

УДК 624.04

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Монахов Владимир Андреевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Вечкасов Алексей Владимирович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

магистрант.

Аннотация

Разработана методика формирования матрицы предельного состояния стержневой системы с помощью геометрической матрицы, построенной в автоматическом режиме на основе графа стержневой системы. В процессе построения матрицы используются матричные преобразования векторов перемещений системы при переходе от локальных систем координат к глобальной системе. Совокупность трёх базовых матриц стержневой системы: матрицы инцидентности графа, характеризующей топологическую структуру расчётной схемы, матрицы направляющих косинусов углов наклона векторов перемещений и матрицы длин стержней решает проблему автоматического построения геометрической матрицы рамы. Формирование условий текучести в матричной форме, составляющих вторую часть матрицы предельного состояния, не вызывает затруднений. Приводится пример вычисления параметра предельной нагрузки на основе матрицы предельного состояния двухпролётной рамы с использованием метода линейного программирования.

Ключевые слова: стержневая система, граф рамы, матрица инцидентности, геометрическая матрица, вектор перемещений, предельная нагрузка.

GENERATION OF MATRIX OF LIMIT STATE OF ROD SYSTEM

Monakhov Vladimir Andreevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Vechkasov Alexey Vladimirovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Undergraduate.

Abstract

This paper presents a calculation procedure of a load-bearing capacity of a bar system using an equilibration matrix, which was automatically based on a graph of a bar system. There have been used matrix conversions of displacement vectors of elements during the transition from local to global systems. A set of matrices consisting of an incidence matrix of a graph, describing a topological structure of the analytical model, matrices of direction cosines of the angles of displacement vectors and matrices of bar length solves the problem not only of automatic construction but matrix of yield conditions of a frame.

Formation of conditions of fluidity in the matrix form constituting the second part of the matrix of limiting state, does not cause difficulties. Provides an example of calculating the option limit load (limit load) on the basis of the matrix of limiting state two-span frame using the method of linear programming.

Keywords: a bar system, a graph of frame, an incidence matrix, a displacement vector, limit load.

Решение задачи полной автоматизации формирования матрицы предельного равновесия стержневой системы, содержащей наряду с условиями равновесия также и условия текучести в пластических шарнирах, предлагается выполнять с привлечением методов теории графов к описанию расчётных схем стержневых систем и матричных преобразований векторов перемещений с целью определения деформаций. Обладая матрицей предельного равновесия, на

основе статической теоремы ТРП нетрудно определить несущую способность стержневой системы, воспользовавшись одним из методов математического программирования. Проблема формирования матрицы в автоматическом режиме в литературе по строительной механике, по-видимому, не рассматривалась [1-5].

Методику формирования матрицы предельного состояния достаточно продемонстрировать на примере анализа несущей способности двухпролётной рамы (рисунок 1,а).

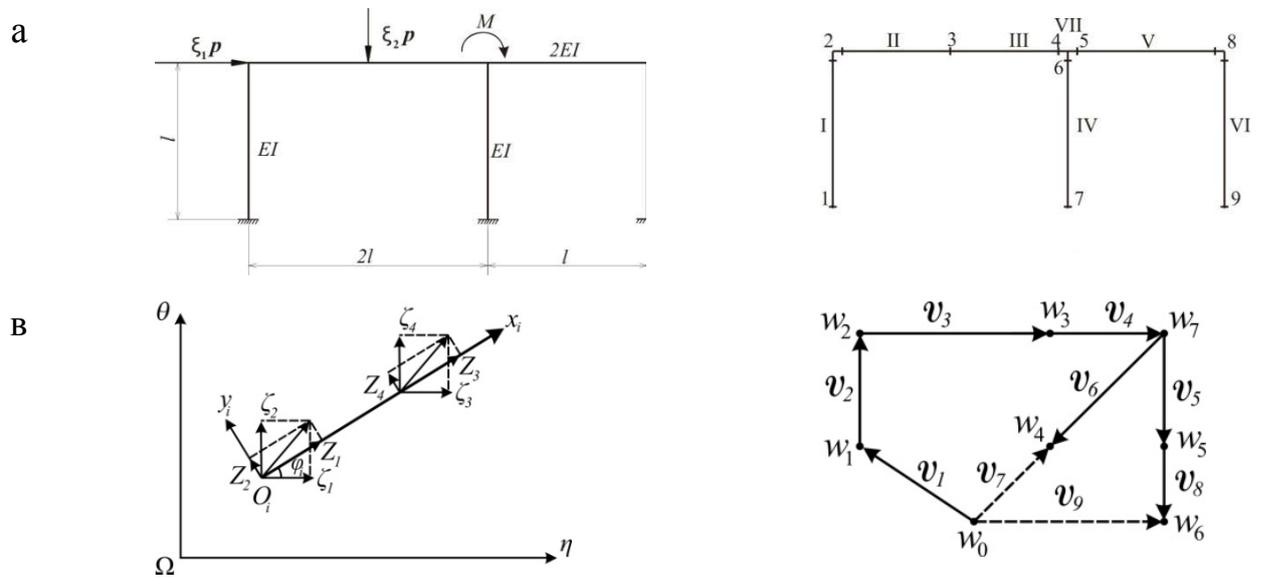


Рисунок 1 – Расчетная схема рамы. Граф рамы

Представляя упруго-пластическую стержневую систему в виде набора конечного числа отрезков стержней (элементов), связанных в сечениях, где возможно возникновение пластических шарниров (рисунок 1,б), поначалу деформированное состояние механической системы можно описать матричным соотношением

$$\bar{\gamma} = [G]\bar{\zeta} \quad (1)$$

где $\bar{\gamma}$ – вектор-столбец удлинений и перекосов элементов, $[G]$ – матрица преобразования, $\bar{\zeta}$ – вектор-столбец узловых перемещений, заданных в глобальной системе координат $\eta\Omega\theta$ (рисунок 1,в); порядок вектора $\bar{\zeta}$ равен удвоенному числу узлов принятой дискретной модели стержневой системы.

Одновременно вводятся локальные системы координат $x_j O_j y_j$ ($j=1,2,\dots,7$), оси абсцисс которых совмещаются с осями элементов.

Удвоенное количество узлов, включая и опорные, определяет число компонент вектора $\bar{\gamma}$. Если для некоторой упруго-пластической стержневой системы известна матрица $[G]$, то несложно перейти к геометрической матрице $[H]$, связывающей те же перемещения $\bar{\zeta}$ с сосредоточенными деформациями изгиба согласно $\bar{\kappa} = [H] \bar{\zeta}$ [6]. Для этого на первом этапе достаточно перейти к узловым перемещениям \bar{Z} , заданным в локальных системах, воспользовавшись преобразованием поворота $[\varphi]$ (рисунок 1,в). А затем с помощью расширенной матрицы инцидентности $[\tilde{S}]$, составленной на основе графа модели рамы (рисунок 1,г), определить вектор удлинений и перекосов элементов $\bar{\gamma}$. На втором этапе, избавившись в матрице $[G]$ от строк, относящихся к продольным деформациям элементов, осуществляется коррекция полученной матрицы, обусловленная учётом граничных условий и непрерывности левого ригеля. Умножив скорректированную матрицу на транспонированную матрицу инцидентности $[S]^T$, находят геометрическую матрицу, в которой, однако, ещё присутствуют столбцы, ответственные за продольные деформации. Удалив их, формируют геометрическую матрицу $[H]$ в окончательном виде.

Перемещения узлов стержневой системы \bar{Y} , вызванные действием внешних нагрузок, находятся по формуле [5]

$$\bar{Y} = [\Delta] \bar{P}, \quad (2)$$

где $[\Delta]$ – матрица (внешней) податливости, которая может быть выражена через геометрическую матрицу

$$[\Delta] = \left([H]^T [r] [H] \right)^{-1}, \quad (3)$$

Изгибающие моменты \bar{M} в расчётных сечениях или узлах также определяются с помощью матрицы $[H]$.

$$\bar{M} = [r][H][\Delta]\bar{P}, \quad (4)$$

где $[r]$ – квазидиагональная матрица внутренней жёсткости

$$[r] = \begin{bmatrix} \beta_1[r_1] & & & \\ & \beta_2[r_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_i[r_i] \end{bmatrix},$$

состоящая из ячеек жёсткости элементов двух типов:

– для элементов, на одном торце которых имеется шарнир:

$$[r_i] = [3] \frac{E_i I_i}{l},$$

– при отсутствии шарниров на концах отрезка:

$$[r_i] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{E_i I_i}{l};$$

β_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) – коэффициенты приведения жёсткостей элементов; l – длина элемента (в общем случае длины элементов могут быть различными); $\bar{P} = (\xi_1 p, \xi_2 p, M)$ – вектор внешних воздействий, приложенных в узлах; p – параметр уровня нагрузки, ξ_1, ξ_2 – множители, характеризующие соотношение сил, M – величина узлового момента. Из определений (2)–(4) следует, что геометрическая матрица $[H]$ является ключом к описанию напряжённо-деформированного состояния стержневой системы в полном объёме. При расчёте любых стержневых систем, в том числе и статически неопределимых систем, целесообразно пользоваться приведенными выше формулами, поскольку на их основе можно вообще избежать применения классических методов строительной механики в расчётах не только по прочности и жёсткости, но на устойчивость.

В структуре матрицы предельного равновесия $[U]$ в первых её строках обычно размещают условия текучести в пластических шарнирах, в нижних – условия равновесия стержневой системы. При этом условия текучести,

например, сжато-изогнутого стержня прямоугольного сечения в виде параболической функции

$$g_j = \pm m_j + n_j^2 - 1 \leq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, 9), \quad (5)$$

где $m_j = M_j / M_{jT}$ и $n_j = N_j / N_{jT}$ – безразмерные величины изгибающих моментов M_j и продольных сил N_j в произвольном j -ом сечении, M_{jT} , N_{jT} – их предельные величины, соответственно (см. кривую «а» на рисунке 2), как правило, для упрощения решения сначала линейризуются [2]:

$$\begin{aligned} \pm m_j \pm \frac{1}{2} n_j &\leq 1, \\ \pm \frac{2}{3} m_j + n_j &\leq 1, \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, 9),$$

что соответствует вписанному восьмиугольнику текучести (см. контур «б» на рисунке 2), а для квадрата «в»¹

$$|m_j| + |n_j| \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, 9). \quad (6)$$

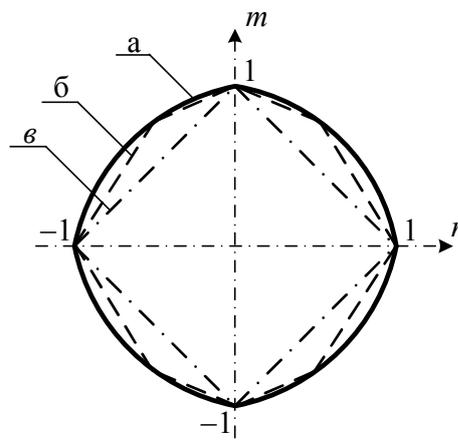


Рисунок 2 – Условие текучести стержня

Если при определении предельной нагрузки стержневой системы пренебрегают влиянием продольных сил, то в последних неравенствах опускают второе слагаемое. В итоге условия текучести упрощаются и принимают вид

¹ Методика расчёта несущей способности арок на основе условий текучести (5), (6) в аналитическом виде изложена в статье [5].

$$|m_j| \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, 9). \quad (6)$$

Позже они приводятся к равенствам

$$m_j + x_{j+k} = 2 \quad (j = 1, 2, \dots, 7; k = 9), \quad (*)$$

путём введения дополнительных (положительных) неизвестных x_j ($j = 8, 9, \dots, 18$). Последнее обстоятельство объясняется требованиями многих стандартных программ линейного программирования, с помощью которых, в частности, отыскивается оптимальный план. В рассматриваемой задаче таковым является распределение изгибающих моментов в раме, соответствующее, согласно статической теореме предельного равновесия, возникновению необходимого числа шарниров пластичности (здесь, семи) при наибольшем значении параметра нагрузки p [3].

Условия равновесия, занимающие нижние строки матрицы предельного состояния $[U]$, без труда выводятся на основе принципа двойственности путём транспонирования геометрической матрицы $[H]$. Для двухпролётной рамы, показанной на рисунке 1, а матрица равновесия имеет вид

$$[V]_{(3 \times 9)} = \begin{bmatrix} 1/l & -1/l & 0 & 0 & 0 & -1/l & -1/l & 1/l & 1/l \\ 0 & 1/l & -2/l & 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Её элементы подлежат пересылке на те места в матрице $[U]$, что соответствуют нумерации основных неизвестных задачи ТРП – моментов $m_j = y_j$ ($j = 1, 2, \dots, 9$). Кстати, и неизвестные x_j ($j = 8, 9, \dots, 18$) далее обозначены как и моменты, через y_j ($j = 8, 9, \dots, 18$). Если при численной реализации излагаемой методики ограничиться симметричной схемой рамы (рисунок 3), то в результате указанных операций матрицу состояния можно представить в форме таблицы (таблица 1).

Таблица 1

№№ уравнения	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	M_T = \bar{Q}
1	1							1								2
2		1							1							4
3			1							1						4
4				1							1					4
5					1							1				2
6						1							1			2
7							1							1		2
8	0,25				0,25	-0,25	-0,25									-2
9	-0,5	1	-0,5													-6
10				1	-1	1										0
min																-1

Первые семь строк матрицы $[U]$, очевидно, относятся к условиям пластичности рамы. Нижележащие строки таблицы (с восьмой по десятую) взяты из матрицы равновесия, сформированной ранее для рассматриваемой рамы. Последняя строка таблицы обозначает целевую функцию. Значения «-2», «-6» и «0» в предпоследнем столбце являются правыми частями условий равновесия ригеля в целом, левой его части и среднего узла рамы, соответственно. Последняя строка матрицы содержит единственный коэффициент «-1», относящийся к параметру нагрузки p .

В результате вычисления параметра p по программе ЛП находят максимальное значение, равное $p_T = 0,44$ при $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 4$, $l = 6\text{м}$

Соответствующий механизм разрушения представлен на рисунке 3.

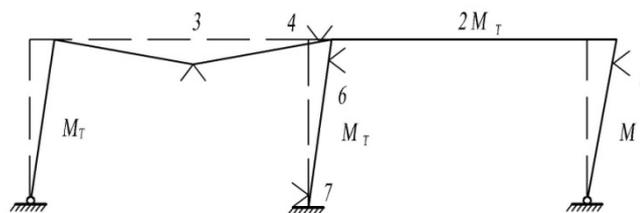


Рисунок 3 – Механизм разрушения рамы

Библиографический список:

1. Резников Р.А. Решение задач строительной механики на ЭЦМ. М.: Стройиздат, 1971. 310 с.
2. Белов М.В., Раевский А.Н. Идея метода предельного равновесия в конечно-элементной постановке задачи с использованием линейного программирования // Строительная механика и расчет сооружений. 2005. №1. С. 61-65.
3. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
4. Ржаницын А.Ф. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982. 400 с.
5. Ржаницын А.Ф. Расчёт стержневых систем с применением принципа двойственности // Исследования по теории сооружений. 1980. Вып. XXIV. – С. 10-23.
6. Монахов В.А., Себекина В.И. Несущая способность пологих арок // Строительная механика и расчет сооружений. 1976. № 5. С. 33-35.