

УДК 624.048

**АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРОЕКТОВ
СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ**

Мищенко Андрей Викторович,

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин), г. Новосибирск,*

*доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Строительная
механика».*

Калинкин Сергей Александрович,

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин), г. Новосибирск,*

студент.

Аннотация

Выполнено сравнение результатов решения задачи рационального проектирования неоднородного стержня двутаврового сечения с численным расчетом стержня по методу конечных элементов в среде *Ansys-16*. Расчетное профилирование ширины полок двутавра обеспечивает непрерывное по продольной координате выполнение критерия прочности в форме одно- либо двухточечного равенства. В основной части объема стержня получено хорошее совпадение результатов за исключением зон краевых эффектов, расположенных в местах приложения нагрузки, в окрестности жесткого закрепления и в местах соединения полок двутавра со стенкой.

Ключевые слова: композитный стержень, рациональное проектирование, непрерывный критерий прочности, метод конечных элементов, напряжённое состояние, краевой эффект, *Ansys*.

ANALYSIS OF STRES-STRAIN STATE OF RATIONAL PROJECTS OF LAYERED INHOMOGENEOUS RODS

Mishchenko Andrey Viktorovich,

*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin),
Novosibirsk,*

*Doctor of Sciences, Associate Professor, Professor of the department “Structural
Mechanics”.*

Kalinkin Sergey Alexandrovich,

*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin),
Novosibirsk,*

student.

Abstract

We performed the comparison of the results of solving the problem of the rational design of an inhomogeneous rod of I-section with a numerical calculation of the rod according to the finite element method in the environment *Ansys-16*. Expected profiling of I-beam flange width ensures continuous along the longitudinal coordinate the implementation of the criterion of strength in the form of one- or two-point equality. In the main part of the volume of the rod is received good agreement except for edge effects zones located in areas of load application, in the vicinity of and rigidly fixed at the joints with the wall I-beam flanges.

In the main part of the rod's volume there is received a good agreement except for edge effects zones located in areas of load application, in the vicinity of the rigid fixation and at the joints of the shelves of I-beam with the wall.

Keywords: composite rod, rational design, continuous criterion of strength, finite element method, stress state, border effect, *Ansys*.

Введение. Область применения неоднородных конструкций в различных отраслях техники в настоящее время неуклонно расширяется, что объясняется их существенными преимуществами по сравнению с традиционными

однородными конструкциями. Применяемые в расчетах неоднородных структур математические модели, в силу сложности объекта исследования, неизбежно содержат ряд упрощающих гипотез и являются результатом компромиссного удовлетворения требований точности и трудоемкости. Нередко высказывается мнение, что классические гипотезы Кирхгофа-Лява, Бернулли-Эйлера, Тимошенко, хорошо зарекомендовавшие себя (при соответствующих ограничениях) для однородных деформируемых систем, малопригодны в расчетах неоднородных систем. В этой связи практический интерес представляет оценка погрешностей результатов расчетов неоднородных систем, выполненных на основе численно-аналитических методов расчета с использованием классических гипотез при сопоставлении с универсальным конечно-элементным подходом либо уточненными неклассическими теориями. Вопросы анализа напряженного состояния неоднородных систем посвящены многие работы, например, [1–5] и ряд других. Как правило, в них рассматривались элементы конструкций относительно простой геометрической формы – призматические стержни, пластины постоянной толщины.

В данной статье исследован оптимизированный слоисто-неоднородный стержень переменного поперечного сечения, продольное профилирование слоев в котором выполнено по численно-аналитической методике рационального проектирования стержневых систем [6]. Тестирование результатов выполнено путем сопоставления с КЭ расчетом по программе *Ansys-16*.

1. Композитный стержень имеет поперечно-слоистую структуру, геометрически оформленную в виде составного неоднородного двутавра (рисунок 1), в котором при силовом воздействии выявлены рациональные законы изменения ширины наружных слоев $b_1(x)$, $b_3(x)$ при использовании ограничений $b_{1,3}(x) \geq b_{\min}$. Первый (нижний) слой изготовлен из титанового сплава ВТ1, второй – из стали марки С345, третий – из стали марки 10Г2С.

При построении расчетной модели использованы классические гипотезы

Тимошенко

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_0(x) - \kappa(x)y, \quad \varepsilon_y(x, y) = 0, \quad \gamma_{yx}(x, y) = -\gamma_0(x), \quad (1)$$

$$\varepsilon_0(x) = u', \quad \kappa(x, t) = \theta', \quad \theta(x, t) = v' + \gamma_0, \quad ()' = \partial() / \partial x. \quad (2)$$

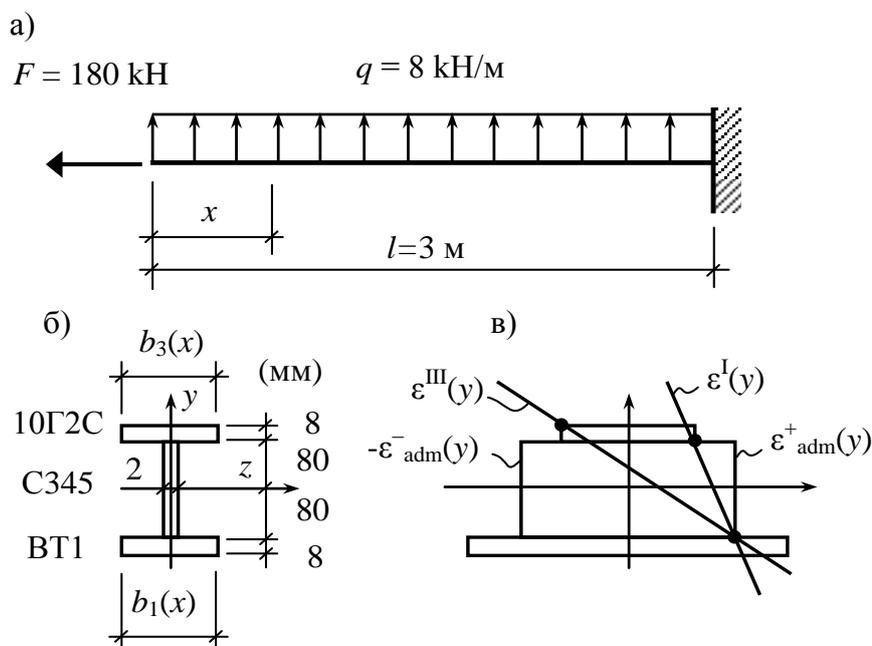


Рисунок 1 – Расчетная схема композитного стержня (а), поперечное сечение (б), полигон предельных деформаций (в).

$\varepsilon^I(y)$, $\varepsilon^{III}(y)$ – распределения деформаций по первому и третьему типам согласно рисунку 2.

Здесь u , v – перемещения, θ – угол поворота, ε_x , ε_y – деформации, γ_0 – осредненный по сечению угол сдвига.

В качестве критерия рациональности принято условие реализации предельного состояния поперечно-слоистой структуры при термо-силовом воздействии, которое сформулировано в виде *непрерывно-дискретного многоточечного расчетного критерия* (НДРК) [6]

$$\operatorname{sgn}(\varepsilon_x)[\varepsilon_0(x) - \kappa(x)y - \alpha_k T(x, y)] = \varepsilon_{adm}^{(k)\pm}, \quad (3)$$

$$x \in X, \quad y = \xi_1, \dots, \xi_{n_y} = Y_* \in Y.$$

Согласно условию (3), деформация ε_x достигает предельной для k -го материала величины

$$\varepsilon_{\text{adm}}^{(k)\pm} = \mu_k \frac{R_k^\pm}{k_u^\varepsilon E_k}, \quad \mu_k(x, y) = \frac{1}{2\phi_k} \left[(1 + \phi_k) \sqrt{1 - \phi_k \beta_k (\tau_{yx}/R_k^\pm)^2} + \phi_k - 1 \right] \quad (4)$$

непрерывно по продольной координате x в n_y уровнях по поперечной координате. При этом принимается во внимание заданный коэффициент запаса $k_u^\varepsilon \geq 1$ и коэффициент $\mu_k \leq 1$, учитывающий (согласно принятой теории прочности $\sigma_{\text{eqv}}^{(k)} = \Psi(\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}) \leq \sigma_s^{(k)}$) влияние касательных напряжений на величину расчетной деформации $\varepsilon_{\text{adm}}^{(k)\pm}$. В выражениях (3), (4): $n_y \geq 1$ – степень кратности критерия (3); $\sigma_s^{(k)}$, R_k^\pm , $E_k = E_{x,k}$ – предел текучести, расчетные сопротивления и модуль упругости k -го материала; ϕ_k , β_k – числовые параметры принятой теории прочности, в частности, по теории Мизеса–Генки имеем $\phi_k=1$, $\beta_k=3$.

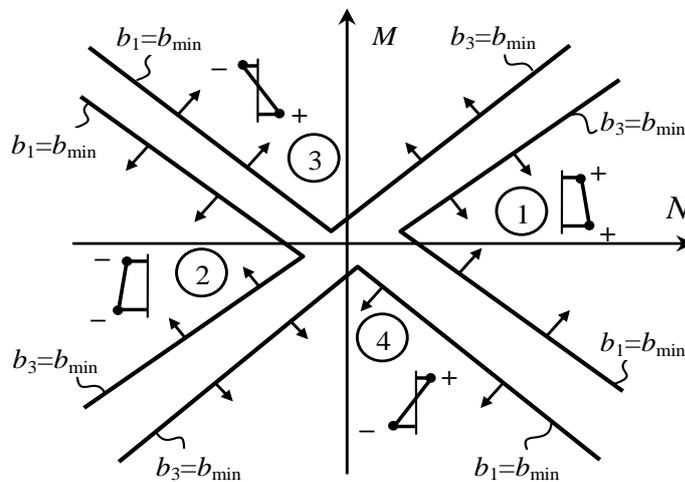


Рисунок 2 – Области инвариантных распределений деформаций в сечении с варьируемой шириной первого и третьего слоев

Использование критерия (3) в форме двухточечного равенства ($n_y = 2$) в сочетании с ограничениями $b_{1,3} \geq b_{\text{min}}$ позволяет выявить на плоскости усилий M , N четыре непересекающиеся области (рисунок 2), для которых рациональные решения характеризуются инвариантностью распределения

деформаций $\varepsilon_x(y)$ в поперечном сечении многослойного стержня [7, 8]. На границах областей один из геометрических параметров (b_1 или b_3) принимает минимальное значение b_{\min} . Стрелками показано направление градиента данного параметра.

На рисунке 3, а приведены графики изменения $b_1(x)$, $b_3(x)$, полученные по критерию (3) при следующих данных: $R_{1,2,3}^{\pm} = 310, 340, 215$ (МПа); $E_{1,2,3} = 112, 205, 210$ (ГПа); $b_{\min} = 20$ мм, $\mu_k = 1$. Применение расчетного параметра $\mu_k \leq 1$ приводило в данном случае к незначительным поправкам в деформациях и искомым геометрическим функциям на величины, не превышающие 1,4 %.

На первом (левом) участке стержня НДРК (3) выполнен в форме двухточечного равенства для двух опасных точек $y_{\xi_1} = y_2$, $y_{\xi_2} = y_3$, расположенных во втором и третьем слоях соответственно. Реализовано распределение деформаций $\varepsilon_x^I(y)$ 1 типа (рисунок 2, 1-в), инвариантное для всех сечений данного участка. На третьем – также имеем двухточечный НДРК, но с деформациями разных знаков по 3 типу ($\varepsilon_x^{III}(y)$ на рисунке 2, 1-в). Между первым и третьим участками расположен переходный участок, на котором, в силу активности ограничения $b_3(x) \geq b_{\min}$ критерий удается выполнить лишь форме одноточечного равенства при $y_{\xi_1} = y_2$. В этом случае распределение деформаций $\varepsilon_x(y)$ непрерывно по координате x трансформируются от 1 типа на левой границе до 3 типа – на правой (ниже это будет подтверждено КЭ расчетом и показано на рисунке 5).

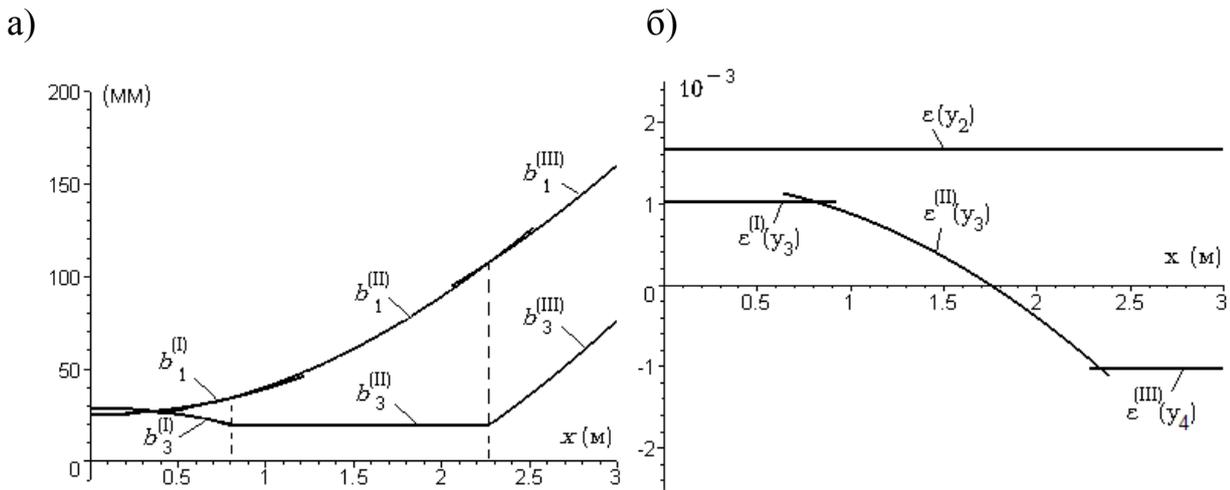


Рисунок 3 – Рациональное по НДРК продольное профилирование ширины нижнего b_1 и верхнего b_3 слоев (а); изменение деформации $\epsilon_x(x,y)$ в опасных точках (б).

2. Для численно-аналитического определения функций перемещений $\Delta_i(x) \in [u, v, \theta](x)$ используем метод Максвелла-Мора

$$\Delta_i(x) = \int_0^l M_i(x, \xi) \kappa_F(\xi) d\xi + \int_0^l N_i(x, \xi) \epsilon_{0F}(\xi) d\xi + \int_0^l Q_i(x, \xi) \gamma_{0F}(\xi) d\xi, \quad (4)$$

где $M_i(x, \xi)$, $N_i(x, \xi)$, $Q_i(x, \xi)$ – усилия в сечении стержня с координатой ξ при действии обобщенной единичной силы $F_i \in [F_x, F_y, M]$, расположенной в точке на оси стержня с координатой x ; $\kappa_F(\xi)$, $\epsilon_{0F}(\xi)$, $\gamma_{0F}(\xi)$ – функции кривизны, продольной деформации и поперечного сдвига отсчетной оси стержня при действии заданных нагрузок, для которых с использованием физических зависимостей [6], связывающих обобщенные усилия M_F , N_F , Q_F и деформации κ_F , ϵ_{0F} , γ_{0F} , получены формулы

$$\kappa_F = \frac{M_F + y_0 N_F}{D_I} \frac{1}{1 - (y_0/i_D)^2}, \quad \epsilon_{0F} = \frac{N_F + M_F y_0/i_D^2}{D_A} \frac{1}{1 - (y_0/i_D)^2},$$

$$\gamma_{0F} = \frac{Q_F}{D_Q}, \quad D_Q = b_0 G_0 \frac{D_I [1 - (y_0/i_D)^2]}{D_S^{\text{sec}}(y_0) - y_0 D_A^{\text{sec}}(y_0)},$$

$$D_A^{\text{sec}}(y) = \int_y^{y_{\text{max}}} E_k(\xi) b_k(\xi) d\xi, \quad D_S^{\text{sec}}(y) = \int_y^{y_{\text{max}}} E_k(\xi) b_k(\xi) \xi d\xi,$$

где D_I , D_S , D_A , D_Q – жесткостные характеристики сечения слоистого стержня; $y_0 = D_S/D_A$ – координата нейтральной оси в сечении при поперечном изгибе

($N = 0$); $i_D = \sqrt{D_I/D_A}$ – радиус жесткости сечения; b_0, G_0 – ширина сечения и модуль сдвига материала, расположенного в сечении в уровне y_0 .

При определении прогибов усилия от фиктивной нагрузки принимают вид: $M_i = x - \xi, Q_i = -1, N_i = 0$ – при $\xi \geq x$ и $M_i = Q_i = N_i = 0$ – при $\xi < x$.

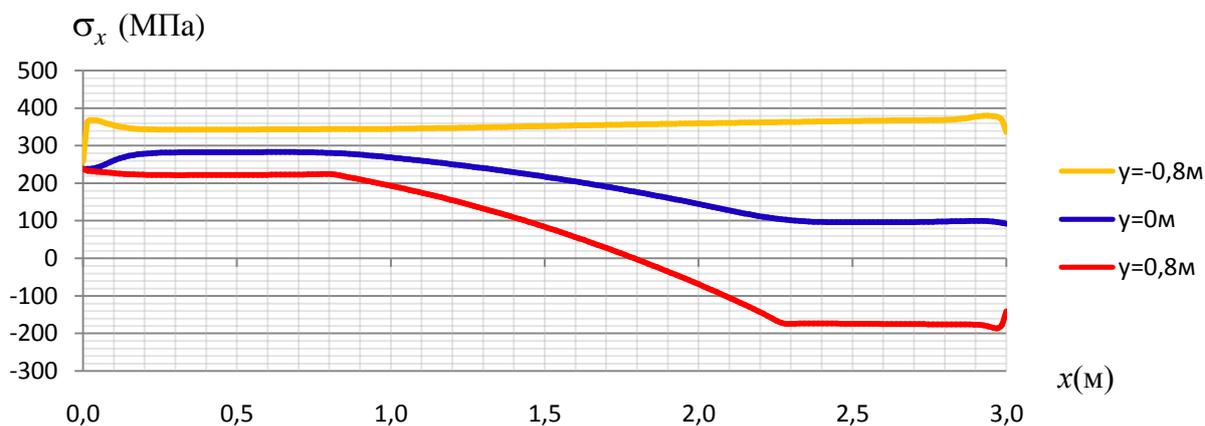


Рисунок 4 – Нормальные напряжения в стенке двутавра на разных уровнях y при $z = 0$.

3. Результаты конечно-элементного расчета. Для конечно-элементного тестирования стержня в среде *Ansys-16* с помощью встроенного *CAD* редактора *DesignModeler* была создана пространственная КЭ модель с общим числом элементов 743470 единиц. Сгущение сетки произведено в продольном направлении в окрестности концов стержня при $x = 0, x = 3$ м и в поперечном – в местах соединения стенки с полками. Погрешности в массах слоев КЭ модели по отношению к проекту, полученному аналитическим расчетом, не превышали 0,01%. В сечении $x = 3$ м запрещены перемещения и повороты относительно координатных осей. Для передачи нагрузок были заданы нормальные давления: $p_x = F/A_0$ – на левом торце $x = 0$ площадью A_0 и $p_y(x) = q/b_3(x)$ – на верхней поверхности.

В результате КЭ расчета получены пространственные поля напряжений, деформаций и перемещений узлов модели. На рисунке 4 приведены эпюры напряжений $\sigma_x(x)$, действующих в стенке двутавра на различных уровнях y . В

основной части интервала $x \in [0, 3]$ данные напряжения хорошо соответствуют деформациям $\varepsilon_x(x)$ аналитического расчета (рисунок 3), подтверждая реализацию созданного путем расчетного профилирования стержня двухточечного (на первом и третьем участках) и одноточечного (на втором) НДС. В окрестностях концов стержня $x = 0$, $x = 3$ в пределах участков длиной $(0,03 \div 0,07)l$ или $(0,5 \div 1,0)h$ наблюдаются локальные особенности в напряжениях – краевые эффекты. Со стороны внутренних границ в данных зонах происходит локальный рост напряжений на величину около 6–10% от номинальных значений с последующим падением на 20–24% на краях стержня. За пределами этих зон краевые эффекты быстро затухают и в основной части стержня напряжение σ_x весьма хорошо согласуется с аналитическим решением.

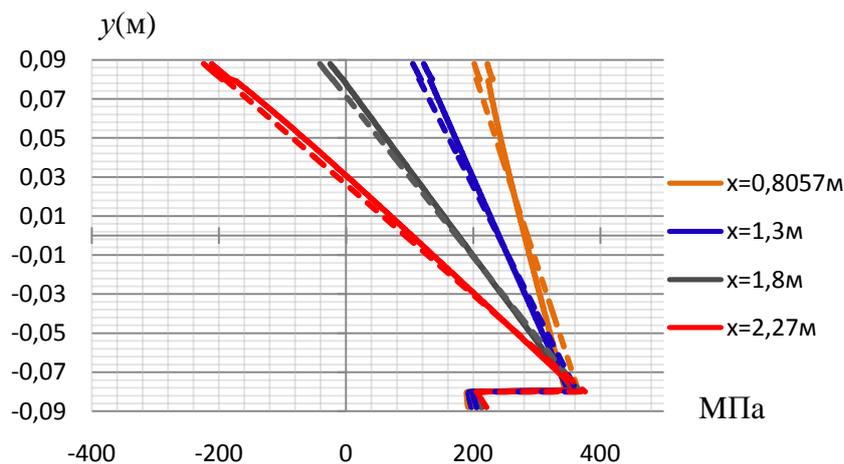


Рисунок 5 – Эпюры напряжений $\sigma_x(y)$ на втором участке стержня при $x = 0,8057; 1,3; 1,8; 2,27$ м, $z = 0$. Сплошная линия – МКЭ, пунктир – аналитический расчет.

На первом участке $x \in [0; 0,8]$ имеем напряжения $\sigma_x(y)$ одного знака по координате y , а на третьем $x \in [2,25; 3]$ – разных знаков, что соответствует первому и третьему типам решения (рисунок 2) по двухточечному НДС. Непрерывная трансформация напряженного состояния наблюдается на участке $x \in [0,8; 2,25]$ при выполнении одноточечного НДС в расчетной точке

$y = 0,08$ м, что отражают эпюры, показанные на рисунке 5, а также схемы на рисунках 3б и 4.

Компоненты тензора напряжений σ_y , σ_z (рисунок 6) имеют малые значения, не превышающие 1–1,5% от σ_x , что подтверждает правомерность принятия в ряде случаев гипотезы об одноосности напряженного состояния в расчетах тонких стержней. Данные эпюры показывают, что зоны краевых эффектов образуются также и в направлении поперечной оси y в окрестностях соединения тонкой стенки с полками двутавра, выступающих в роли концентраторов напряжений. Согласно граничным условиям имеем $\sigma_y(0,88) = q/b(x) = 0,4$ МПа, $\sigma_z(0,88) = \sigma_z(-0,88) = \sigma_y(-0,88) = 0$.

а) σ_y

б) σ_z

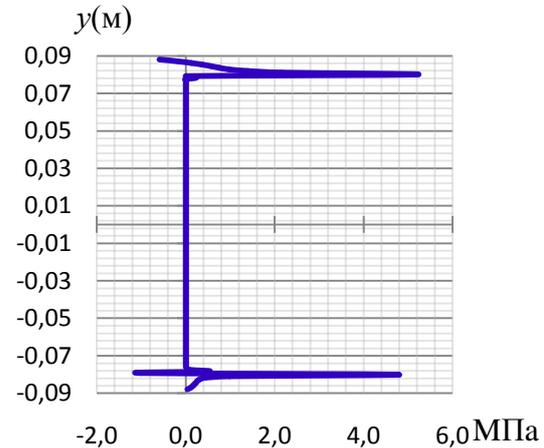
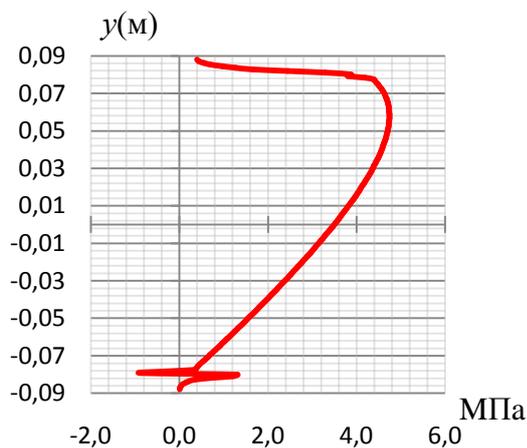


Рисунок 6 – Нормальные напряжения $\sigma_y(y)$, $\sigma_z(y)$ при $x = 0,8057$ м, $z = 0$.

На рисунке 7 показаны эпюры компонент касательных напряжений, найденные аналитическим расчетом по формулам

$$\tau_{yx}^N = -\frac{N}{b_k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D_A^{\text{sec}} - y_0 / (i_D)^2 D_S^{\text{sec}}}{D_A [1 - (y_0 / i_D)^2]} \right),$$

$$\tau_{yx}^M = \frac{M}{b_k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D_S^{\text{sec}} - y_0 D_A^{\text{sec}}}{D_I [1 - (y_0 / i_D)^2]} \right), \quad \tau_{yx}^Q = \frac{Q}{b_k} \frac{D_S^{\text{sec}} - y_0 D_A^{\text{sec}}}{D_I [1 - (y_0 / i_D)^2]},$$

полученным в [6, 9] с использованием условий равновесия.

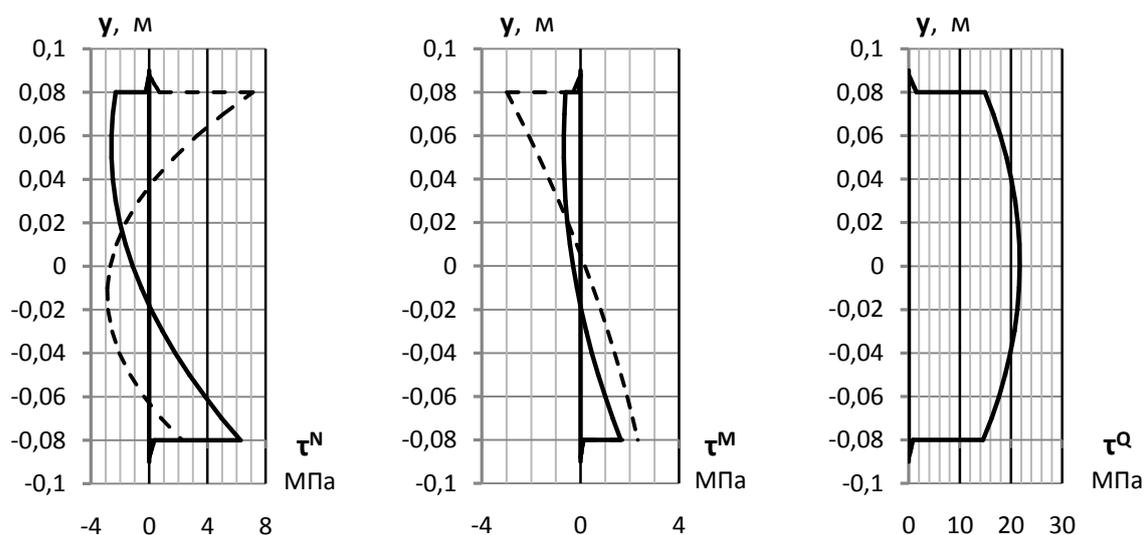


Рисунок 7 – Компоненты касательных напряжений τ^N_{yx} , τ^M_{yx} , τ^Q_{yx} в сечении $x = 0,8057$ первого (линии - - -) и второго (линии —) участка – аналитический расчет.

Напряжение τ^Q_{yx} зависит лишь от параметров поперечного сечения, а на компоненты τ^N_{yx} , τ^M_{yx} , влияют и градиенты жесткостных характеристик в направлении продольной оси. Вследствие этого на границе первого и второго участков профилирования стержня эти напряжения различны (см. линии — и - - - на рисунке 7). В целом величина этих напряжений в 4–7 раз меньше касательных напряжений τ^Q_{yx} и в 60–110 раз – нормальных σ_x . Очевидно, что в призматических стержнях постоянного поперечного сечения напряжения, зависящие от продольной силы и изгибающего момента (а также температурные касательные напряжения [9]) отсутствуют.

На рисунке 8 показаны суммарные поперечные касательные напряжения τ_{yx} аналитического расчета, действующие в сечениях первого и второго участков вблизи границы $x = 0,8057$ м, а также их сопоставление с численным расчетом по МКЭ. При численном КЭ расчете имеем усредненное отражение аналитического скачка данных напряжений в пределах нескольких шагов КЭ сетки. При удалении от данной зоны отличие аналитических и численных напряжений в наиболее нагруженных точках составляет 5–9%.

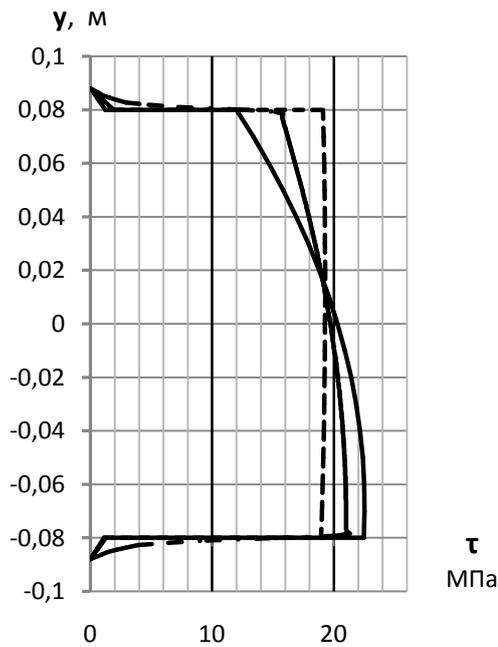
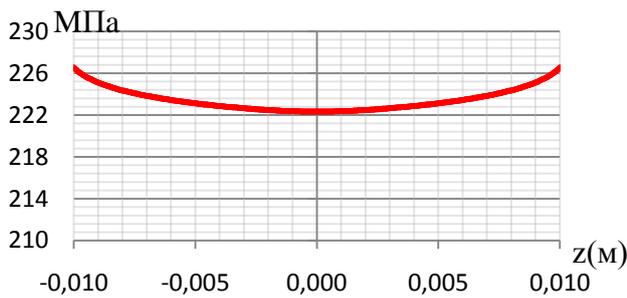


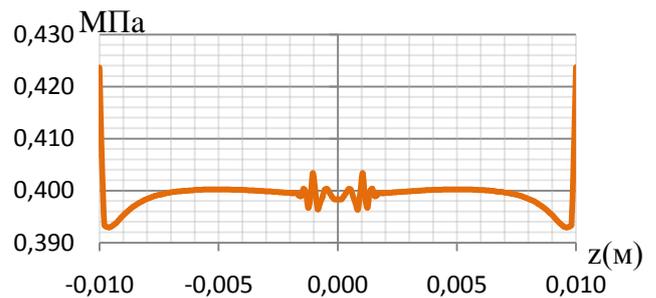
Рисунок 8 – Поперечные касательные напряжения τ_{yx} в сечении $x = 0,8057$ на границе первого и второго участков профилирования.

— - первый участок,
 - - - - второй участок,
 - · - · - - МКЭ ($z = 0$).

а) σ_x



б) σ_y



в) σ_z

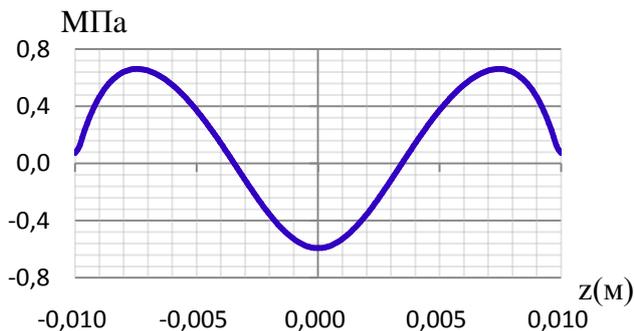


Рисунок 9 – Напряжения в сечении $x = 0,8057$ м ($y = 0,088$ м).

КЭ расчетом выявлена неоднородность напряженного состояния в направлении поперечной координаты z , перпендикулярном плоскости изгиба. С этой целью на рисунке 9 показаны эпюры напряжений $\sigma_x(z)$, $\sigma_y(z)$, $\sigma_z(z)$, действующих в верхней полке сечения при $x = 0,8$ м, $y = 0,88$ м. Их анализ показывает, что компоненты $\sigma_y(z)$, $\sigma_z(z)$, характерные для пространственного

напряженного состояния, весьма малы и не превышают $(0,02-0,03)\sigma_x$, что граничит с величинами погрешности вычислений. Отличие в значениях основной компоненты $\sigma_x(z)$ в точках, лежащих на оси симметрии $z = 0$ и на краях полки $z = \pm 0,01$ м, составило 2,7%.

Эпюра для компоненты σ_y отражает наличие краевых эффектов по координате z : они образуются на краях полки и в окрестности соединения ее со стенкой двутавра.

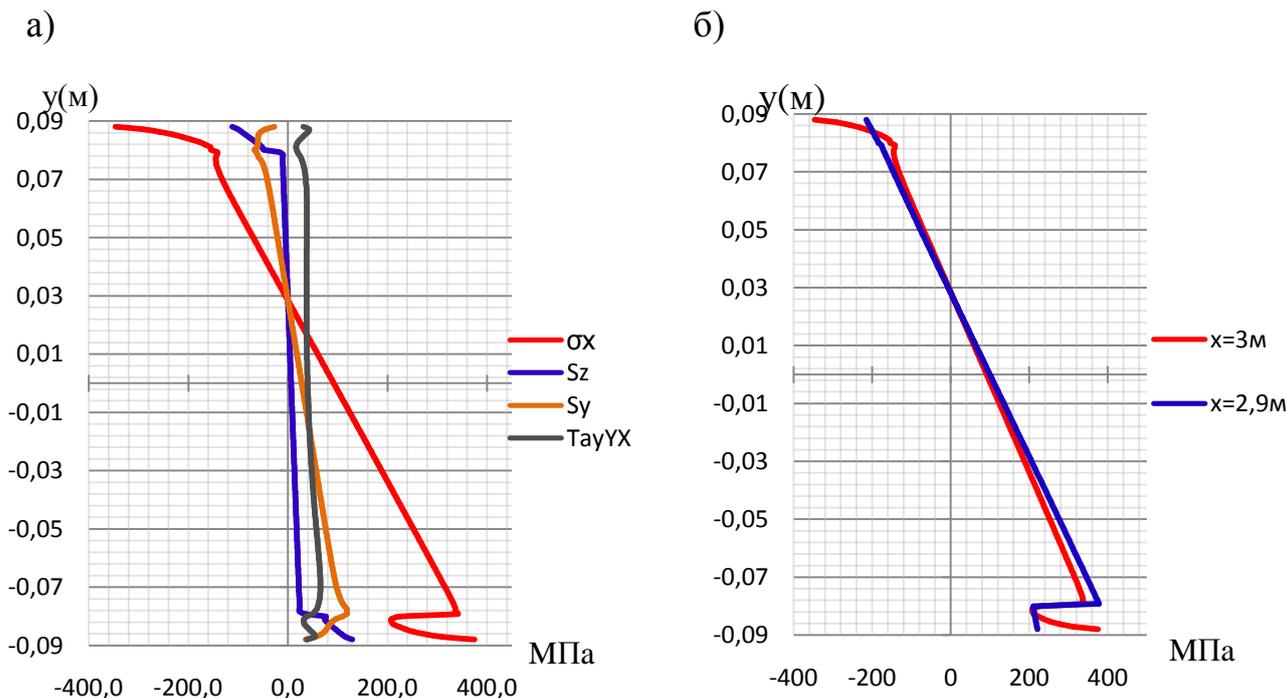


Рисунок 10 – Напряжения σ_x , σ_z , σ_y , τ_{yx} в сечении $x = 3$ м (а);
напряжения σ_x в сечении $x = 3$ м, $x = 2,9$ м (б).

На рисунке 10, а приведены эпюры напряжений $\sigma_x(y)$, $\sigma_y(y)$, $\sigma_z(y)$, $\tau_{yx}(y)$, действующих в жесткой заделке стержня при $z = 3$ на линии $z = 0$. В окрестности точек $y = y_{\max}$, y_{\min} для них также характерно наличие краевых эффектов, но, в отличие от эффектов, обсуждавшихся выше, здесь отличие от уровня номинальных напряжений существенно выше. Разность напряжений σ_x при аналитическом и КЭ расчетах составляет около 150 МПа на наружных фибрах. Как показано на рисунке 10, б при удалении от заделки на небольшое расстояние (около $0,5h$) краевой эффект практически исчезает. Значения

компонент σ_y , σ_z , τ_{yx} сопоставимы с σ_x , что свидетельствует о реализации в окрестности жесткой заделки объемного напряженного состояния.

На рисунке 11 показан график прогибов $v(x)$ отсчетной оси стержня, найденных по различным теориям и методам. Погрешность максимальных значений, найденных по теориям Тимошенко и Бернулли составила 6,0% и 2,6% по отношению к МКЭ, что свидетельствует о хорошем соответствии результатов аналитических и численных расчетов перемещений, о малом влиянии локальных зон краевых эффектов в компонентах деформаций на общее деформированное состояние.

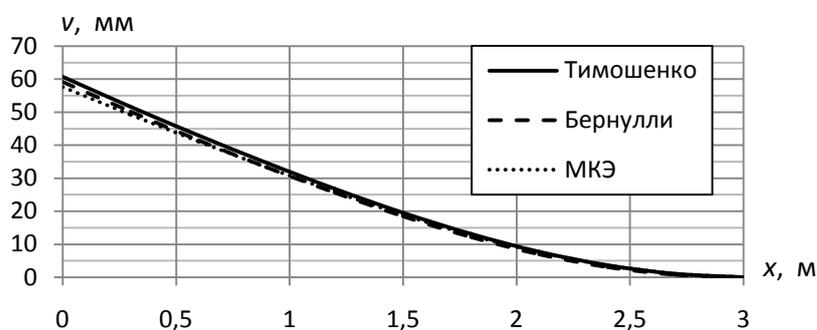


Рисунок 11 –
Перемещения $v(x)$
точек оси
стержня.

4. Выводы

4.1. Численно-аналитическое решение для тонких профилированных слоисто-неоднородных стержней, основанное на гипотезах Тимошенко и Бернулли, хорошо согласуется с решением по МКЭ в основной части объема стержня. Среди компонент пространственного тензора напряжений основными, влияющими на напряженное состояние и оценку прочности в основной части стержня, являются: продольное нормальное напряжение σ_x и поперечное касательное τ_{yx} .

4.2. В профилированном стержне возникают зоны ярко выраженных краевых эффектов, среди которых: окрестности мест приложения сосредоточенных нагрузок и закреплений стержня, требующие специального рассмотрения, расчета и конструирования без привлечения кинематических гипотез.

4.3. Зоны краевых эффектов, расположенные на границах соединения стенки с полками двутавра, а также на краях полок, малосущественны при оценке напряженного состояния и прочности.

4.4. Локальные особенности напряженно-деформированного состояния, выявленные КЭ расчетом, несущественны для интегральных величин, таких как перемещения, которые хорошо соответствуют моделям стержней Тимошенко и Бернулли.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00102

Библиографический список:

1. Быстров В.М., Коханенко В.М., Зеленский В.С. Численное исследование затухания краевых эффектов слоистых металлических материалах // Прикладная механика. 1997. Т. 33, № 12. С. 50-59.

2. Горынин Г.Л., Каменцев Д.В. Анализ пространственного напряженно-деформированного состояния слоистой балки // Проблемы оптимального проектирования сооружений: сборник докладов V-го Всероссийского семинара. Новосибирск: НГАСУ, 2005. С. 92-100.

3. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Пограничный слой в слоистом стержне // Научный вестник НГТУ. 2004. № 1(16). С. 21-36.

4. Гузь А.Н., Коханенко Ю.В., Быстров В.М. Численное исследование краевого эффекта в слоистых композитах // Механика композитных материалов. 1986. № 2. С. 216-220.

5. Янковский А.П., Немировский Ю.В. Особенности деформирования образцов с покрытиями при локализованных нагрузениях // Физическая мезомеханика. 2007. Т. 10. № 2. С. 29-42.

6. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Структурно-неоднородные профилированные стержневые системы. Методы рационального и оптимального проектирования. Saarbrucken: Palmarium academic publishing, 2016. 322 с.

7. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Подклассы равнопрочных композитных рамных систем // Известия вузов. Строительство. 1998. № 7. С. 15-21.

8. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Условия реализации общего решения задачи проектирования равнопрочных рам // Известия вузов. Строительство. 1999. № 11. С. 14-19.

9. Мищенко А.В. Напряжения в слоистых стержнях переменного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13. № 4. С. 537-547.