УДК 519.6 : 62-752.2

МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПРИМЕРЕ МНОГОМАССОВОГО ГАСИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ

Земцова Ольга Григорьевна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Шеин Александр Иванович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика».

Аннотация

В статье показана методика постановки задачи оптимизации механической системы. В качестве примера вычисляется оптимальная жесткость последней (настроечной) массы многомассового гасителя колебаний при действии гармонической нагрузки. В замкнутом виде получены формулы оптимальных жесткостей для двух-, трех-, четырехмассового гасителей колебаний.

Ключевые слова: оптимизация, гаситель колебаний, многомассовый гаситель колебаний, настройка гасителя колебаний, гармоническое воздействие.

THE TECHNIQUE OF OPTIMIZATION ON THE EXAMPLE OF OPTIMIZATION MULTIUNIT VIBRATION DAMPER

Zemtsova Olga Grigorevna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department “Mechanics”.

Shein Alexander Ivanovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Doctor of Sciences, Professor, Head of the department "Mechanics".

Abstract

The article shows a technique of optimization problem formation. As an example is calculated optimal hardness of the latter mass of a multimass damper under the influence of the harmonic load. In the closed form is obtained formulas optimum rigidity for two-, three-, four-mass vibration dampers.

Keywords: optimization, vibration damper, multimass vibration damper, tuning of vibration damper, harmonic load.

В основе решения задач обеспечения прочности, жесткости, устойчивости и долговечности строительных конструкций часто лежит построение математических моделей механических систем и их численная реализация [1, 2]. На этапе математического моделирования динамического поведения сооружения целесообразно использовать оптимизационные процедуры для рационального выбора или повышения эффективности конструктивного решения.

Под оптимизацией подразумевается процесс поиска максимально выгодных характеристик или соотношений. Задача оптимизации сформулирована, если заданы следующие параметры:

1) математическая модель процесса;

2) критерий оптимальности (конструктивный, экономический, технологический и т.д.);

3) ограничения (конструктивные условия, экономические аспекты, возможности аппаратуры, требования безопасности и т.д.).

4) варьируемые параметры, изменение которых позволяет влиять на эффективность процесса;

Основы математических методов оптимизации были заложены еще в XVIII в. Однако, их применение до XX в. было существенно ограничено возможностями вычислительной техники, особенно для многопараметрических задач со сложными взаимосвязями.

При математическом и компьютерном описании [1-3] процессов движения сооружений от динамических воздействий необходимо предусмотреть способы гашения колебаний сооружений, т.е. способы управления пространственной динамикой. Чаще всего для этой цели применяют гасители колебаний, имеющие различные принципы работы – динамические, ударные, маятниковые, плавающие и т.д. [4-6]. Оптимизация характеристик любого вида гасителя является необходимым условием для его эффективной работы.

В качестве примера постановки и решения оптимизационной задачи рассмотрим вынужденные колебания упругой системы с многомассовым гасителем при действии гармонической нагрузки [7].

Введем следующие обозначения (рисунок 1): m_1 – масса основной системы, c_1 – жесткость системы, m_i (где i=2…n) – массы гасителя, c_i (где i=2…n) – жесткости упругих связей многомассового гасителя. Система находится под действием динамической силы, изменяющейся по гармоническому закону $P\sin(\omega t)$.

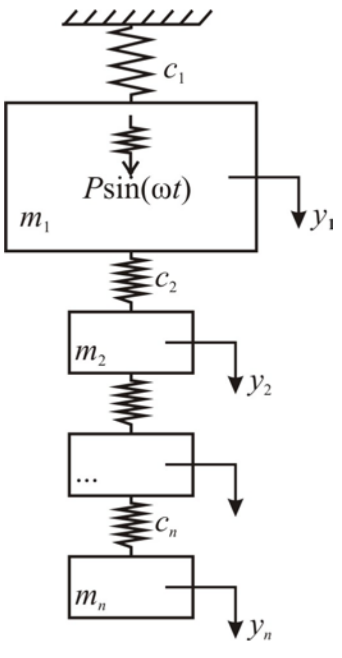

Рисунок 1 – Схема системы с многомассовым гасителем колебаний

Уравнения движения системы:

$$\begin{cases} c_1 y_1 - c_2(y_2 - y_1) + m_1 \ddot{y}_1 = P\sin(\omega t), \\ c_i(y_i - y_{i-1}) - c_{i+1}(y_{i+1} - y_i) + m_i \ddot{y}_i = 0;\ (\,i = 2,...,n) \end{cases}, \qquad (1)$$

где y_i – перемещение i-й массы.

Учитывая, что для установившихся вынужденных колебаний:

$$y_i = A_i \sin(\omega t),$$

и что гаситель настроен на частоту вынужденных колебаний, систему уравнений движения получаем в виде:

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 - m_1\omega^2)A_1 - c_2 A_2 = P. \\ (c_i + c_{i+1} - m_i\omega^2)A_i - c_i A_{i-1} - c_{i+1}A_{i+1} = 0;\ (\,i = 2,...,n) \end{cases}. \qquad (2)$$

В качестве критерия оптимальности примем минимум перемещения основной массы системы. Для исключения отрицательных величин из области сравнения целевую функцию следует записать в виде квадрата минимизируемой величины. Обозначим $A_i = x_i$.

В качестве ограничений введем пределы перемещения основной массы, обусловленные, например, конструктивными требованиями: $-b \le x_1 \le a$.

Тогда, описанная выше оптимизационная задача в математическом виде выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \min\ f_0 = x_1^2 \\ f_1 = (c_1 + c_2 - m_1\omega^2)x_1 - c_2 x_2 - P = 0 \\ f_i = (c_i + c_{i+1} - m_i\omega^2)x_i - c_i x_{i-1} - c_{i+1}x_{i+1} = 0,\ (\,i = 2,...,n) \\ f_{n+1} = -x_1 - b \le 0 \\ f_{n+2} = x_1 - a \le 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Для решения данной задачи используем метод множителей Лагранжа, расширенный теорией Куна-Таккера. Применяя к функции Лагранжа:

$$\Phi = f_0(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_i) + \sum_{j=n+1} \lambda_j f_j(x_i) \qquad (4)$$

теорему Ферма, получим систему вида:

$$\frac{\partial \Phi(x_i, \lambda_i)}{\partial x_i} = 0, \tag{5}$$

которую дополним уравнениями связи

$$f_i(x) = 0, \tag{6}$$

дополняющей нежесткости

$$\lambda_j f_j(x_i) = 0 \tag{7}$$

и неотрицательности

$$\lambda_j \geq 0. \tag{8}$$

Решая полученную систему, находим оптимальные жесткости.

Примем в качестве варьируемого параметра жесткость i-ого гасителя. Тогда система разрешающих уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1(c_1 + c_2 - m_1\omega^2) - \lambda_2 c_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} = -\lambda_{i-1}c_i + \lambda_i(c_i + c_{i+1} - m_i\omega^2) - \lambda_{i+1}c_{i+1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = f_i(x) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c_i} = \lambda_{i-1}x_{i-1} - \lambda_{i-1}x_i + \lambda_i x_i - \lambda_i x_{i-1} = 0 \\ \lambda_{n+1}\left(x_1 + b\right) = 0, \quad \lambda_{n+1} \geq 0 \\ \lambda_{n+2}(x_1 - a) = 0, \quad \lambda_{n+2} \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

Для одномассового гасителя (n=2) решение системы (9) дает известный результат: величина перемещения основной массы равна нулю, при жесткости гасителя, равной $c_{гас}=m_{гас}\omega^2$.

При решении данной задачи с многомассовым гасителем для удобства вычислений примем в качестве варьируемого параметра жесткость последнего (настроечного) гасителя c_n. Все остальные характеристики системы, кроме перемещений масс, будем считать известными.

Вводя обозначение $m_i\omega^2 = c_i^o$, получаем решения системы уравнений в случае многомассового гасителя в виде:

$$c_n = c_n^o \cdot k,$$
$$\text{где } k = k(c_i, c_i^o), \quad (i = 2...n). \tag{10}$$

Результаты решения системы нелинейных уравнений, составленной по вышеуказанному пути, представлены в таблице 1.

Рассмотренный путь постановки и решения задачи оптимизации дает возможность получить конкретные оптимальные параметры для систем с различными характеристиками и сравнить эффективность использования нескольких видов гасителей.

Таблица 1 – Оптимальная жесткость последней (настроечной) массы

n	Оптимальная жесткость c_n
2	c_2^o
3	$c_3^o \cdot \frac{-c_2 + c_2^o}{-c_2 + c_2^o + c_3^o}$
4	$c_4^o \cdot \frac{c_2 c_3 - c_2^o c_3 - c_2 c_3^o - c_3 c_3^o + c_2^o c_3^o}{c_2 c_3 - c_2^o c_3 - c_2 c_3^o - c_3 c_3^o + c_2^o c_3^o - c_2 c_4^o - c_3 c_4^o + c_2^o c_4^o}$
5	$c_5^o \cdot \frac{c_2 c_3 c_4 - c_3 c_4 c_2^o - c_2 c_4 c_3^o - c_3 c_4 c_3^o - c_2 c_3 c_4^o - c_2 c_4 c_4^o - c_3 c_4 c_4^o + c_4 c_2^o c_3^o +}{c_2 c_3 c_4 - c_3 c_4 c_2^o - c_2 c_4 c_3^o - c_3 c_4 c_3^o - c_2 c_3 c_4^o - c_2 c_4 c_4^o - c_3 c_4 c_4^o + c_4 c_2^o c_3^o + c_3 c_2^o c_4^o + c_4 c_2^o c_4^o +}$ $\frac{+ c_3 c_2^o c_4^o + c_4 c_2^o c_4^o + c_2 c_3^o c_4^o + c_3 c_3^o c_4^o - c_2^o c_3^o c_4^o}{+ c_2 c_3^o c_4^o + c_3 c_3^o c_4^o - c_2^o c_3^o c_4^o + c_2 c_3 c_5^o + c_2 c_4 c_5^o + c_3 c_4 c_5^o - c_2 c_3^o c_5^o - c_3 c_2^o c_5^o - c_3 c_3^o c_5^o - c_4 c_2^o c_5^o + c_2^o c_3^o c_5^o}$

Библиографический список:

1. Шеин А.И. Математическое моделирование механических систем на примере задачи гашения колебаний высотных сооружений [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/matematicheskoe-modelirovanie-mehanicheskih-sistem-na-primere-zadachi-gasheniya-kolebanii-vysotnyh-sooruzhenii/at_download/file.

2. Шеин А.И., Земцова О.Г. Методика математического моделирования маятникового гасителя пространственных колебаний для сооружений башенного типа [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no3/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/3.3/at_download/file

3. Земцова О.Г., Володин В.А. Комплексы программ, применяемые для моделирования и расчета конструкций зданий и сооружений [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/kompleksy-programm-primenyaemye-dlya-modelirovaniya-i-rascheta-konstrukcii-zdanii-i-sooruzhenii/at_download/file

4. Коренев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 304 с.

5. Земцова О.Г. Моделирование и исследование динамики высотных сооружений с гасителями колебаний: дис. … канд. техн. наук. Пенза, 2013. 152 с.

6. Шеин А.И., Земцова О.Г. Гашение колебаний высотных сооружений: в 3 ч. Ч. 2. Математическое моделирование объектов с гасителями при ветровой нагрузке: моногр. Пенза: ПГУАС, 2012. 132 с.

7. Земцова О.Г., Шеин А.И., Бочкарев Р.В. Ветровые нагрузки на сооружения в виде давления переменного ветрового потока [Электронный ресурс] // Современные научные исследования и инновации. 2014. № 11-1 (43). С. 31-34. URL: http://web.snauka.ru/issues/2014/11/40138 (дата обращения: 06.11.2016).