УДК 539.371

К ВОПРОСУ О РАВНОПРОЧНОСТИ ПО НОРМАЛЬНЫМ И КАСАТЕЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ ИЗГИБАЕМОГО СТЕРЖНЯ

Бакушев Сергей Васильевич

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Павлова Анна Дмитриевна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Аннотация

Рассматривается возможность одновременного выполнения условий прочности изгибаемых стержней по нормальным и касательным напряжениям с нулевым запасом. Показано, что условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям для балок, изготовленных из прокатного профиля, практически выполнено быть не может. Вместе с тем для балок, поперечное сечение которых представляет собой сварной двутавр, выполнение условий равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно. Предлагается компоненты сварного двутаврового сечения (полки, стенку) изготавливать полыми, что приведёт к экономии материала.

Ключевые слова: упругий стержень, плоский поперечный изгиб, прочность.

TO THE ISSUE OF UNIFORM STRENGTH IN NORMAL AND TANGENT TENSIONS OF BENT ROD

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Pavlova Anna Dmitrievna,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Student.

Abstract

The article discussed the ability of simultaneous execution of the conditions of strength bent elements for the normal and shear stresses with zero strength reserve. It was shown that strength uniformity condition for beams for normal and shear stresses for beams made of rolled sections, practically cannot be satisfied. However, for welded I-beams the fulfillment of strength uniformity condition for normal and shear stresses is possible. It is proposed to produce weld I-section components (beam flanges and webs) with hollow cross-section, resulting in material savings.

Keywords: elastic rod, flat transverse bending, strength.

Введение. Расчёт балок, то есть прямолинейных упругих стержней, находящихся в условиях плоского поперечного изгиба, методами сопротивления материалов выполняется по двум условиям прочности: по максимальным нормальным напряжениям, возникающим в фибровых волокнах поперечного сечения, и по максимальным касательным напряжениям, возникающим в волокнах поперечного сечения на уровне нейтральной оси. При этом, как показывают численные расчёты, если условие прочности по нормальным напряжениям выполняется, то и условие прочности по касательным напряжениям, как правило, также выполняется, причём со значительным запасом прочности. Это обстоятельство можно рассматривать как недостаток расчётной методики, так как прочность по касательным напряжениям оказывается завышенной и, следовательно, в балках имеет место перерасход материала.

Теоретические основы. Поставим задачу: определить условия, при которых стержень, испытывающий плоский поперечный изгиб, и находящийся в условиях предельного напряжённого состояния, будет находиться в условиях равнопрочного сопротивления по нормальным и касательным напряжениям.

Как известно, условия прочности по нормальным и касательным напряжениям имеют вид [1]:

$$\sigma_z^{max} \leq R_\sigma; \tag{1}$$

$$\tau_{zy}^{max} \leq R_\tau. \tag{2}$$

Здесь R_σ – расчётное сопротивление материала стержня по нормальным напряжениям; R_τ – расчётное сопротивление материала стержня по касательным напряжениям; σ_z^{max} – наибольшее нормальное напряжение в фибровых волокнах опасного по нормальным напряжениям поперечного сечения стержня; τ_{zy}^{max} – наибольшее касательное напряжение в волокнах стержня на уровне нейтральной оси.

Нормальные и касательные напряжения в соотношениях (1) и (2) вычисляются по формулам:

$$\sigma_z^{max} = \frac{M_x^{max}}{I_x} h^{max}; \tau_{zy}^{max} = \frac{Q_y^{max} S_x^{n.c.}}{I_x b_y}. \tag{3}$$

Здесь M_x^{max} – максимальный изгибающий момент, возникающий в поперечном сечении стержня от внешней нагрузки; Q_y^{max} – максимальная поперечная сила, возникающая в поперечном сечении стержня от внешней нагрузки; I_x – момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси x; $S_x^{n.c.}$ – статический момент площади полусечения поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси x; h^{max} – наибольшее расстояние от нейтральной оси до фибрового волокна в опасном по нормальным напряжениям поперечном сечении стержня; b_y – ширина поперечного сечения на уровне нейтральной оси в опасном по касательным напряжениям сечении стержня.

Перепишем формулы (1) и (2) в следующем виде:

$$\sigma_z^{max} - R_\sigma \leq \Delta_\sigma; \tag{4}$$

$$\tau_{zy}^{max} - R_\tau \leq \Delta_\tau. \tag{5}$$

Здесь Δ_σ – запас прочности по нормальным напряжениям; Δ_τ – запас прочности по касательным напряжениям.

Величины Δ_σ и Δ_τ, как правило, выражаются в процентах.

Мы рассматриваем предельный случай, когда запаса прочности ни по нормальным, ни по касательным напряжениям быть не должно, то есть должно выполняться соотношение:

$$\Delta_\sigma = \Delta_\tau = 0. \qquad (6)$$

Подставляя соотношения (3) в условия (4) и (5) с учётом зависимостей (6), получим систему равенств:

$$\frac{M_x^{max}}{I_x} h^{max} - R_\sigma = 0; \qquad (7)$$

$$\frac{Q_y^{max}\, S_x^{n.c.}}{I_x b_y} - R_\tau = 0\,. \qquad (8)$$

В равенствах (7) и (8) величины M_x^{max} и Q_y^{max} определяются внешней нагрузкой, действующей на стержень и его геометрическими размерами; величины $I_x, S_x^{n.c.}, h^{max}$ и b_y – определяются геометрическими размерами и формой поперечного сечения; величины R_σ и R_τ – определяются механическими характеристиками материала стержня. В общем случае найти совместное решение системы равенств (7) и (8) для заданной геометрии стержня, или найти геометрию стержня для заданной внешней нагрузки не представляется возможным, так как восемь перечисленных ранее величин, входящих в систему (7), (8) не являются независимыми.

Результаты вычислений. Рассмотрим частные случаи загружения изгибаемых стержней различной геометрии, формы и размеров поперечного сечения, и найдём при этом требуемые расчётные сопротивления материалов стержней по нормальным и касательным напряжениям, при которых совместно выполняются равенства (7) и (8).

Пример 1. Рассмотрим стержень длиной $2l = 600\,см$, находящийся в условиях плоского поперечного изгиба под действием сосредоточенной силы $2F$, приложенной посередине пролёта (рисунок 1). Поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник размерами $b \times h$, причём $b = 10\,см, h = 40\,см$.

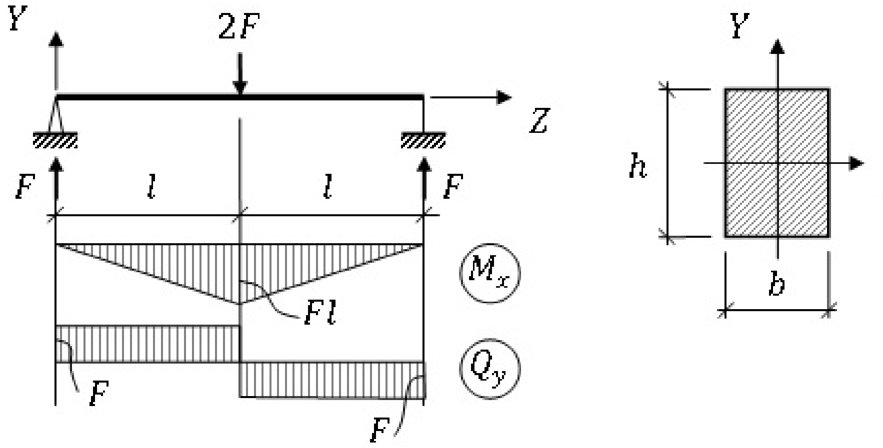

Рисунок 1

Тогда $M_x^{max} = Fl; Q_y^{max} = F; I_x = \frac{bh^3}{12}; S_x^{n.c.} = \frac{bh^2}{8}; h^{max} = \frac{h}{2}; b_y = b.$

Принимая $R_\sigma = 20\,\frac{кН}{см^2}$, найдём из уравнения (7) требуемую величину силы:

$$F = \frac{R_\sigma I_x}{lh^{max}} = \frac{R_\sigma bh^3}{12l\frac{h}{2}} = 177{,}78\,кН.$$

Из соотношения (8) найдём требуемое расчётное сопротивление материала стержня по касательным напряжениям:

$$R_\tau = \frac{Q_y^{max}\,S_x^{n.c.}}{I_x b_y} = \frac{Fbh^2}{8\frac{bh^3}{12}b} = 0{,}667\,\frac{кН}{см^2}.$$

Таким образом, для рассматриваемого стержня выполнение условия равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала стержня, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет3,33 % от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ.

Пример 2. Пусть стержень, рассмотренный в примере 1, нагружен равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности q. Тогда получаем: $M_x^{max} = \frac{ql^2}{2}; Q_y^{max} = ql; I_x = \frac{bh^3}{12}; S_x^{n.c.} = \frac{bh^2}{8}; h^{max} = \frac{h}{2}; b_y = b.$

Принимая $R_\sigma = 20\ \frac{кН}{см^2}$, найдём из уравнения (7) требуемую величину интенсивности распределённой нагрузки:

$$q = \frac{8R_\sigma I_x}{4l^2 h^{max}} = \frac{2R_\sigma b h^3}{12 l^2 \frac{h}{2}} = 1{,}185\ \frac{кН}{см}.$$

Из соотношения (8) найдём требуемое расчётное сопротивление материала стержня по касательным напряжениям:

$$R_\tau = \frac{Q_y^{max}\ S_x^{п.с.}}{I_x b_y} = \frac{ql b\, h^2}{8\frac{bh^3}{12}b} = 1{,}333\ \frac{кН}{см^2}.$$

Таким образом, для рассматриваемого стержня выполнение условия равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала стержня, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 6,66% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ.

Повторив проведённые вычисления для различных типов поперечных сечений изгибаемого стержня, получим следующие результаты.

а) Для стержня, выполненного из двутаврового профиля №14, и нагруженного посередине пролёта $2l = 600\,см$ сосредоточенной силой $2F$ условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 4,60% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ.

Если стержень нагружен равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности q, то условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 36,30% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ.

б) Для стержня, выполненного из таврового профиля №15, и нагруженного посередине пролёта $2l = 600$ см сосредоточенной силой $2F$ условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 1,90% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ.

Если стержень нагружен равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности q, то условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 3,90% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ.

в) Для стержня, поперечное сечение которого выполнено из стальной трубы наружным диаметром 5 см и толщиной стенки 0,9 см, и нагруженного посередине пролёта $2l = 600\,см$ сосредоточенной силой $2F$ условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 0,20% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ.

Если стержень нагружен равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности q, тоусловие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениямR_τсоставляет0,91 % от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениямR_σ.

г) Для стального стержня с треугольным поперечным сечением высотой 40 см и основанием, принимаемым равным от 10 см до 100 см, и нагруженного посередине пролёта $2l = 600\,см$ сосредоточенной силой $2F$ условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 1,5% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ.

Если стержень нагружен равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности q, то условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно лишь для материала, у которого расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 3,0% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ.

Выполненные исследования показывают, что условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям практически не соблюдаются почти для всех, используемых в строительной практике сечений изгибаемых элементов: тавры, двутавры, трубы, прямоугольные и треугольные сечения.

Как известно, наиболее экономичным, с точки зрения расхода материала является сечение в виде двутавра. Исходя из этого, рассмотрим сечение стержня в виде сварного двутавра (рисунок 2).

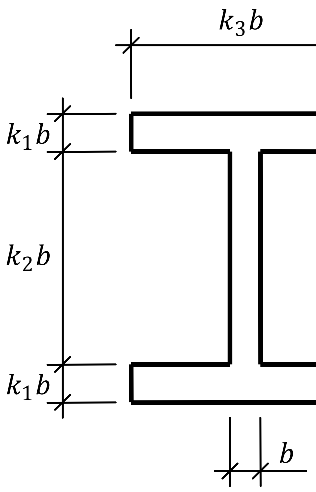

Рисунок 2

Исследования показывают, что для сварного двутавра путём подбора параметров k_1, k_2, k_3 можно сконструировать сечение, для которого условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям выполняется. Так, если принять $k_1 = 4, k_2 = 16, k_3 = 10$, то расчётное сопротивление материала стержня по касательным напряжениям R_τ составит 66,2% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ. Если для стали величину R_σ принять равной $200\,МПа$, то величина R_τ будет равна $132{,}32\,МПа$, что соответствует действительному материалу. При этом размер $b = 8\,см$ и стержень длиной $2l = 600\,см$ нагружен сосредоточенной силой $2F$ в середине пролёта.

Полученное решение для стержня со сварным сечением нельзя считать удовлетворительным, так как размеры поперечного сечения при этом будут следующими: высота сечения $192\,см$, ширина полки – 80 см, толщина полки – $32\,см$. Это означает, что данную конструкцию уже нельзя считать тонким изгибаемым стержнем; эта конструкция в большей мере напоминает балку-стенку с переменной толщиной по высоте и для её расчёта следует использовать совершенно другую методику.

Загрузим стержень длиной $2l = 600\,см$ со сварнымдвутавровым поперечным сечением (рисунок 2) равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности q. Для выполнения условия равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям, примем ширину стенки $b = 8\,см$ и значения коэффициентов $k_1 = 8, k_2 = 48, k_3 = 10$. В этом случае расчётное сопротивление материала стержня по касательным напряжениям R_τ составит 70,05% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ , то есть для $R_\sigma = 200\,МПа$, величина $R_\tau = 140,1\,МПа$. Размеры поперечного сечения при этом будут равны: высота сечения $512\,см$, ширина полки – 80 см, толщина полки – $64\,см$.

Заключение. Анализ различных форм поперечных сечений изгибаемых стержней показывает, что для поперечных сечений в виде сварного двутавра, выполнение условия равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно. Однако при этом сечения получаются чрезвычайно материалоёмкими. Для снижения материалоёмкости поперечного сечения стержня предлагается сечение принимать в виде сварного двутавра, но составляющие двутавра – полки, стенку – конструировать полыми.

В качестве примера рассмотрим сварное поперечное сечение стержня в виде двутавра, у которого в качестве полок использованы трубы (рисунок 3). Для стержня длиной $2l = 600\,см$, нагруженного сосредоточенной силой $2F$ посередине пролёта, условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям будет выполнено, если расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 32% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ. При этом геометрические размеры сечения принимались следующими: $b = 9\,см$; $k_1 = 5$; $k_2 = 10$.

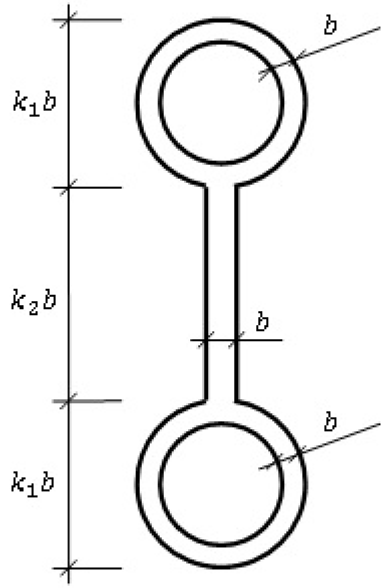

Рисунок 3

Для рассматриваемого стержня, нагруженного равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности q условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям будет выполнено, если расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ составляет 64% от расчётного сопротивления материала по нормальным напряжениям R_σ . Поскольку для стали величина расчётного сопротивления по нормальным напряжениям $R_\sigma \cong 200\, МПа$, то расчётное сопротивление материала по касательным напряжениям R_τ будет равна $128\, МПа$, что соответствует действительности.

Выводы:

1. Выполнение условия равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям определяется как формой и размерами поперечного сечения, так и действующими на стержень внешними нагрузками, а также механическими характеристиками материала стержня.

2. Условие равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям для изгибаемых стержней из прокатного профиля практически никогда не выполняется.

3. Для стержня, поперечное сечение которого выполненно в виде сварного двутавра, выполнение условия равнопрочности по нормальным и касательным напряжениям возможно.

Библиографический список:

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. Изд. 3-е. М.: Высшая шк., 2003. 560 с.