УДК 624.04

АЛГОРИТМ РАСЧЁТА РАМЫ НА КОЛЕБАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Монахов Владимир Андреевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Сухов Ярослав Игоревич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Сорокин Дмитрий Сергеевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Саакян Роза Юрьевна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Аннотация

Предложена методика расчёта рамы на колебания путём автоматического формирования матрицы податливости на основе геометрической матрицы с использованием ПЭВМ. Построение геометрической матрицы осуществляется на базе графа стержневой системы в сочетании с матричными преобразованиями векторов перемещений при переходе от локальных систем координат к глобальной системе. Композиция всего лишь трёх матриц стержневой системы: матрицы инцидентности графа, характеризующей топологическую структуру расчётной схемы, матрицы вращения вектора перемещений и матрицы длин стержней решает данную проблему полностью.

Определение спектра частот и усилий в раме при действии периодической нагрузки выполняется в согласии с общеизвестным алгоритмом динамического расчёта стержневой системы путём решения уравнений движения, представленных в форме метода сил.

Ключевые слова: стержневая система, периодическая нагрузка, граф рамы, матрица инцидентности, геометрическая матрица, матрица податливости, спектр частот, внутренние усилия.

THE ALGORITHM FOR CALCULATING THE FRAME FOR OSCILLATION USING THE GEOMETRIC MATRIX

Monakhov Vladimir Andreevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Suhov Jaroslav Igorevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Student.

Sorokin Dmitrij Sergeevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Student.

Saakyan Roza Jurevna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Student.

Abstract

The methods of calculating the framework on oscillation by automatically forming a flexibility matrix based on the geometric matrix using computers. Building a geometric matrix is based on concepts of graph theory in addition to the matrix transformation of displacement vectors during the transition from local coordinate systems to a global system. The composition of only three matrices a rod system: matrix of the incidence graph describing the topological structure of the calculation model, the matrix of rotation of the displacement vector and the matrix of the lengths of the rods solves this problem completely. Quantification of frequency spectrum and efforts in the frame under the action of periodic load is performed in accord with the well-known algorithm for dynamic calculation a framed system by solving the equations of motion, presented in the form of the flexibility method

Keywords: framed system, periodic load, core count system, a matrix of incidence, geometric matrix, flexibility matrix, frequency spectrum, internal effort.

При выполнении динамических расчётов стержневых систем с конечным числом степеней свободы на периодические нагрузки важную роль играет матрица податливости, элементами которой являются значения единичных перемещений в местах расположения сосредоточенных масс по направлениям степеней свободы осциллирующих масс (рисунок 1).

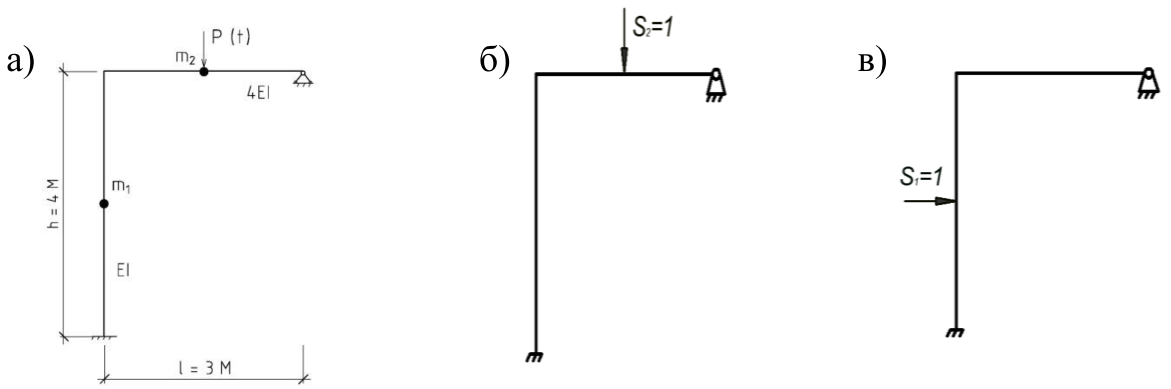

Рисунок 1 – Расчетная схема рамы

Очевидно, расчётная схема рамы дважды статически неопределима, т.к. n=–W=2, где W – число степеней свободы при выполнении статического расчёта. Чтобы вычислить коэффициенты податливости в строительной механике обычно рассматривают единичные состояния стержневой системы и, построив соответствующие эпюры изгибающих моментов, находят коэффициенты по формуле Максвелла-Мора. Процесс этот очень трудоёмкий, поскольку приходиться выполнять расчёт (в общем случае) статически неопределимой системы [1].

В рассматриваемой статье предлагается процедура автоматического формирования матрицы податливости стержневой системы с последующим переходом к одноимённой динамической матрице, являющейся составной частью уравнения движения в форме метода сил. Представляя стержневую систему, например, Г-образную раму, в виде набора конечного числа отрезков жёстких стержней (элементов), связанных в точках дискретизации (узлах) шарнирами (рисунок 2,а), деформированное состояние механической системы можно описать матричным соотношением

$$\overline{\gamma} = [\Gamma]\overline{\zeta}, \tag{1}$$

где $\overline{\gamma}$ – вектор, состоящий из удлинений и перекосов элементов, $[\Gamma]$– матрица преобразования, $\overline{\zeta}$ – вектор-столбец узловых перемещений, заданных в глобальной системе координат $\eta\Omega\theta$; порядок вектора $\overline{\zeta}$ равен удвоенному числу узлов принятой дискретной модели стержневой системы; удвоенное количество узлов, включая и опорные, определяет число компонент вектора $\overline{\gamma}$. Если для некоторой стержневой системы известна матрица $[\Gamma]$, то несложно перейти к геометрической матрице $[H]$, связывающей, в частности, те же перемещения $\overline{\zeta}$ с сосредоточенными деформациями изгиба согласно $\overline{\varkappa} = [H]\overline{\zeta}$ (рисунок 2,б). В этом случае перемещения узлов стержневой системы $\overline{Y}$, вызванные действием внешней нагрузки, находятся по формуле

$$\overline{Y} = [\Delta]\overline{P}, \tag{2}$$

где $[\Delta]$ – матрица податливости, равная

$$[\Delta] = \left([H]^T [r][H]\right)^{-1}, \tag{3}$$

где $[r]$ – квазидиагональная матрица внутренней жёсткости,; $\overline{P}$ – вектор внешних воздействий, сосредоточенных в узлах [2].

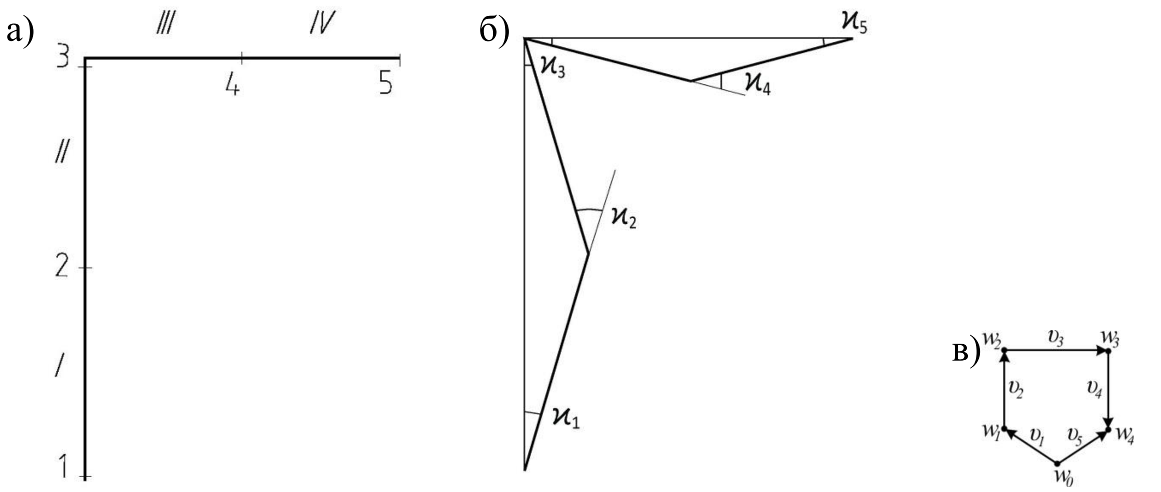

Рисунок 2 – Нумерация элементов и узлов (а), схема сосредоточенных деформаций (б), граф расчетной схемы (в)

Построение геометрической матрицы осуществляется на базе графа стержневой системы (рисунок 2,в) [3]. Данному графу сопутствует матрица инцидентности, обладающая простейшей структурой, а именно:

$$[S]_{(4\times5)}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Она и служит ключом, открывающим новый подход к решению поставленной задачи в автоматическом режиме, позволяя избежать применения классических методов расчёта статически неопределимых стержневых систем. С её помощью оказывается возможным автоматическое формирование геометрической матрицы $[H]$ – матрицы перехода от узловых перемещений рамы к деформациям, т. е. имеется возможность определения деформаций изгиба рамы $\bar{\varkappa}$, сосредоточенные в узлах (в расчётных сечениях рамы) на основе перемещений (рисунок 2)

$$\bar{\varkappa}=[H]\,\bar{\zeta}. \tag{4}$$

Определение структуры геометрической матрицы $[H]$ осуществляется поэтапно. Во-первых, сначала находят вектор *приращений перемещений* $\bar{\gamma}$ в зависимости от самих перемещений, характеризующих положение узловых точек в глобальной системе координат $\overline{\gamma} = [\Gamma]\overline{\zeta}$. Вектор $\overline{\gamma} = (\lambda_1, \chi_1, ..., \lambda_4, \chi_4)$ здесь представлен своими компонентами: абсолютными удлинениями участков – $\lambda_i \, (i = 1,...,4)$ и их перекосами – $\chi_i \, (i = 1,...,4)$, число которых соответствует количеству участков, полученных при дискретизации*. Матрица $[\Gamma]$ является композицией двух последовательных преобразований. Одно из них – $\overline{Z} = [\varphi]\overline{\zeta}$, позволяет перейти от записи узловых перемещений $\overline{\zeta}$, заданных в глобальной системе, к перемещениям узлов, принятым в локальных системах. Локальные системы координат привязаны к отдельным звеньям так же, как показано на рисунке 3.

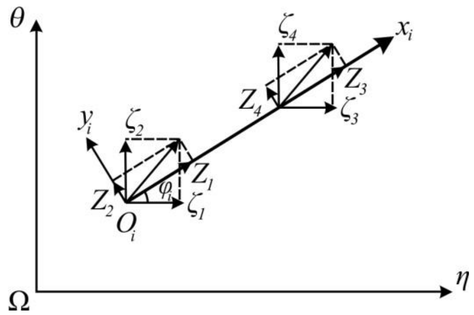

Рисунок 3 – Локальная система координат звена

Матрица рассматриваемого преобразования обладает квазидиагональной структурой

---

* Перекосом стержня называется взаимное смещение концов стержня в направлении, перпендикулярном оси стержня.

$$
[\varphi]_{(12\times10)} = \begin{array}{c}
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & \\
-1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & 0 & & \\
 & & -1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & -1 & 0 & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array},
$$

состоящей из блок-матриц поворота векторов перемещений отдельных звеньев

$$
[\varphi_i] = \begin{bmatrix}
\cos\varphi_i & \sin\varphi_i & 0 & 0 \\
-\sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\
0 & 0 & -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i
\end{bmatrix} \quad (i = 1, \ldots, 4).
$$

В частности, блок вида

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{bmatrix}
$$

характеризует преобразование векторов перемещений двух смежных узлов отдельного участка стойки рамы при повороте на угол $\varphi = 90^\circ$ против хода часовой стрелки. Для рассматриваемой модели рамы общее число блоков равно четырём – степени дискретизации.

Другое преобразование, совершаемое на следующем этапе, связано с определением *приращений перемещений* $\bar{\gamma}$ в расчётных сечениях стержневой системы в зависимости от перемещений, описанных в локальных координатах, т. е. $\bar{\gamma} = \left[\tilde{S}\right]^T \bar{Z}$. Данная процедура выполняется с помощью *расширенной* матрицы инцидентности (ср. со стандартной матрицей $[S]$)

$$
\left[\tilde{S}\right]^{T}_{(8\times 12)} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & -1 & 0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & -1 & 0 & 1 & & & & & 0 & & \\
 & & & -1 & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & -1 & 0 & 1 & & & \\
 & & 0 & & & & & -1 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & -1 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Результатом обоих преобразований, очевидно, является матрица $\left[\Gamma\right]=\left[\tilde{S}\right]^{T}\left[\varphi\right]$. В рассматриваемом примере её структура такова

$$
\left[\Gamma\right]_{(8\times 10)} =
\begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Далее матрица $\left[\Gamma\right]$ подлежит корректировке с целью учёта граничных условий и других особенностей расчётной схемы рамы. К примеру, если при расчёте рамы пренебрегают продольными деформациями стержней, то в матрице избавляются от нечётных строк. Кроме того, в данном случае следует опустить первый, второй, четвёртый, седьмой, девятый и десятый столбцы, поскольку перемещения опор отсутствуют и стержни (в местах стыков участков в узлах «2» и «4») непрерывны. В итоге приходят к матрице

$$[G]_{(4\times4)}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix},$$

с помощью которой вычисляются только перекосы звеньев цепи $\bar{\chi}=[G]\,\bar{\zeta}$. Здесь компонентами вектора $\bar{\zeta}$ служат перемещения точек «2» и «4» в глобальной системе в направлениях, перпендикулярных осям стержней в этих точках, а также перемещения угловой точки рамы в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В аналитической записи последняя формула предстаёт в виде равенств*:

$$\chi_1=-\zeta_3,\qquad \chi_2=\zeta_3-\zeta_5,\qquad \chi_3=\zeta_8-\zeta_6,\qquad \chi_4=-\zeta_8. \tag{5}$$

Очевидно, при отсутствии продольных деформаций стержней перемещения узлов рамы невозможны. Следовательно, его перемещения, как по вертикали, так и по горизонтали, равны нулю ($\zeta_5=\zeta_6=0$) и тогда перекосы участков, равные $\chi_1=-\zeta_3$, $\chi_2=\zeta_3$, $\chi_3=\zeta_8$, $\chi_4=-\zeta_8$, характеризуются перемещениями только узловых точек «2» и «4» по направлениям, перпендикулярным осям стержней. И это вполне очевидный факт, к тому же подтверждённый формальным выводом. Умножение матрицы инцидентности на вектор перекосов, компоненты которого отнесены к длинам соответствующих звеньев, приводит к вектору сосредоточенных изгибных деформаций $\bar{\varkappa}=(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_5)$ в узлах рамы (рисунок 2,б)

$$\bar{\varkappa}=[S]^T\,[L]^{-1}\,\bar{\chi}. \tag{6}$$

А поскольку перекосы связаны с глобальными координатами преобразованием $[G]$, то геометрическая матрица, составленная без учёта продольных деформаций стержней, определяется по формуле

$$[H]=[G]\,[S]^T\,[L]^{-1}. \tag{7}$$

---

* Нумерация компонент вектора перемещений показана на рисунке 2,а.

Выполнив здесь умножение, наконец, устанавливают структуру геометрической матрицы

$$\left[H\right]=\begin{bmatrix}-2/h & 0\\ 4/h & 0\\ -2/h & 2/l\\ 0 & -4/l\\ 0 & 2/l\end{bmatrix}.$$

Руководствуясь изложенной последовательностью формирования геометрической матрицы $\left[H\right]$, несложно разработать программу её автоматического вывода с помощью ПЭВМ. Построение графа рамы на основе расчётной схемы и сопутствующей матрицы инцидентности, кстати, также могут быть выполнены в автоматическом режиме [4]. Опираясь на матрицу инцидентности, могут быть составлены матрица длин звеньев $[L]$ и матрица направляющих косинусов $[C]$

$$[L]=\begin{bmatrix}h/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & h/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & l/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & l/2\end{bmatrix},\ [C]=\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\varphi_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_4\end{bmatrix},$$

где H, l – высота и пролет рамы, $\cos\varphi_i$ (i = 1,…,4) – углы наклона звеньев.

Предварительно определив матрицу единичных усилий в расчетных сечениях рамы (при $\zeta_3 = 1$, $\zeta_6 = 1$)

$$\left[T\right]=\left[r\right]\left[H\right]=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 12.66 & -5.33 & 0\\ 0 & 0 & -5.33 & 18.66 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2/h & 0\\ 4/h & 0\\ -2/h & 2/l\\ 0 & -4/l\\ 0 & 2/l\end{bmatrix}EI=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 5 & -0.67\\ -5.33 & 15.55\\ 2.67 & -28.43\\ 0 & 0\end{bmatrix}EI,$$

где первым сомножителем является матрица внутренней жесткости $\left[r\right]$.

Перемножив матрицу $\left[r\right]$ и матрицу равновесия $\left[V\right]=\left[H\right]^T$, найдем матрицу (внешней) жесткости рамы

$$[R]=\begin{bmatrix}-2/h & 4/h & -2/h & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2/l & -4/l & 2/l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 5 & -0,67\\ -5,33 & 15,55\\ 2,67 & -28,43\\ 0 & 0\end{bmatrix}EI=\begin{bmatrix}8,67 & -8,44\\ -8,44 & 60,12\end{bmatrix}EI.$$

Путем обращения переходят к матрице податливости

$$[\Delta]=[R]^{-1}=\begin{bmatrix}0,135 & 0,02\\ 0,02 & 0,02\end{bmatrix}\frac{1}{EI}.$$

Перемещение точек приложения сил, если принять силы единичными $\bar{P}=\left(\bar{p}_1 \quad -\bar{p}_2\right)^T$, находят по формуле

$$\bar{Y}=[\Delta]\bar{P}=\begin{bmatrix}0,135 & 0,02\\ 0,02 & 0,02\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\frac{1}{EI}=\begin{pmatrix}0,115\\ 0\end{pmatrix}\frac{1}{EI}.$$

Следовательно, горизонтальное перемещение середины стойки составляет $y_1=0,115/EI$, а прогиб ригеля под вертикальной силой отсутствует. Ординаты эпюр изгибающих моментов в расчетных сечениях (узлах) рамы при единичных воздействиях представлены столбцами матрицы влияния (рисунок 4)

$$[\Lambda]=[T]\cdot[\Delta]=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 5 & 0,067\\ -5,33 & 15,55\\ 2,67 & -28,43\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0,135 & 0,02\\ 0,02 & 0,02\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0,27 & -0,047\\ 0,66 & 0,102\\ -0,41 & 0,251\\ -0,2 & -0625\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

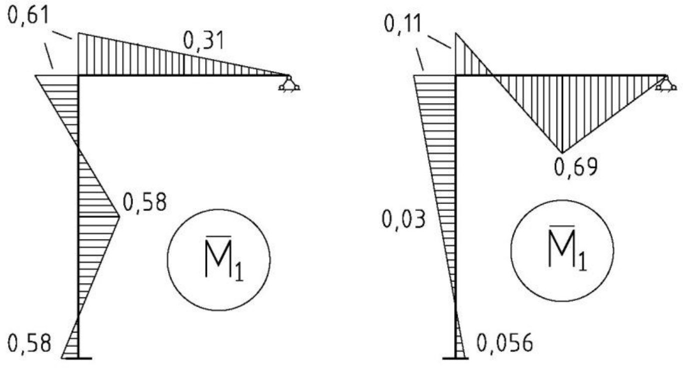

Рисунок 4 – Эпюры изгибающих моментов при единичных воздействиях

Формирование уравнений движения рамы в форме канонических уравнений метода сил

Определение коэффициентов канонических уравнений метода сил, т.е. единичных перемещений, возникающих при действии сил $S_1 = 1$ и $S_2 = 1$ можно выполнить двумя способами. Один из них, очевидно уже осуществлён выше, когда была сформирована матрица $\left[\Delta\right]$.

Другой способ вычисления единичных перемещений основан на перемножении единичных эпюр, а именно,

$$\delta_{11} = \sum_1^n \int_0^1 \frac{\overline{M_1 M_1}}{EI} \mathrm{dx} = 0.5/\mathrm{EI} \tag{8}$$

$$\delta_{22} = \sum_1^n \int_0^1 \frac{\overline{M_2 M_2}}{\mathrm{EI}} \mathrm{dx} = 0.12/\mathrm{EI} \tag{9}$$

$$\delta_{12} = \sum_1^n \int_0^1 \frac{\overline{M_1 M_2}}{\mathrm{EI}} \mathrm{dx} = \text{-}0.06/\mathrm{EI}. \tag{10}$$

Сравнивая полученные значения перемещений с элементами матрицы $\left[\Delta\right]$, легко убедиться в совпадении результатов. Далее вычисляют собственные частоты колебаний рамы [11]

$$p_{1,2} = \frac{(0,5+0,12)m}{EI} \pm \sqrt{\frac{0,62^2 \cdot m^2}{4(EI)^2} - 4 \cdot \frac{0,056 \cdot m^2}{(EI)^2}} = \frac{0,62 \cdot m}{EI} \pm \frac{0,2 \cdot m}{EI}; \tag{11}$$

$$p_1 = 0,82 \cdot \frac{m}{EI};;\ \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{p_1}} = \sqrt{\frac{EI}{0,82 \cdot m}} = 1,104 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}; \tag{12}$$

$$p_2 = 0,42 \cdot \frac{m}{EI};\ \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{p_2}} = \sqrt{\frac{EI}{0,42 \cdot m}} = 1,54 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{13}$$

где m – масса грузов. Приняв частоту внешнего возмущения, равной

$$\Theta^2 = 0,5 \cdot \omega_{\mathrm{MIN}}^2,\ \Theta^2 = 0,5 \cdot \left(1,104 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}\right)^2 = 0,5 \cdot 1,22 \cdot \frac{EI}{m} = 0,61 \cdot \frac{EI}{m}. \tag{14}$$

переходят к формированию динамической матрицы податливости рамы

$$\left[\Delta^*\right]=\begin{bmatrix}\delta_{11}^* & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}^*\end{bmatrix}, \tag{15}$$

где динамические единичные перемещения вычисляют по формулам:

$$\delta_{11}^*=\delta_{11}-\frac{1\cdot m}{m\cdot 0{,}0052\mathrm{EI}}=\frac{0{,}5}{\mathrm{EI}}-\frac{1{,}64}{\mathrm{EI}}=-\frac{1{,}14}{\mathrm{EI}},$$

$$\delta_{22}^*=\delta_{22}-\frac{1\cdot m}{m\cdot 0{,}0052\mathrm{EI}}=\frac{0{,}12}{\mathrm{EI}}-\frac{1{,}64}{\mathrm{EI}}=-\frac{1{,}52}{\mathrm{EI}}.$$

Определение грузовых слагаемых в уравнениях движения рамы

$$\begin{cases}\delta_{11}^*\cdot \mathrm{S}_1+\delta_{12}\cdot \mathrm{S}_2+\Delta_{1p}=0\\ \delta_{21}\cdot \mathrm{S}_1+\delta_{22}^*\cdot \mathrm{S}_2+\Delta_{2p}=0\end{cases} \tag{17}$$

осуществляется с помощью эпюры изгибающих моментов M_p^0, построенной в статически определимой системе при действии (статически приложенной) силы $P_0=9$ кН.

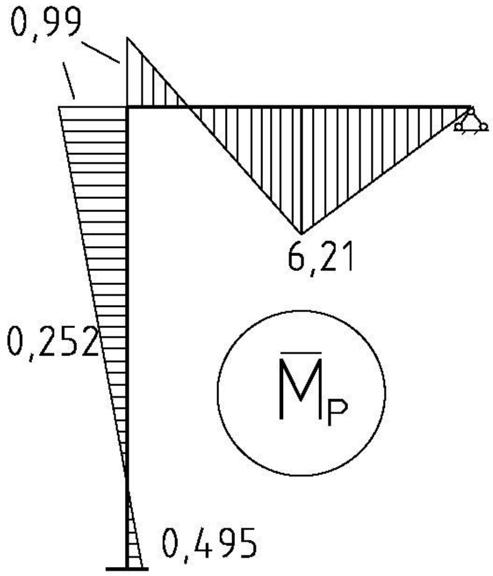

Рисунок 5 – Эпюра изгибающих моментов, построенная в статически определимой системе от действия статически приложенной силы

$$\Delta_{1p}=\sum\int\frac{M_p^0\bar{M}_1}{\mathrm{EI}}\partial x=\delta_{12}\cdot P_0=-\frac{0{,}06}{\mathrm{EI}}\cdot 9=-\frac{0{,}54}{\mathrm{EI}},$$

$$\Delta_{2p}=\sum\int\frac{M_p^0\cdot\bar{M}_2}{\mathrm{EI}}\partial x=\delta_{22}\cdot P_0=\frac{0{,}12}{\mathrm{EI}}\cdot 9=\frac{1{,}08}{\mathrm{EI}}.$$

Вместе они составляют вектор – столбец $\overline{\Delta_p} = \left(\Delta_{1p}, \Delta_{2p}\right)^T$ уравнения движения рамы, записанного в форме канонического уравнения метода сил

$$\left|\Delta^*\right| \overline{S} + \overline{\Delta} = 0 \,. \tag{16}$$

В обычной записи уравнения движения имеют вид системы:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* \cdot S_1 + \delta_{12} \cdot S_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot S_1 + \delta_{22}^* \cdot S_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Вычислив коэффициенты при неизвестных при значении m = 100кН, приходят к уравнениям движения:

$$\begin{cases} -0,0114 \cdot S_1 - 0,06 \cdot S_2 - 0,54 = 0 \\ \ \ -0,06 \cdot S_1 - 1,52 \cdot S_2 - 1,12 = 0 \end{cases}$$

Корнями данных уравнений являются амплитудные значения сил инерции грузов:

$$\begin{aligned} S_1 &= -0,51 кН \\ S_2 &= 1,27 кН \end{aligned} .$$

Построение динамической эпюры изгибающих моментов в раме

После того как определили значения S_1 и S_2, переходят к построению исправленных эпюр $M_1^{исп}$ и $M_2^{исп}$, соответствующих действительным величинам сил инерции

$$M_1^{исп} = M_1 \cdot S_1 ,\ M_2^{исп} = M_2 \cdot S_2 .$$

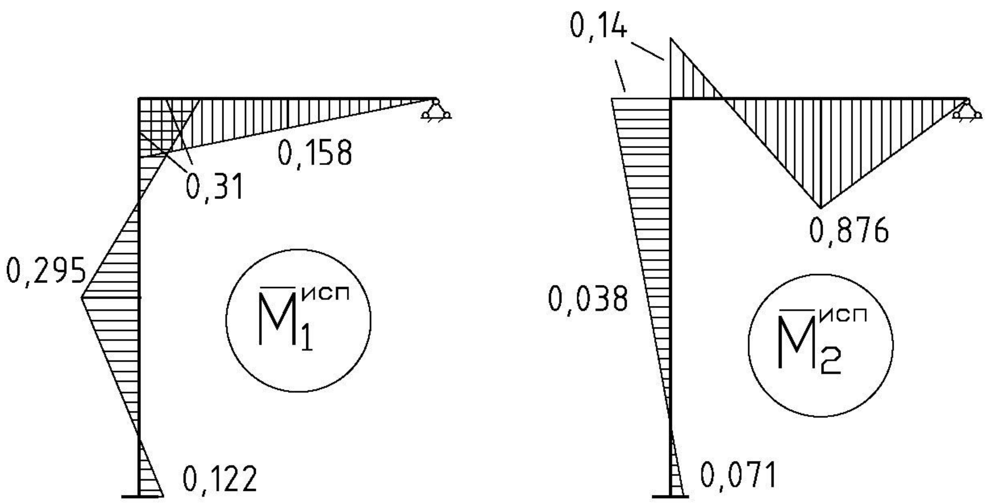

Рисунок 6 – Исправленные эпюры

Окончательный результат – эпюра изгибающих моментов при действии динамической нагрузки $M_{ок}^{дин} = M_1^{исп} + M_2^{исп} + M_p^0,$ получается путем сложения исправленных эпюр с «грузовой».

Библиографический список:

1. Ржаницын А.Ф. Расчёт стержневых систем с применением принципа двойственности // Исследования по теории сооружений. Вып. XXIV. 1980. С. 10-23.
2. Ржаницын А.Ф. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982. 400 с.
3. Харари А. Теория графов. М: Изд. УРСС Эудиториал, 2003. 322 с.
4. Зубов В.С. Программирование на языке TURBOPASCAL. М.: Изд-во «ФИЛИНЪ», 1997. 320 с.