
$v, \text{ м}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\frac{a}{4}$	0,0	0,0	$3,303 \cdot 10^{-13}$	$1,291 \cdot 10^{-9}$
	$\frac{a}{2}$	0,0	0,0	$4,671 \cdot 10^{-13}$	$1,82 \cdot 10^{-9}$
	$\frac{3a}{4}$	0,0	0,0	$3,303 \cdot 10^{-13}$	$1,291 \cdot 10^{-9}$
	$a$	0,0	0,0	0,0	0,0

**Выводы:**

1. Результаты выполненных исследований показывают, что использование тригонометрических рядов для оценки напряжений и перемещений в тонких упругих стержнях при задании внешней нагрузки в виде сосредоточенных сил, заданных по закону степенной функции с большим отрицательным показателем степени является приемлемым для участков

стержня несколько удалённых от его торцов. Действие сосредоточенных сил приводит к существенному искажению характера распределения и напряжений, и перемещений в областях, примыкающих к концам стержня.

2. Нормальные напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных к продольной оси стержня не остаются постоянными по длине стержня, а монотонно возрастают от нуля на средней линии стержня. Это обстоятельство противоречит классической теории растяжения тонких упругих стержней.

3. Вдоль боковых сторон стержня, свободных от внешней нагрузки, возникают касательные напряжения, интенсивность которых одного порядка с касательными напряжениями, возникающими на площадках внутри стержня. Это обстоятельство согласуется с теорией расчёта конструкций при помощи тригонометрических рядов Фурье.

#### **Библиографический список:**

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М.: Высшая шк., 2003. 560 с.

2. Бакушев С.В., Быкова Е.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния стержня при отказе от гипотезы Я.Бернулли [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no3/stroitel'naya-mehanika/3.11/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no3/stroitel'naya-mehanika/3.11/at_download/file).

3. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. спец. вузов. М.: Высш. шк., 2002. 400 с.

4. Бакушев С.В. Теория упругости. Краткий практический курс. Пенза: ПГУАС, 2016. 256 с.