

УДК 624.04

**О ЗАВИСИМОСТИ ПРОГИБА СОСТАВНОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С
ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЯСАМИ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ ПРИ
ЗАГРУЖЕНИИ ВЕРХНЕГО ПОЯСА**

Кирсанов Михаил Николаевич,

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,
доктор физико-математических наук, профессор.*

Васьков Максим Игоревич,

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,
студент института энергомашиностроения и механики.*

Аннотация

Методом индукции выводится точная формула для прогиба составной балочной фермы под действием равномерной узловой нагрузки по верхнему поясу в зависимости от числа панелей, размеров и действующей нагрузки. Ферма состоит из двух шарнирно соединенных ферм с треугольной решеткой и опирается на два неподвижных шарнира. Предполагается упругая стадия работы материала. Расчет производится по формуле Максвелла - Мора в предположении одинаковых жесткостей стержней. Для определения усилий в стержнях и нахождения закономерности образования коэффициентов используется система компьютерной математики Maple. Приводятся основные элементы кода программы.

Ключевые слова: ферма, прогиб, точное решение, число панелей.

**ON THE DEPENDENCE OF THE DEFLECTION OF THE COMPOSITE
GIRDER WITH PARALLEL CHORDS FROM THE NUMBER OF PANELS
IN THE LOAD CASE OF THE UPPER BELT**

Kirsanov Mikhail Nikolaevich,

*National Research University "MPEI", Moscow,
Doctor of Sciences, Professor.*

Vas'kov Maxim Igorevich,

National Research University "MPEI", Moscow,

Student of Institute of engineering and mechanics.

Abstract

By induction, an accurate formula for the deflection of the composite truss under uniform nodal load on the top belt depending on the number of panels, sizes and current loads is derived. The truss consists of two hinged trusses with a triangular lattice and is based on two fixed hinge. The elastic stage of the work material is assumed. The calculation is made by the Maxwell - Mohr's formula assuming the same stiffness of the rods. To find the forces in the members and the regularities of the coefficients the computer algebra system Maple is used. The basic elements of the program code are included.

Keywords: truss, deflection, exact solution, the number of panels.

Точные формулы в расчетах многоэлементных системах, например фермах, имеют как теоретическое значение, так и практическое. Явные закономерности изменения прогиба в зависимости от числа панелей и размеров конструкции могут подсказать общий характер функциональных зависимостей, выявить которые численно можно только приблизительно. Для практических расчетов точные формулы могут быть тестовой поддержкой, предостерегающей инженера, использующего пакеты численных расчетов (как правило основанные на методе конечных элементов) от ошибочных решений.

Для некоторых плоских балочных ферм точные решения для прогиба получены в [1-7]. Метод индукции, примененный в этих работах, с успехом использовался и для расчетов пространственных систем [8-10], для оценки динамики ферм [11,12]. В работах [13,14] анализируется прогиб *составных* плоских ферм. Рассмотрим составную ферму под действием нагрузки, распределенной по верхнему поясу (рисунок 1). Для вычисления усилий в стержнях и прогиба воспользуемся системой символьных вычислений Maple

[15-17]. Алгоритм расчетов [18] состоит из двух частей. В первой части вычисляются усилия в стержнях. Для этого составляется матрица метода вырезания узлов, в которую входят направляющие косинусы усилий в стержнях. Геометрия фермы с n панелями в пролете вводится в цикле по ее узлам следующими операторами:

```
> for i to n do
> x[i]:=a*i-a: x[i+n]:=a*i+a*n:
> y[i]:=0: y[i+n]:=0:
> od:
> for i to 2*n+1 do
> x[i+2*n]:=a*i-a: y[i+2*n]:=b:
> od:
```

Структура стержней (плоский граф) задается векторами, содержащими номера вершин, инцидентных дугам-стержням (направление дуг выбирается условно и на решение не влияет):

```
> for i to n-1 do
> N[i]:=[i,i+1];
> N[i+n-1]:=[i+n,i+1+n];
> od:
> for i to n0 do
> N[i+6*n-2]:=[i*2-1,i*2+2*n];
> N[i+6*n-3+2*n0]:=[i*2+n-1,i*2+n-1+2*n];
> od:
> for i to n0-1 do
> N[i+6*n-2+n0]:=[i*2+1,i*2+2*n];
> N[i+6*n-3+3*n0]:=[i*2+n-1,i*2+n-1+2*n+2];
> od:
> for i to 2*n do
> N[i+2*n-2]:=[i+2*n,i+2*n+1];
```

```

> od:
> for i to n do
> N[i+4*n-2]:=[i,i+2*n];
> N[i+5*n-2]:=[i+n,i+3*n+1];
> od:

```

Здесь $n=2*n_0-1$.

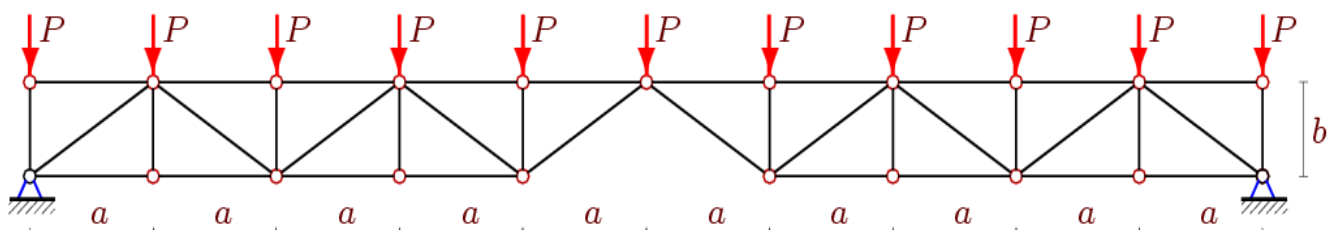


Рисунок 1 – Ферма при $n_0 = 3$

Матрица уравнений равновесия метода вырезания узлов заполняется следующим образом:

```

> G:=Matrix(n3,n3):
> for i to n3 do
> Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
> Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
> L[i]:=subs(a^2+b^2=c^2,sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2));
> for j to 2 do
> jj:=2*N[i][2]-2+j:
> if jj<=n3 then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
> jj:=2*N[i][1]-2+j:
> if jj<=n3 then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
> od;
> od:

```

Здесь $n3=8*n+2$ – число стержней фермы, включая опорные стержни.

Индукция по результатам десяти ферм дает следующее общее решение:

$$\Delta EF = P(2n_0 - 1)^2 \frac{3c^3 + 8n_0 a^3 (n_0 - 1)}{6b^2}, \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. График этой зависимости при $L = 2n_0 a = 30$ м (рисунок 2, размеры в метрах) и фиксированной общей нагрузке P_{sum} , не зависящей от числа панелей, $P = P_{sum} / (2n_0 + 3)$ подсказывает наличие наклонных асимптот. Действительно, имеем $\Delta' = \Delta EF / P_{sum}$, $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \Delta' / n_0 = b$.

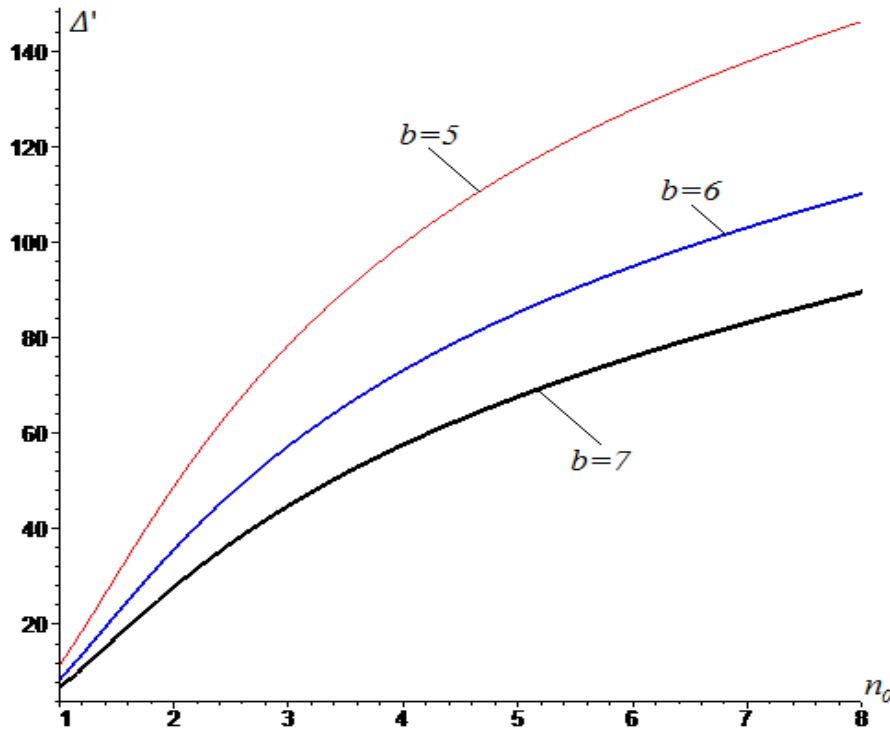


Рисунок 2 – Зависимость прогиба от числа панелей

На рисунке 3 отображена зависимость прогиба от высоты фермы при различном числе панелей. Весьма важной особенностью этих кривых является наличие экстремальных точек, показывающих возможность оптимизации конструкции за счет выбора рационального соотношения пролета и высоты. Заметно смещение оптимальной высоты в сторону уменьшения при увеличении числа панелей (длина пролета остается фиксированной $L = 2n_0 a = 30$ м). Аналитическое выражение для экстремума получить не удастся. Численный же анализ итоговой формулы (1) несложен.

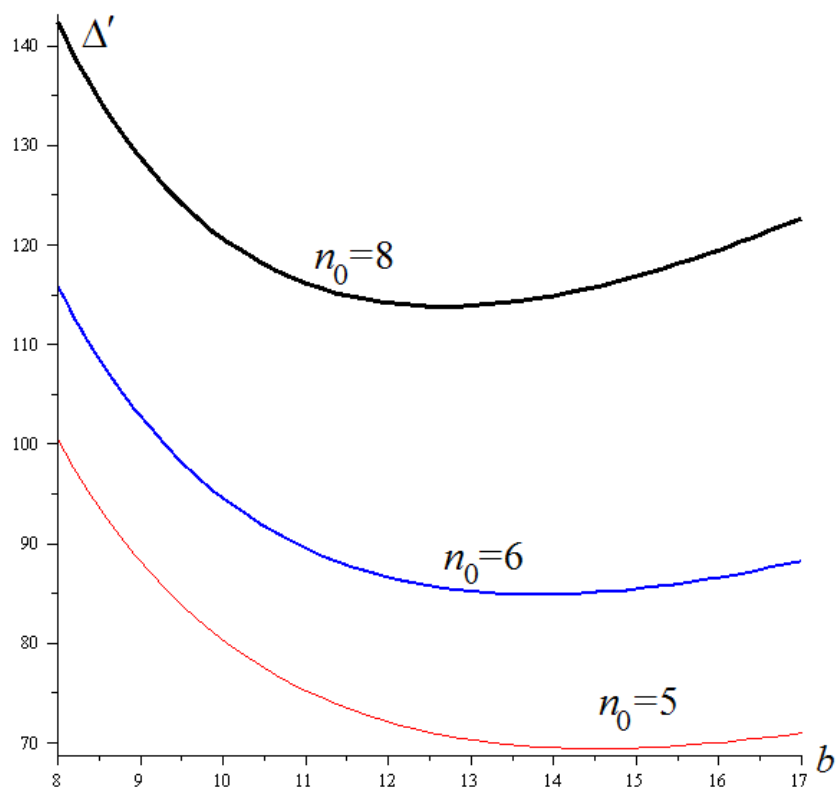


Рисунок 3 – Зависимость прогиба от высоты фермы

Библиографический список:

1. Тиньков Д. В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. Т. 1. С. 52-56.

2. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

3. Ахмедова Е.Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. Т. 1. С. 62-65.

4. Реутов Д.О. Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» : Материалы

конференции и труды семинара. Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. С. 256-261.

5. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.

6. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.

7. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. 9(36). С. 44-55.

8. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 : Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.

9. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52-58.

10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.

11. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. Т. 1. С. 31-34.

12. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Частотное уравнение для плоской балочной фермы регулярной структуры с треугольной решеткой // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» : Материалы конференции и труды семинара. Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. С. 198-199.

13. Шикин К.С., Китаев С.С. Деформация составной балочной фермы шпренгельного типа // Актуальные вопросы образования и науки : Сборник

научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. Часть 7. С. 154-155.

14. Афанасьев В.А., Бойко О.О. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами // Актуальные вопросы образования и науки : сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 15-16.

15. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.

16. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.

17. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2011. 800 с.

18. Кирсанов М.Н. Решебник. теоретическая механика / Под ред. А.И.Кириллова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 382 с.