

УДК 624.31

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПРОГИБА БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ СО СЛОЖНОЙ РЕШЕТКОЙ

Кирсанов Михаил Николаевич,

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники.

Аннотация

Для статически определимой фермы с параллельными поясами и нестандартной решеткой по формуле Максвелла - Мора получена зависимость прогиба середины пролета от размеров фермы и числа панелей. Ферма имеет две опоры и равномерно загружена по узлам верхнего пояса. В решении использована система компьютерной математики Maple и метод индукции. Найдена асимптотика решения.

Ключевые слова: ферма, Maple, прогиб, индукция, точное решение

AN ANALYTICAL EXPRESSION FOR THE DEFLECTION OF A TRUSS GIRDER WITH A COMPLEX LATTICE

Kirsanov Mikhail Nikolaevich,

National Research University "MPEI", Moscow,

Doctor of Science, Professor of the department "Theoretical Mechanics and Mechatronics".

Abstract

For statically determinate trusses with parallel belts and custom lattice by the formula of Maxwell – Mohr the dependence of the deflection of the mid span of the size of truss and number of panels is obtained. The truss has two supports and uniformly loaded in the nodes of the upper belt. The solution is found by use of the

system of computer mathematics Maple and the method of induction. The asymptotic solution is detected.

Keywords: truss, Maple, deflection, induction, exact solution

Введение. Значение простых аналитических решений для инженерных конструкций неоспоримо. Чаще всего они играют роль предварительных прикидочных оценок проектируемой конструкции, позволяющих оптимальным образом выбрать ее параметры. Одним из таких параметров балочных ферм является число панелей. Если вывод формул для прогиба, зависящего лишь от размеров фермы, не представляет трудности, то зависимость от числа панелей может быть получена только методом индукции [1,2]. Именно этот метод используется в предлагаемом расчете. Ранее метод индукции применялся в аналитических расчетах прогиба и напряженного состояния плоских ферм [1-10], пространственных [11-13] и ферм с реологическими свойствами материала [14,15].

Постановка задачи. Для того, чтобы рассчитать прогиб фермы по формуле Максвелла – Мора, необходимо знать усилия в стержнях. Расчет усилий в стержнях балочных ферм с параллельными поясами или простой треугольной решеткой не представляет особой сложности и может быть выполнен стандартными методами (методом сечений или методом вырезания узлов) без применения вычислительной техники. Значительно сложнее определяются усилия в шпренгельных фермах со сложной решеткой. Пример такой фермы дан на рисунке 1. Центральное расположение вертикальной стойки средней панели предполагает нечетное число панелей $n=2k-1$. При этом ферма содержит $5n+3$ узлов и $m=10n+6$ стержней (включая три опорные).

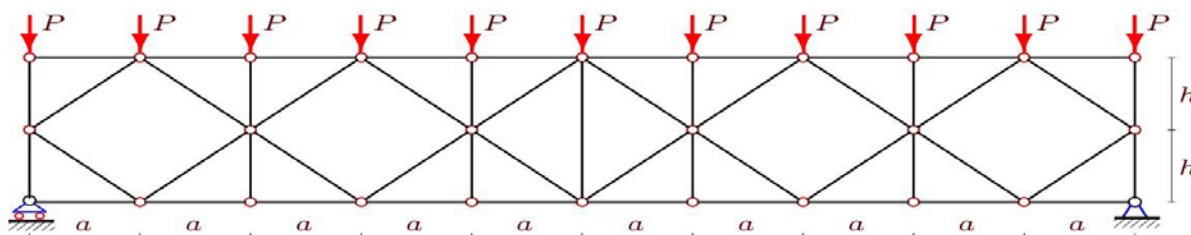


Рисунок 1 – Ферма при $k=3$

Формула Максвелла–Мора имеет вид:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i s_i l_i / (EF), \quad (1)$$

где S_i – усилия в стержнях фермы от действия нагрузки, распределенной по узлам верхнего пояса, s_i – усилия от единичной вертикальной нагрузки, приложенной к центральному узлу в середине пролета, l_i – длины стержней, E – модуль упругости, F – площадь сечения стержней. Усилия в стержнях находим методом вырезания узлов с помощью программы [16]. Данные о конфигурации и размерах фермы вводятся через координаты ее узлов. В сумму (1) не входят опорные стержни, которые приняты недеформируемыми. Систему m уравнений равновесия запишем в матричной форме $\mathbf{G}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{B}}$, где $\bar{\mathbf{S}}$ – вектор усилий в стержнях, включая три опорные, $\bar{\mathbf{B}}$ – вектор нагрузок. В нечетные элементы B_{2i-1} записываются горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , в четные B_{2i} – вертикальные. Решение системы линейных уравнений находим в символьной форме, пользуясь системой компьютерной математики Maple [16] с помощью обратной матрицы.

Решение. Для получения искомой формулы для фермы с произвольным числом панелей методом индукции необходимо сначала получить последовательность аналитических решений задачи для ферм с одной, двумя, тремя и т. д. панелями. Если при этом решения приобретают подобную форму, в которой можно вычленить слагаемые одного вида, но с разными числовыми коэффициентами, то метод индукции может дать результат. В этом случае коэффициенты при подобных слагаемых образуют последовательность, общие члены которых находятся средствами системы Maple. Для рассматриваемой фермы выражение для прогиба имеет вид $\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 h^3 + C_3 c^3) / (4h^2 EF)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Для последовательности 0, 32, 256, 992, 2720, 6080, 11872, 21056, 34752, 54240 коэффициентов при a^3 , полученных при расчете ферм для

$k=1,2,\dots,10$, с помощью оператора «rgf_findrecur» получено рекуррентное уравнение

$$C_{1,k} = 5C_{1,k-1} - 10C_{1,k-2} + 10C_{1,k-3} - 5C_{1,k-4} + C_{1,k-5},$$

которому удовлетворяют члены обнаруженной последовательности. Решение этого уравнения дает оператор «rsolve». Аналогично получают и другие коэффициенты:

$$C_1 = 4k(k-1)(5k^2 - 5k + 2) / 3, C_2 = 2(4k - 1 + (-1)^k), C_3 = (2k - 1)^2.$$

На рисунке 2 показано изменение прогиба в зависимости от размеров фермы и числа панелей. Кривые относительного (безразмерного) прогиба $\Delta' = \Delta EF_0 / (P_s L)$ построены при фиксированной длине пролета $L = 2an = 90\text{ м}$, заданной общей нагрузке $P_s = (4k - 1)P$, размер h на рисунке в метрах.

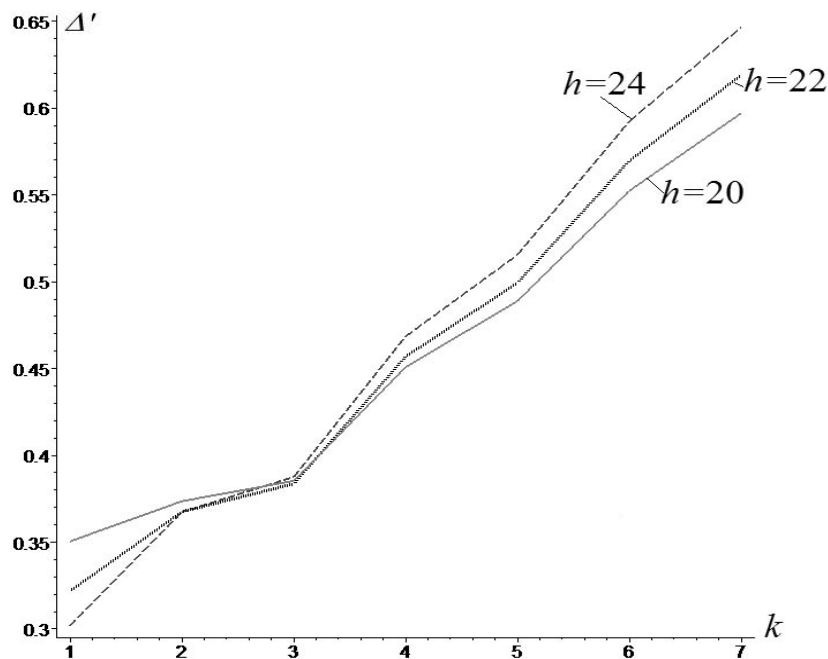


Рисунок 2 – Зависимость прогиба от числа панелей

Интересной особенностью решения является пересечение трех кривых в одной (с некоторой погрешностью) точке. Чередование кривых до этой точки и после нее меняется. В одном случае прогиб меньше при больших высотах h , в другом – при меньших. Это дает проектировщику информацию о выборе оптимального сочетания высоты фермы и числа панелей. Заметим, что

численные методы такую информацию обычно не предоставляют. Асимптотику решения можно оценить, вычислив предел. Оператор **limit** системы Maple дает: $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (4L)$. В обзорах [9,10] проведены аналогичные асимптотические исследования.

Заключение. Найденная формула для прогиба фермы имеет простую структуру, легко обобщается на случай переменных по поясам и решетке жесткостей стержней, и может быть использована как тестовое или оценочное решение в проектных и теоретических расчетах. С помощью полученного решения легко подобрать оптимальные размеры фермы и число панелей.

Библиографический список:

1. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.

2. Кирсанов М.Н. Формула для расчета прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал. 2016. № 6 (7). С. 6-8.

3. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.

4. Кийко Л. К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.

5. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование прогиба плоской балочной фермы под действием равномерной нагрузки [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3.

6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "butterfly" // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4. С. 2-5.

7. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С.257-259.

8. Тиньков Д. В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 52-56.

9. Тиньков Д. В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.

10. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66-73.

11. Kirsanov M. N. Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 3 (31). Pp. 71-79.

12. Ларичев С. А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 4-8.

13. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52-58.

14. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25-32.

15. Кирсанов М.Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2000. № 5. С. 141-144.

16. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.