

УДК 624.31

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОЙ РАБОТЫ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ ПРОМЫШЛЕННОГО ЗДАНИЯ

Кирсанов Михаил Николаевич,

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин.

Орлов Игорь Викторович,

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,

кандидат технических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин.

Аннотация

Статически определимая плоская ферма моделирует свод промышленного объекта. Для вывода зависимости прогиба конструкции от числа панелей в пролете применяется формула Максвелла – Мора, система компьютерной математики Maple и метод индукции. Рассмотрен случай равномерно распределенной по верхнему поясу нагрузки. Выведены формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях и выражение для смещения опоры.

Ключевые слова: ферма, Maple, прогиб, индукция, точное решение.

A MATHEMATICAL MODEL OF THE ELASTIC BEHAVIOR OF THE ROD COATING CONSTRUCTION OF INDUSTRIAL BUILDING

Kirsanov Mikhail Nikolaevich,

National Research University "MPEI", Moscow,

Doctor of Science, Professor of the department "Robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines".

Orlov Igor Viktorovich,

National Research University "MPEI", Moscow,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines".

Abstract

Statically determinate flat truss models the set of industrial building. To obtain the dependence of the deflection of the structure from the number of panels in the span Maxwell – Mora's formula, the system of computer mathematics Maple and the method of induction are used. We consider the case of uniformly distributed load on the upper zone. The formulas for forces in the most compressed and stretched the rods and the expression for the displacement of the support are derived.

Keywords: truss, Maple, deflection, induction, exact solution.

Введение. Расчет стержневых конструкций с большим числом элементов обычно производят в специализированных пакетах, основанных на методе конечных элементов. Не умаляя роль численных расчетов, отметим, что в последнее время с развитием методов компьютерной математики (Maple, Mathematica, MatCad и др.) появилась реальная возможность аналитических расчетов с компактными результирующими формулами для усилий в критических (наиболее сжатых или растянутых) стержнях, прогиба и смещения опор [1,2]. Наиболее эффективны решения для регулярных периодических структур, для которых в решение можно внести и натуральный параметр, равный, например, числу ячеек периодичности.

Постановка задачи. Ферма на рисунке 1 представляет собой модель свода покрытия промышленного объекта.

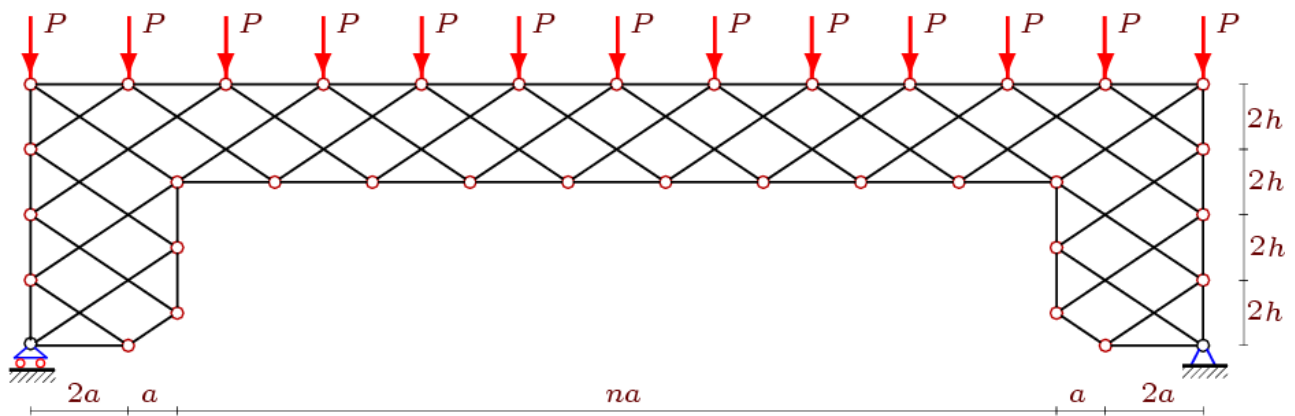


Рисунок 1 – Ферма при $n=9$

Расчет производится на равномерно распределенную по верхнему поясу нагрузку. Примем нечетное число панелей $n=2k-1$ в нижнем поясе. Опорные части конструкции также представляют собой фермы. Выведем формулу зависимости прогиба, измеряемого по смещению среднего узла верхнего пояса, от числа панелей. В настоящей работе берется четыре панели по высоте конструкции, в общем случае это число может быть иным. Ферма содержит $m=4n+38$ стержней, включая три опорные. Усилия в стержнях вычисляем по программе [1]. Ввод данных в программу начинается с заданием координат шарниров (рисунок 2). Приведем фрагмент программы на языке Maple [2]:

```

> x[1]:=0:y[1]:=0:x[2]:=2*a:y[2]:=0:
> for i to 3 do
>   x[i+2]:=3*a;      y[i+2]:=h*(2*i-1);
>   x[i+n+4]:=a*(3+2*n); y[i+n+4]:=h*(7-2*i);
> od:
> x[n+8]:=4*a+2*n*a; y[n+8]:=0:
> x[n+9]:=6*a+2*n*a; y[n+9]:=0:
> for i to n-1 do
>   x[i+5]:=2*a*i+3*a; y[i+5]:=5*h; od:
> for i to 4 do
>   x[i+n+9]:=0;      y[i+n+9]:=2*h*i;
>   x[i+2*n+15]:=2*a*(n+3); y[i+2*n+15]:=10*h-2*h*i;

```

```

> od:
> for i to n+2 do
>   x[i+n+13]:=2*a*i;   y[i+n+13]:=8*h;
> od:

```

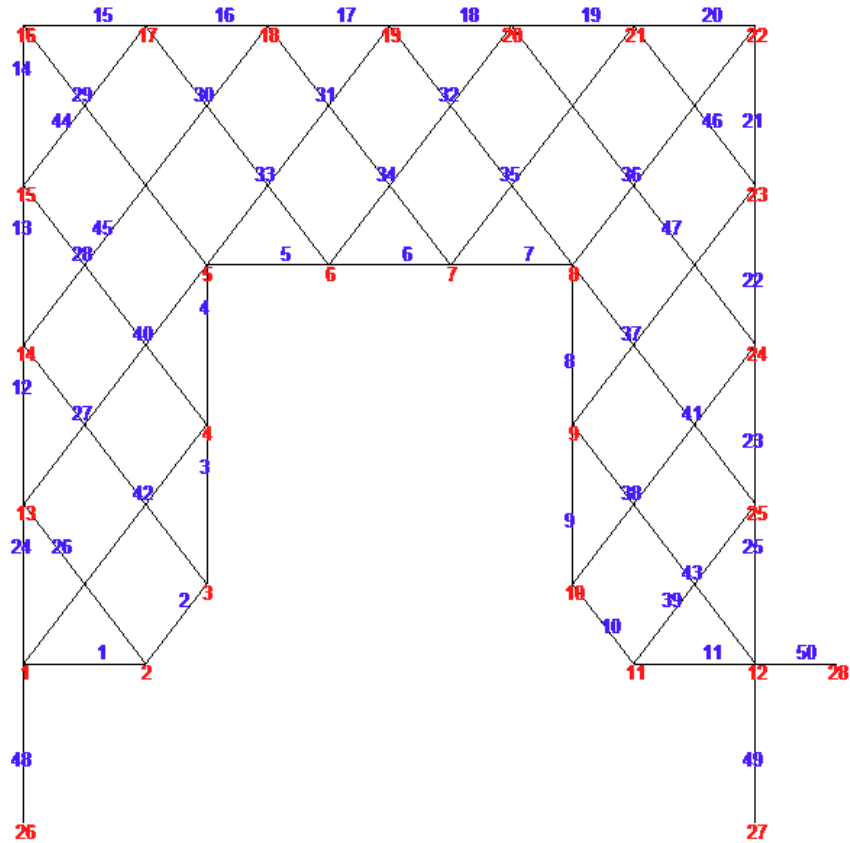


Рисунок 2 – Нумерация узлов $n=3, k=2$

Решетка фермы задается по тому же принципу, что структура графов в дискретной математике – заданием специальных векторов, содержащих номера концов стержня. Так стержни на внутренних сторонах опорных элементов и нижнем поясе (рисунок 2) представлены векторами

```
for i to 2*m+n+2 do N[i]:= [i,i+1];od:
```

Матрица G системы уравнений равновесия содержит направляющие косинусы усилий, которые вычисляются по координатам узлов:

```

> for i to m do
>   Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:

```

```

> Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
> L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2);
> for j to 2 do
>   jj:=2*N[i][2]-2+j:
>   if jj<=m0 then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
>   jj:=2*N[i][1]-2+j:
>   if jj<=m0 then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
> od;
> od:

```

Решение. Система Maple решение дает в символьной форме методом обратной матрицы. Обратная матрица находится как в элементарной алгебре $1/G$. Это позволяет получить конечное выражение для прогиба по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i s_i l_i / (EF),$$

где S_i – усилия в стержнях фермы от действия распределенной нагрузки, s_i – усилия от единичной вертикальной нагрузки в среднем узле верхнего пояса, l_i – длины стержней, E – модуль упругости, F – площадь сечения стержней. В сумму не входят три опорных стержня, которые приняты жесткими. Последовательный расчет ферм с разным числом панелей выявляет, прежде всего, то, что для ферм с числом k кратным 3 определитель системы уравнений вырождается. Ферма оказывается кинематически изменяемой. Подобный эффект кинематической изменяемости ранее был выявлен в пространственной ферме [3] и плоских фермах с аналогичной решеткой [4,5]. Будем производить расчет для ферм с числом k панелей 1, 2, 4, 5, 7, 8,... или числом, определяемым формулой $k = (6j - (-1)^j - 3) / 4$, $j = 1, 2, \dots$. Таким образом, при изменении j последовательность k «пробегаёт» натуральные числа, кроме чисел, кратных 3.

Общий вид формулы для прогиба ферм с разным числом панелей отличается только значениями коэффициентов:

$$EF\Delta_j = P \frac{A_j a^3 + C_j c^3 + H_j h^3}{h^2}, \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Именно эта особенность (свойство регулярности) позволяет обобщать решение на произвольное число панелей. Можно привести множество примеров ферм, которые этим свойством не обладают, и для которых общие формулы (по крайней мере, точные) вывести нельзя или весьма затруднительно. Такими фермами, например, являются фермы с уклоном верхнего пояса.

Изучаемая ферма регулярная. Методом индукции получим следующие выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned} A_j &= 15j^4/8 + 5/4(1 - (-1)^j)j^3 + (63/8 - 69(-1)^j/8)j^2 + \\ &+ 7(1 - (-1)^j)j + 9(1 - (-1)^j)/16, \\ C_j &= (39/4 - 9(-1)^j)j^2 + (69/4 - 81(-1)^j/4)j - 3(-1)^j/8 + 3/8, \\ H_j &= 8(3 - 2(-1)^j)j - 4(-1)^j + 8. \end{aligned}$$

На рисунке 2 показано изменение прогиба в зависимости от размеров фермы и числа панелей. Кривые безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta_j EF / (P_{sum} L)$ построены при фиксированной длине пролета $L = a(n + 6) = 50\text{м}$, размер h на рисунке дан в метрах. Суммарная нагрузка на ферму привязана к числу панелей $P_{sum} = P(n + 4)$.

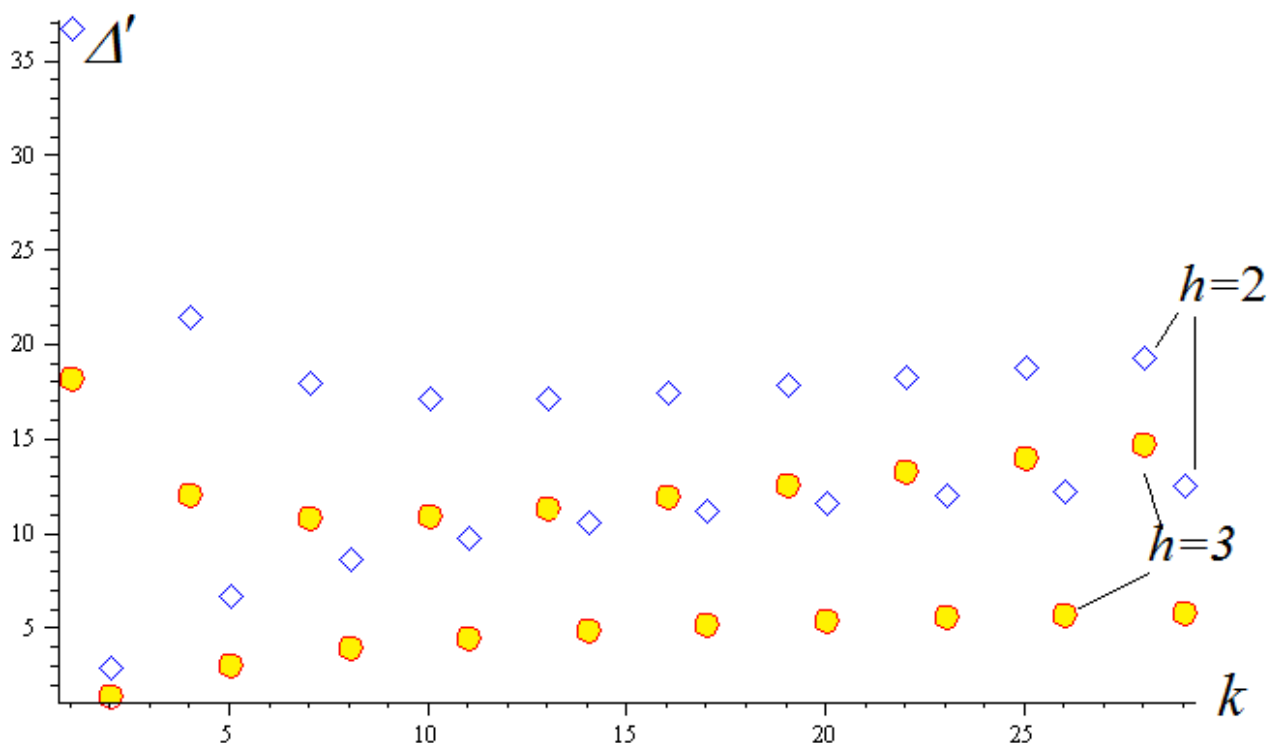


Рисунок 3 – Зависимость прогиба от числа k , $L=50\text{м}$

Особенностью решения являются значительные скачки значений прогиба и отсутствие решения при некоторых числах панелей.

Помимо прогиба в фермах рассматриваемого типа важна еще другая величина – смещение катка подвижной опоры. Для определения формулы зависимости этой величины от числа панелей применим метод индукции и формулу Максвелла – Мора, где в этот раз s_i – усилия в стержнях от единичной горизонтальной нагрузки, приложенной к левой опоре. Формула будет иметь тот же вид (1) с коэффициентами

$$A_j = 13j^3 + (45/2 - 13(-1)^j / 2)j^2 + (13/2 - 23(-1)^j / 2)j,$$

$$C_j = 18j^2 + (46 - 9(-1)^j)j - 3/2(1 + (-1)^j),$$

$$H_j = 4(15 + (-1)^j)j + 16 - 8(-1)^j.$$

Одновременно с выводом прогиба (в том же цикле по j , определяющем число панелей) выводим формулы для усилия в наиболее сжатом стержне в середине верхнего пояса

$$S_{3k+11} = -P(3/2j^2 - (3 + (-1)^j)j/2 - 5/4 + 1/4(-1)^j)a / (2h)$$

и усилия в наиболее растянутом стержне нижнего пояса:

$$S_{k+4} = P\left(3j^2/4 + (9 - (-1)^j)j/4 + 3/8(1 - (-1)^j)\right)a/h.$$

Заключение. Методом индукции с применением в системы Maple выведены формулы для прогиба фермы, смещения опоры и усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Эти решения можно использовать для оценки точности и достоверности численных результатов, полученных в специализированных пакетах строительной механики [6-10]. Наличие случаев кинематического вырождения исследуемой конструкции предупреждает практических инженеров и проектировщиков о возможности аналогичных ситуациях в других системах. Компактные аналитические решения методом индукции на основе программы [2] получены в [11-17]. Обзор аналитических решений для плоских ферм на основе этого же подхода содержится в [18,19].

Библиографический список:

1. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика / Под ред. А.И. Кириллова. М.: Физматлит, 2008. 382 с.
2. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решение задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3. С. 48-51.
4. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5(39). С. 61-68.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3(260). С. 7-12.
6. Samofalov M., Žiūkas A. Investigation of mechanical state of spatial roof from steel trusses on asymmetric building // Mechanics. 2015. Vol. 21. No. 1. Pp. 11-18.

7. Василькин А.А., Щербина С.В. Автоматизированное решение задачи определения оптимальной высоты стальной фермы по критерию минимума массы при вариации высоты фермы // Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании: Сборник материалов Международной конференции. М.: МГСУ, 2015. С. 131-134.
8. Миляев А.С. Методика автоматизированного расчета пролетных строений деревянных мостов с фермами Гау-Журавского // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2005. № 172. С. 158-170.
9. Бешлиу В.А. Технологичность стальных пролетных строений железнодорожных мостов со сквозными главными фермами // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2004. № 1. С. 22-27.
10. Ходяков В.А. Оптимизация металлических ферм неразрезного пролетного строения // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. 2015. № 4. С. 114-129.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «Butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4(267). С. 2-5.
12. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Science Almanac. 2016. № 4-3(18). С. 257-259.
13. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12.
14. Voropai R.A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice // Science Almanac. 2016. № 4-3(18). С.238-240.
15. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple // Science Almanac. 2016. № 5-3(19). Pp. 236-239.
16. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). Pp.7-8.

17. Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // Научный альманах. 2016. № 6-2(19). С. 214-217.

18. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5(57). С. 66-73.

19. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1(7). С. 247-254.