

УДК 624.04

**МЕТОД ВНЕШНИХ НАГРУЗОК ПРИ РАСЧЕТЕ  
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОЧНЫХ СИСТЕМ МКЭ**

***Шейн Александр Иванович,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика».*

***Чуманов Александр Васильевич,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*магистрант кафедры «Механика».*

**Аннотация**

Приводится новый подход к расчету упругопластических стержневых систем на базе метода конечных элементов (МКЭ), основанный на переносе внутренних моментов пластических зон в вектор внешних нагрузок. Предложен алгоритм реализации данного подхода. Он реализует пошаговый итерационный процесс вычисления моментов пластических зон и перенос этих моментов сопротивления изгибу участков с пластическими деформациями в вектор дополнительных внешних нагрузок. При этом упругая часть упругопластических элементов преобразуется в новую упругую матрицу жесткости. Показана работа метода внешних нагрузок.

**Ключевые слова:** вектор внешней нагрузки, матрица жесткости, пластический момент сопротивления изгибу, алгоритм расчета.

**THE METHOD OF EXTERNAL LOADS IN THE CALCULATION OF THE  
ELASTOPLASTIC GIRDER SYSTEMS FOR FINITE ELEMENT**

***Shein Alexander Ivanovich,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor, Head of the department “Mechanics”.*

*Chumanov Alexander Vasilevich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Undergraduate of the department "Mechanics".*

## **Abstract**

We present a new approach to the calculation of elastic-plastic core systems based on the finite element method based on the reference of the internal aspects of plastic zones in the vector of external loads. An algorithm for the implementation of this approach. It implements the calculation of the moment of plastic zones and the transfer of these moments areas of resistance to plastic deformation in the vector of additional external loads. In this case the elastic elements of the elastic-plastic is transformed into a new elastic stiffness matrix. It is shown that the method of work of external loads.

**Keywords:** the external load vector, stiffness matrix, plastic moment of resistance to bending, calculation algorithm

**Введение.** В настоящее время методом конечных элементов (МКЭ) производят расчеты физически нелинейных и идеально упругопластических систем, однако эти расчеты достаточно трудоемки и малонаглядны. Нелишне заметить, что МКЭ приобрел колоссальную популярность именно в силу высокой степени наглядности и легкости формализации и реализации алгоритма расчета. Поэтому нахождение методики построения физически наглядного, легко реализуемого решения задачи упругопластического деформирования механической системы является актуальной задачей механики.

Предлагаемое решение не стоит путать с методом упругих решений А.А. Ильюшина, который применяют при реализации нелинейных уравнений теории пластичности. Там решения нелинейных задач пластичности сводятся к последовательности линейных задач, каждая из которых может рассматриваться как некоторая задача теории упругости (так называемый метод

упругих решений). Одним из методов упругих решений является метод дополнительных нагрузок. Он предложен А.А. Ильюшиным [1], а затем, в другой модификации, рассмотрен И.А. Биргером [2]. В этих работах дополнительная нагрузка дает поправку, которая возвращает решение на действительную кривую деформирования.

**Алгоритм метода.** Рассмотрим статическое нагружение балки. Предположим, балка имеет плоскость симметрии, совпадающую с плоскостью деформирования, материал балки подчиняется диаграмме Прандтля и одинаково работает на растяжение и сжатие. При некоторой нагрузке напряжения крайних волокон достигают значений  $\sigma^T$ , то есть действующий в сечении внешний момент  $M_j$  превышает момент максимально возможного упругого состояния сечения  $M_j^{\max y}$ :

$$M_j > M_j^{\max y}, \quad (1)$$

и начинается упругопластическая стадия деформирования [3, 4]. После появления текучести в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения при дальнейшем увеличении изгибающего момента пластическое состояние материала распространяется в двух направлениях: в направлении к нейтральной оси вглубь сечения и вдоль балки. При дальнейшем плавном нагружении в поперечных сечениях балки будут взаимодействовать две зоны напряженного состояния – упругая и пластическая. Предельное состояние сечения наступит тогда, когда текучесть распространится на всю глубину. Дальнейшая деформация балки будет происходить при постоянном моменте внутренних сил, а в рассматриваемом поперечном сечении образуется пластический шарнир, который может воспринимать этот постоянный момент, равный предельному моменту сечения. То есть упругопластическое состояние  $j$ -ого сечения реализуется, когда момент внешних сил находится в пределах

$$M_j^{pl} > M_j > M_j^{\max y}, \quad (2)$$

где  $M_j^{pl}$  – момент, соответствующий образованию пластического шарнира.

Пусть нагружение происходит ступенчато с заданной перспективой увеличения и на  $i$ -ом шаге нагружения вектор нагрузки определяется соотношением

$$P_i = P_0 + \Delta P \cdot i, \quad (3)$$

где  $P_0$  – начальный, вызывающий заведомо упругую работу механической системы, вектор нагрузки;  $\Delta P$  – величина приращения вектора нагрузки. Поделим стержневые элементы на  $n_1$  частей (новых конечных элементов) по длине пролетов балок. Алгоритм упругопластического расчета МКЭ можно построить следующим образом: с момента появления пластических зон модифицируем матрицу упругой жесткости элементов за счет переноса внутренних моментов пластических зон во внешнюю нагрузку (рисунок 1а).

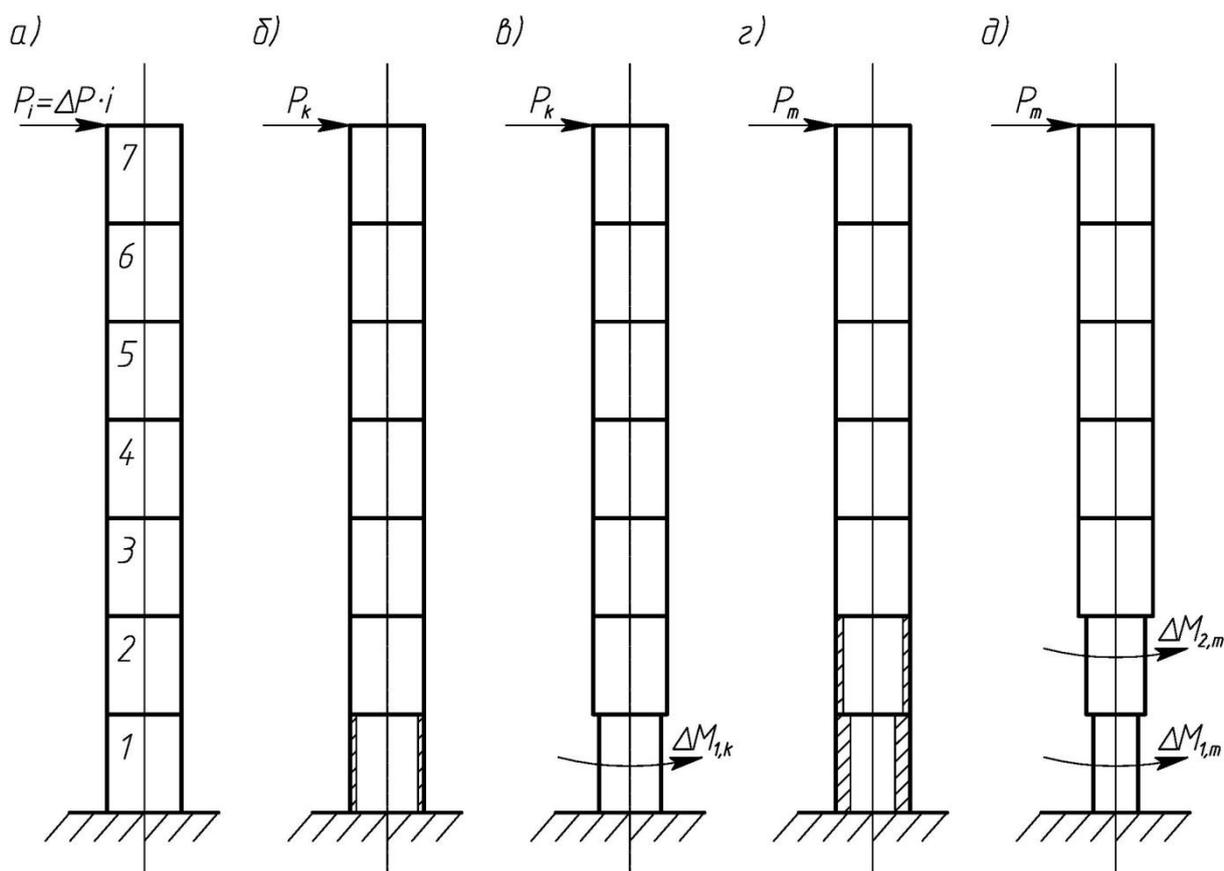


Рисунок 1 – Распространение пластических зон по длине стержня и глубине сечения

Введем в рассмотрение дополнительный вектор внешней нагрузки  $F_{pl}$  [3]. При реализации алгоритма в вектор внешних нагрузок относим моменты пластических зон:

$$\Delta M_j = M_j - M_j^y, \quad (4)$$

где  $M_j^y$  – момент упругой части сечения.

В местах образования пластических зон конечно-элементную сетку можно (целесообразно) сгущать. При этом будем полагать пластические зоны постоянными по длине  $j$ -ого элемента.

В зависимости от того, превосходят действующие в сечениях моменты внешних сил максимальный упругий момент или нет, компонентами вектора внешних нагрузок могут быть либо моменты пластических зон  $\Delta M_j$  в одном из узлов  $j$ -ого конечного элемента, либо нули (рисунки 1б, в, г, д):

$$F_{pl} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad \Delta M_j \quad \dots \quad \Delta M_t \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (5)$$

Исходная «упругая» система уравнений МКЭ (например, рисунок 1а)

$$K_e \cdot U = P_i \quad (6)$$

преобразуется к виду (рисунки 1б-в или рисунки 1г-д):

$$K_{e-pl} \cdot U = P_i - F_{pl}. \quad (7)$$

Здесь  $K_e$  – матрица жесткости исходной упругой системы,  $P_i$  – вектор внешних нагрузок,  $U$  – вектор перемещений,  $K_{e-pl}$  – матрица жесткости упругого ядра механической системы.

Алгоритм организации итерационного процесса показан на рисунке 2.

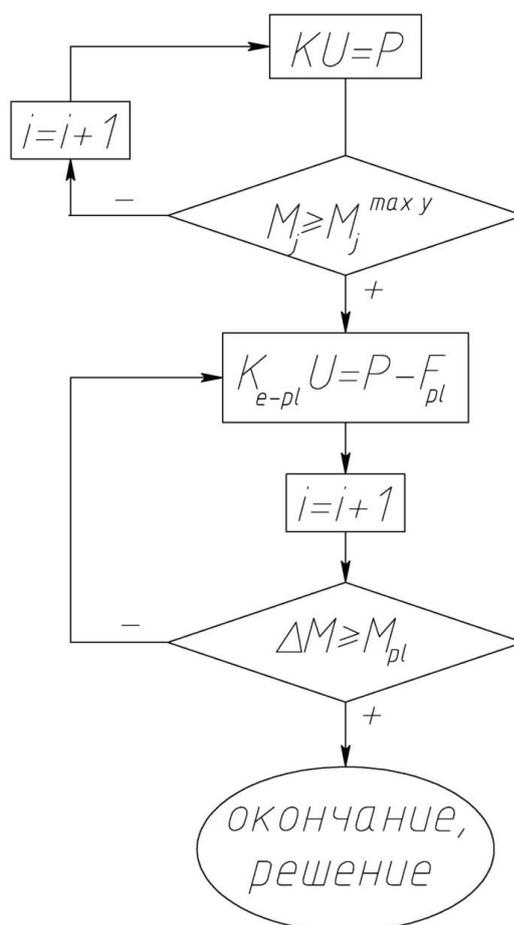


Рисунок 2 – Алгоритм упругопластического расчета

Увеличивая нагрузку можно проследить процесс распространения пластичности по элементам упругой системы, определить перегруженные и недогруженные элементы.

Упругопластический расчет по описанному выше алгоритму был реализован на простом примере консольной балки длиной 6 метров прямоугольного сечения размерами  $b \times h = 0,1 \times 0,3$  м (рисунок 3). Балка была разбита по длине на 20 конечных элементов. К краю консоли приложена возрастающая нагрузка. Шаг по нагрузке составлял 5 Н. На 18000 шаге в нижнем сечении (нижнем КЭ) образовывался пластический шарнир.

Распределение пластических зон на 16000 шаге показано на рисунке 3. На рисунке 4 показан упругопластический изгиб балки на 16000 шаге.

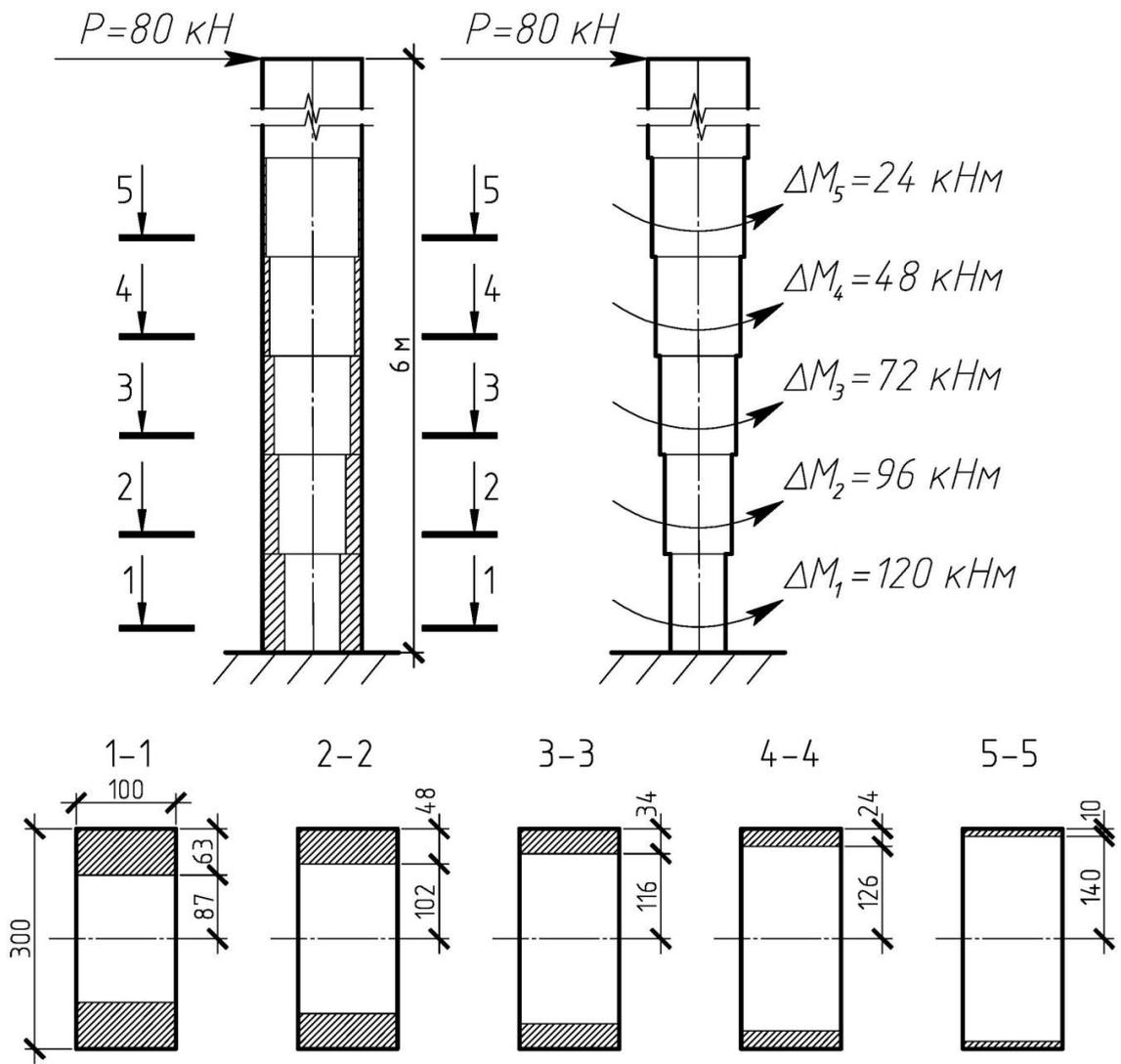


Рисунок 3 – Распределение пластических зон (выделено штриховкой)

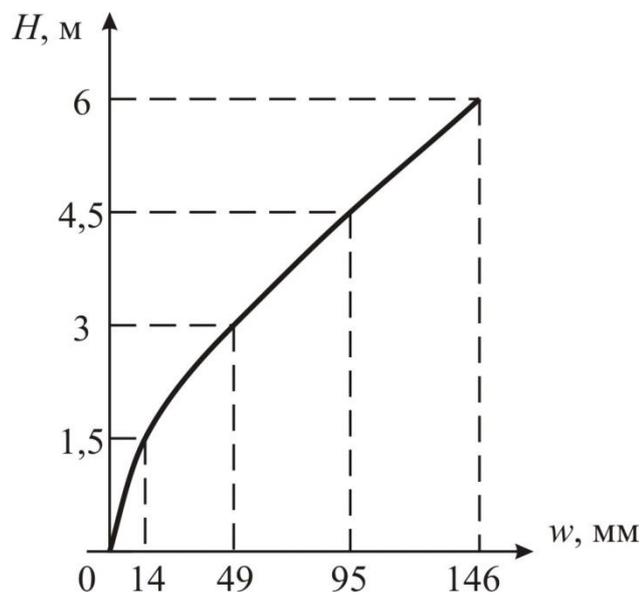


Рисунок 4 – Упругопластический изгиб

На 18000 шаге в нижнем сечении (нижнем КЭ) образовывался пластический шарнир. Распределение пластических зон на 17999 шаге приведено в таблице 1. При этом пластичность распространилась на 7 из 20 элементов балки.

Таблица 1 – Распределение пластических зон по глубине сечений перед разрушением балки (указан размер зоны пластичности с одной стороны от оси)

Шаг по нагрузке	Глубина пласт.зоны в 1КЭ	Глубина пласт.зоны в 2КЭ	Глубина пласт.зоны в 3КЭ	Глубина пласт.зоны в 4КЭ	Глубина пласт.зоны в 5КЭ	Глубина пласт.зоны в 6КЭ	Глубина пласт.зоны в 7КЭ	Глубина пласт.зоны в 8КЭ	Глубина пласт.зоны в 9-20КЭ
17999	0,148	0,092	0,068	0,049	0,034	0,02	0,00769	0	0

Итерационный процесс можно остановить после появления первого пластического шарнира или (для статически неопределимых систем) продолжать нагружение до образования механизма разрушения системы.

**Вывод.** Таким образом, в работе предложен физически наглядный и легко формализуемый метод расчета упругопластических систем методом конечных элементов.

### **Библиографический список:**

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. Биргер И.А. Метод дополнительных деформаций в задачах теории пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. №1. С. 47-56.
3. Шеин А.И., Бочкарев Р.В. Использование композитных систем типа «упругий – пластический» для гашения колебаний конструкций [Электронный

ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no2/stroitel'naya-mehanika/2.4/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no2/stroitel'naya-mehanika/2.4/at_download/file).

4. Шейн А.И. Математическое моделирование механических систем на примере задачи гашения колебаний высотных сооружений [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/matematicheskoe-modelirovanie-mehanicheskikh-sistem-na-primere-zadachi-gasheniya-kolebaniy-vysotnyh-sooruzhenii/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/matematicheskoe-modelirovanie-mehanicheskikh-sistem-na-primere-zadachi-gasheniya-kolebaniy-vysotnyh-sooruzhenii/at_download/file).