

УДК 624.04

## **МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЁТА СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ**

***Монахов Владимир Андреевич,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

***Зайцев Михаил Борисович,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».*

***Бураева Дарья Александровна,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*студент.*

### **Аннотация**

Приводится доказательство идентичности двух подходов к определению критической нагрузки центрально сжатого стержня в матричной форме. Один из них основан на представлении дифференциального уравнения потери устойчивости в матричном виде с последующим вычислением наименьшего значения собственного числа матрицы критического состояния. В основе другого лежит механическая модель сжатого стержня, расщеплённого в продольном направлении на две ветви, одна из которых «ответственна» за изгибные деформации, а другая, связанная с первой короткими поперечными стерженьками, – за продольные деформации сжатия. Выполнив дискретизацию обеих ветвей, уравнение потери устойчивости стержня, как и первом случае, можно записать в матричном виде. Однако, новая форма уравнения позволяет находить критические нагрузки для стержней, которые могут быть нагружены внешними продольными силами не только на торцах стержней, но и любом

поперечном сечении, расположенном между торцами. Методика анализа критического состояния на основе второго подхода может быть распространена и на стержневые системы.

**Ключевые слова:** стержень, стержневая система, механическая модель, матрица критического состояния, потеря устойчивости, критическая нагрузка.

## **METHODS OF NUMERICAL CALCULATION STABILITY OF COMPRESSED ROD**

***Monakhov Vladimir Andreevich,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

***Zaytsev Mihail Borisovich,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics".*

***Buraeva Darya Alexandrovna,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Student.*

### **Abstract**

We present a proof of identity of two approaches to determination of critical load on a compressed bar, in a matrix form. First approach is based on a differential equation of stability loss in a matrix form, followed by calculation of critical load via maximum eigenvalue of critical state matrix. The second approach is based on a mechanical model of compressed-bent bar, split longitudinally into two parts, one "responsible" for bending deformations, and another, connected with the first part by transverse bonds, - for longitudinal compression deformations. After a discretization of both parts, the equation of stability loss can be written, as in the first approach, in a matrix form. The specified form of equation allows to find critical loads for bars loaded by external forces not only at the ends, but also in any cross-section. The

method of analysis of critical state, based on the second approach, can be applied to bar systems.

**Keywords:** bar, bar system, stability loss, critical load, mechanical model, critical state matrix

Методику сравнительного анализа критического состояния стержня на основе двух различных подходов можно продемонстрировать на примере шарнирно опёртого стержня, сжатого продольными силами, приложенными на торцах стержня (рисунок 1,а). Геометрические размеры, жёсткость стержня на изгиб и внешняя нагрузка приводятся на рисунке.

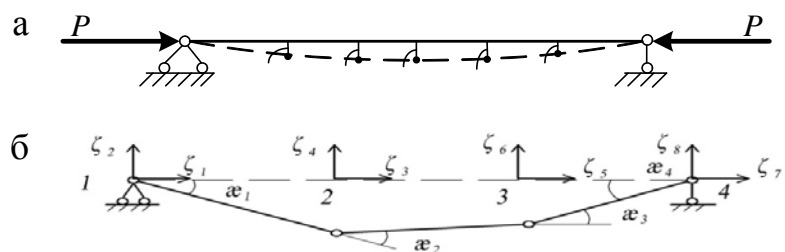


Рисунок 1 – Расчетная схема стержня

Выполнив дискретизацию стержня и ограничиваясь при этом делением на четыре участка одинаковой длины  $d=l/6$ , на первом этапе расчёта осуществляется построение геометрической матрицы стержня [1]:

$$[H] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{d} .$$

Путём обращения транспонированной матрицы  $\left([H]_{3 \times 3}^T\right)^{-1}$  легко установить матрицу влияния изгибающих моментов:

$$[\Lambda]_{(5 \times 5)} = ([H]_{(5 \times 5)}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{36}.$$

Сформировав матрицу внутренней жёсткости

$$[r]_{(5 \times 5)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{36EI}{l}$$

и обратив ещё и её, вычисляют матрицу податливости:

$$[\delta]_{(5 \times 5)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{36EI}.$$

Матрица критического состояния стержня в соответствии с первым подходом находится по формуле [2]:

$$[D]_{(5 \times 5)} = [\Lambda]_{(5 \times 5)}^T [\delta]_{(5 \times 5)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{36} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{36EI} =$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 24 & 42 & 36 & 24 & 12 \\ 18 & 36 & 48 & 36 & 18 \\ 12 & 24 & 36 & 42 & 24 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 24 \end{bmatrix}_{(5 \times 5)} \cdot \frac{l^2}{36^2 EI}.$$

Наибольшее значение собственного числа данной матрицы, вычисленное по программе *EIGEN*, равно  $\omega_{\max} = 0,099$

Программой предусматривается печать в матричном виде не только старшего числа, но и остальных:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0,0990 & & & & 0 \\ & 0,0231 & & & \\ & & 0,0093 & & \\ & & & 0,0046 & \\ & 0 & & & 0,0028 \end{bmatrix} \cdot \frac{EI}{Pl^2}.$$

Кроме того, печатается и матрица собственных векторов в нормализованном виде (см. столбцы матрицы [G]), характеризующих формы потери устойчивости сжатого стержня

$$[G] = \begin{bmatrix} -0.2887 & -0.5000 & 0.5774 & 0.5000 & -0.2887 \\ -0.5000 & -0.5000 & 0 & -0.5000 & -0.5000 \\ -0.5774 & 0 & -0.5774 & 0 & 0.5774 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.2887 & 0.5000 & 0.5774 & -0.5000 & -0.2887 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{6EI}.$$

Значение параметра критической силы, равное

$$P_{кр} = \frac{EI}{\omega_{max} l^2} = \frac{EI}{0,099 \cdot l^2} = \frac{10,097 EI}{l^2},$$

лишь на 0,053% отличается от точной величины  $P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ .

Описанный выше алгоритм получен на основе решения уравнения потери устойчивости

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0,$$

( $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$  – параметр продольной силы  $P$ ), представленного в матричной форме [2]

$$| [\Lambda]^T [\delta] - \omega [E] | = 0.$$

Обращаясь ко второму подходу, сначала следует найти матрицу внешней жёсткости

$$\begin{aligned}
[R]_{(5 \times 5)} &= [H]_{(5 \times 5)}^T [r]_{(5 \times 5)} [H]_{(5 \times 5)} = \\
& \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{6}{l} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{36 \cdot EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{6}{l} = \\
& = \begin{bmatrix} 24 & -22 & 8 & -1 & 0 \\ -22 & 32 & -23 & 8 & -1 \\ 8 & -23 & 32 & -23 & 8 \\ -1 & 8 & -23 & 32 & -22 \\ 0 & -1 & 8 & -22 & 24 \end{bmatrix} \cdot \frac{36^2 EI}{l^3} .
\end{aligned}$$

А затем, обратив последнюю, перейти к матрице внешней податливости

$$[\Delta]_{(5 \times 5)} = [R]_{(5 \times 5)}^{-1} = \begin{bmatrix} 300 & 456 & 468 & 372 & 204 \\ 456 & 768 & 828 & 672 & 372 \\ 468 & 828 & 972 & 828 & 468 \\ 372 & 672 & 828 & 768 & 456 \\ 204 & 372 & 468 & 456 & 300 \end{bmatrix} \cdot \frac{l^3}{36^2 EI} ,$$

характеризующей изгибные деформации упругой ветви модели сжатого стержня. Полученная матрица является одним из сомножителей матрицы критического состояния рассматриваемого метода [3]

$$[A]_{(5 \times 5)} = [\Delta]_{(5 \times 5)} [N]_{(5 \times 5)} , \quad (*)$$

формированием которой заканчивается первый этап расчёта на устойчивость.

Структура матрицы равновесия шарнирной цепи, т.е. второй ветви модели сжатого стержня, при данном нагружении имеет вид

$$[N]_{(5 \times 5)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{6}{l} .$$

Вычислив произведение матриц согласно (\*), а именно:

$$\begin{aligned}
[A]_{(5 \times 5)} &= \begin{bmatrix} 300 & 456 & 468 & 372 & 204 \\ 456 & 768 & 828 & 672 & 372 \\ 468 & 828 & 972 & 828 & 468 \\ 372 & 672 & 828 & 768 & 456 \\ 204 & 372 & 468 & 456 & 300 \end{bmatrix} \cdot \frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{6}{l} = \\
&= \begin{bmatrix} 0.0185 & 0.0185 & 0.0139 & 0.0093 & 0.0046 \\ 0.0185 & 0.0324 & 0.0278 & 0.0185 & 0.0093 \\ 0.0139 & 0.0278 & 0.0370 & 0.0278 & 0.0139 \\ 0.0093 & 0.0185 & 0.0278 & 0.0324 & 0.0185 \\ 0.0046 & 0.0093 & 0.0139 & 0.0185 & 0.0185 \end{bmatrix} \cdot \frac{l^2}{EI},
\end{aligned}$$

в результате приходят к матрице, собственные числа и векторы которой совпадают с теми, что получены в первом случае. А это и является подтверждением идентичности изложенных методов определения критической нагрузки сжатого стержня. Преимущество второго подхода к анализу устойчивости заключается в том, что с помощью матрицы равновесия шарнирной цепи можно рассматривать задачи, в которых продольные нагрузки могут быть приложены в любых поперечных сечениях стержня. К тому же, матрица внешней податливости упругой ветви позволяет рассматривать устойчивость стержней переменного сечения.

Очевидно, расчёт стержня на устойчивость можно полностью автоматизировать и выполнять с помощью ПЭВМ [4,6].

Значение критической нагрузки можно уточнить, если повысить степень дискретизации стержня до шести-восьми.

### **Библиографический список:**

1. Ржаницын А.Ф. Расчёт стержневых систем с применением принципа двойственности // Исследования по теории сооружений. 1980. Вып. XXIV. С. 10-23.
2. Ржаницын А.Ф. Строительная механика. М.: Стройиздат, 1982. 400 с.
3. Потапов В.Д. Строительная механика. Книга 2. М.: Стройиздат, 2007. 577 с.

4. Смирнов А.Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1984. 415 с.

5. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наук», 1978. 352 с.

6. Монахов В.А., Зайцев М.Б. Расчет стержневых систем с использованием теории графов в среде «Matlab» [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no3/stroitel'naya-mehanika/3.13/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no3/stroitel'naya-mehanika/3.13/at_download/file).