УДК 539.371

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ ОТКАЗЕ ОТ ГИПОТЕЗЫ Я. БЕРНУЛЛИ

Бакушев Сергей Васильевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Быкова Екатерина Александровна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

студент.

Аннотация

Рассматривается осевое растяжение тонкого стержня от действия сосредоточенных сил, приложенных в первом случае в центрах тяжести торцевых сечений и во втором случае по краям торцевых поперечных сечений. Полагая, что гипотеза плоских сечений не соблюдается, определяются нормальные напряжения, действующие на площадках, совпадающих с нормальными сечениями, а также перемещения отдельных продольных волокон стержня. Закон распределения нормальных напряжений по поперечным сечениям стержня принимается квадратичным.

Ключевые слова: стержень, осевое растяжение, упругость, нормальное напряжение, перемещение.

MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF THE ROD UPON CANCELLATION OF THE HYPOTHESES I BERNOULLI.

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Bykova Ekaterina Alexandrovna,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Student.

Abstract.

Considered axial stretching thin stalk from the concentrated force exerted in the first case, the centers of gravity of end sections and in the second case, on the edges of the face of the cross sections. Assuming that the hypothesis of flat sections is not respected, defined by a normal voltage, operating on platforms, coinciding with the normal sections, as well as the movement of individual longitudinal fibers. Normal stress distribution law of cross sections of the rod was adopted the quadratic.
Keywords: rod, axial stretching, elasticity, normal pressure, moving.

Введение. В соответствии с гипотезой Я.Бернулли при растяжении или сжатии прямолинейного стержня его поперечные сечения, нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси стержня и после деформации, и, следовательно, нормальные напряжения σ_z, действующие по площадкам, совпадающим с поперечными сечениями стержня, распределяются по ширине сечения равномерно [1]. Величина нормальных напряжений при этом вычисляется по известной формуле

$$\sigma_z = \frac{N}{A}. \qquad (1)$$

Здесь $N -$ продольная сила, действующая в стержне; $A = bh$ $-$ площадь поперечного сечения.

Внешние нагрузки, действующие по концам стержня вдоль его продольной оси, строго говоря, тоже должны быть распределены по площади поперечного сечения торца стержня равномерно. На самом деле это условие практически никогда не выполняется. Внешние нагрузки, растягивающие или сжимающие стержень, могут быть, вообще говоря, распределены по торцам стержня самым произвольным образом, в том числе быть сосредоточенными, но при этом их равнодействующие должны быть направлены по оси стержня

(для соблюдения условия осевого растяжения или сжатия). Вполне понятно, что при этом закон Бернулли у торцов стержня нарушается и нормальные напряжения распределяются по поперечному сечению стержня неравномерно. В соответствии с принципом Сен-Венана, на достаточном удалении от торцов стержня, где приложены внешние нагрузки, распределение напряжений не зависит от того, как конкретно приложены эти внешние нагрузки и, следовательно, принимается равномерным. При этом величина «достаточного удаления» никак не оговаривается и может быть определена, вообще говоря, лишь на основе экспериментов. Характер распределения нормальных напряжений σ_z у торцов стержня также остаётся неопределённым.

В данной работе сделана попытка оценить характер распределения нормальных напряжений σ_z в стержне при отказе от гипотезы Я.Бернулли.

Случай 1. Рассмотрим стержень длиной l, находящийся в условиях осевого растяжения (рисунок 1). Поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник размерами $b \times h$, причём $b \ll h$, то есть рассматривается плоский стержень, в котором нормальные напряжения в направлении оси Y не изменяются. Стержень нагружен сосредоточенными силами F, приложенными в центрах тяжести поперечных сечений по его концам.

Предположим, что нормальное напряжение σ_z распределено по произвольному поперечному сечению стержня $z = z_i$ для $\left|\frac{l}{2}\right| \leq z < 0$ по некоторому закону, например, по закону квадратной параболы:

$$\sigma_z(x, z_i) = a'x^2 + b'x + c' \tag{2}$$

Здесь коэффициенты a', b' и c' подлежат определению.

Для $z = 0$ имеем равномерное распределение нормальных напряжений:

$$\sigma_z(x, 0) = \frac{N}{A} = Const. \tag{3}$$

По длине стержня нормальное напряжение σ_z изменяется вдоль произвольного волокна $x = x_i$ по линейному закону симметрично относительно оси стержня (рисунок 2):

$$\sigma_z(x_i, z) = kz + p. \tag{4}$$

Здесь коэффициенты k и p подлежат определению.

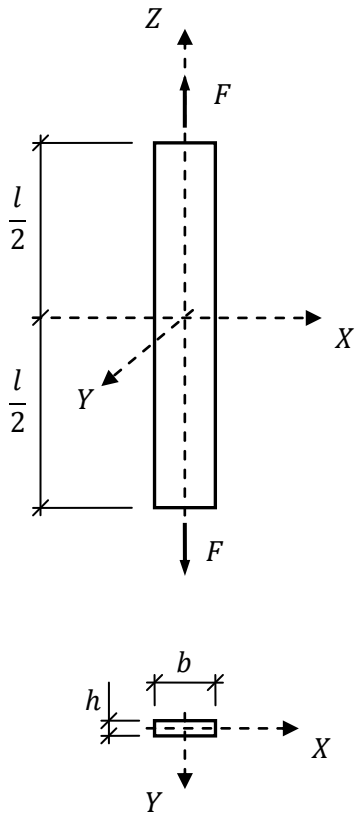

Рисунок 1

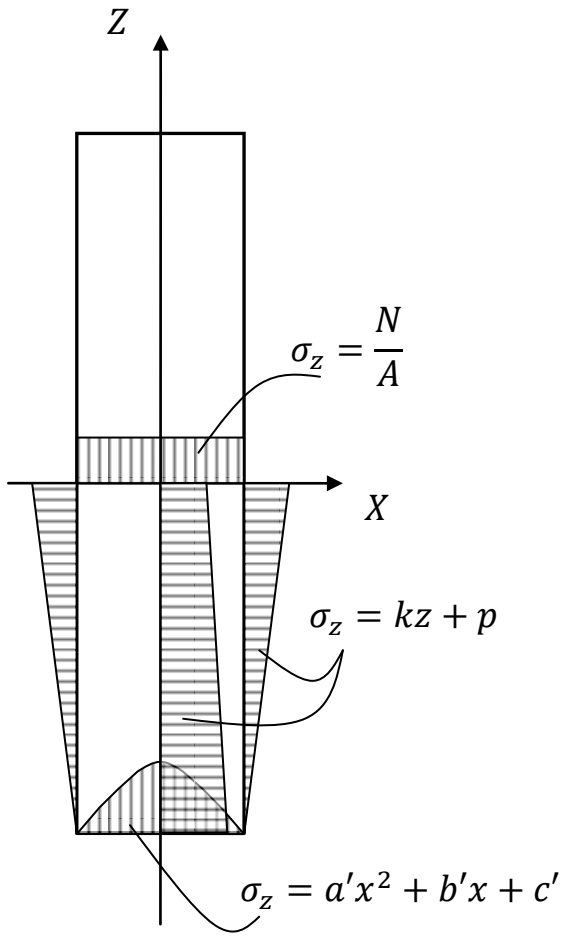

Рисунок 2

Коэффициенты a', b' и c' найдём из условий:

1. При $z = \pm\frac{l}{2}$ и $x = 0$ имеем $\sigma_z\left(0, \pm\frac{l}{2}\right) = \sigma_{zo}$.
2. При $z = \pm\frac{l}{2}$ и $x = \pm\frac{b}{2}$ имеем $\sigma_z\left(\pm\frac{b}{2}, \pm\frac{l}{2}\right) = 0$.

Применяя данные условия к уравнению (2), получим:

$$c' = \sigma_{zo};$$

$$a'\frac{b^2}{4} + b'\frac{b}{2} + c' = 0;$$

$$a'\frac{b^2}{4} - b'\frac{b}{2} + c' = 0.$$

Отсюда $b' = 0$ и $a' = -4\frac{\sigma_{zo}}{b^2}$.

При этом уравнение (2) преобразуется к виду:

$$\sigma_z(x, z_i) = \sigma_{zo}\left(1 - \frac{4}{b^2}x^2\right). \qquad (5)$$

Напряжение σ_{zo} можно найти, вычислив величину продольной силы, действующей в торцевом поперечном сечении стержня:

$$N = \int_A \sigma_z\left(x, \pm\frac{l}{2}\right) dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_z\left(x, \pm\frac{l}{2}\right) h dx =$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_{zo}\left(1 - \frac{4}{b^2}x^2\right) h dx = \frac{2}{3}\sigma_{zo} bh.$$

Отсюда $\sigma_{zo} = \frac{3N}{2A}$.

Итак, распределение нормальных напряжений вдоль торцевой поверхности стержня описывается квадратной параболой:

$$\sigma_z\left(x, \pm\frac{l}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4}{b^2}x^2\right)\frac{N}{A}. \qquad (6)$$

Коэффициенты k и p, входящие в формулу (4), найдём из условий:

1. При $z = 0$ имеем $\sigma_z(x_i, 0) = \frac{N}{A}$, то есть $p = \frac{N}{A}$. (7)
2. При $z = \pm\frac{l}{2}$ имеем $\pm k\frac{l}{2} + \frac{N}{A} = \frac{3N}{2bh}\left(1 - \frac{4}{b^2}x^2\right)$. Отсюда

$$\pm k = \frac{3N}{lbh}\left(1 - \frac{4}{b^2}x^2\right) - \frac{2N}{lbh}. \qquad (8)$$

Теперь, принимая во внимание (7) и (8), формула (4) получает вид:

$$\sigma_z(x, z) = \left[\mp\frac{3}{l}\left(1 - \frac{4}{b^2}x^2\right)z \pm \frac{2}{l}z + 1\right]\frac{N}{A}. \qquad (9)$$

Соотношение (9) позволяет вычислить нормальное напряжение на площадках, нормаль к которым параллельна продольной оси стержня, в любой точке стержня, заданной координатами z и x.

В формуле (9) знак «–» в первом и знак «+» во втором слагаемом соответствуют положительной полуоси Z; знак «+» в первом и знак «–» во втором слагаемом соответствуют отрицательной полуоси Z.

На рисунке 3 представлены графики нормальных напряжений σ_z, построенные в вертикальных сечениях стержня, определённых координатами $x_0 = 0$ м; $x_1 = \frac{b}{8}$; $x_2 = \frac{b}{4}$; $x_3 = \frac{3b}{8}$; $x_4 = \frac{b}{2}$. На рисунке 4 представлены графики нормальных напряжений σ_z, построенные в горизонтальных сечениях стержня,

определённых координатами $z_0 = 0$ м; $z_1 = \frac{l}{8}$; $z_2 = \frac{l}{4}$; $z_3 = \frac{3l}{8}$; $z_4 = \frac{l}{2}$. Исходные данные для построения графиков: $N = 2000$ Н; $l = 2$ м; $b = 0{,}1$ м; $h = 0{,}01$ м.

Найдём опасную точку стержня, то есть точку, в которой нормальное напряжение $\sigma_z(z, x) = \sigma_z^{max}$.

Судя по рисункам 3 и 4, опасной будет точка с координатами $z = \pm\frac{l}{2}$ и $x = 0$. Подтвердим это утверждение аналитическими расчётами. Найдём экстремум функции (9):

$$\frac{\partial\sigma_z(z,x)}{\partial z} = \mp\frac{3N}{blh}\left(1 - \frac{4}{b^2}x^2\right) \pm \frac{2N}{lbh} = 0; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial\sigma_z(z,x)}{\partial x} = \pm\frac{6N}{b^3lh}zx = 0. \qquad (11)$$

Из уравнения (10) получаем:

$$x = \pm\frac{b}{2\sqrt{3}}. \qquad (12)$$

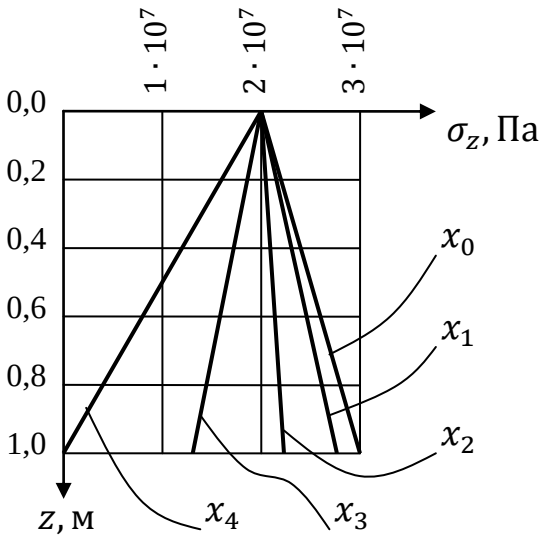

Рисунок 3

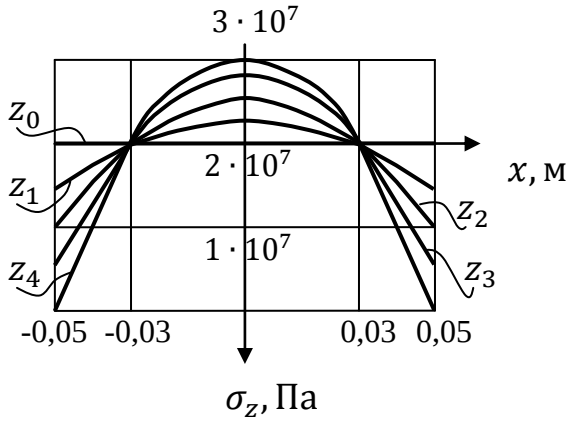

Рисунок 4

Из уравнения (11) получаем два решения:

– либо $x = 0$ и z – любое;

– либо $z = 0$ и x – любое.

С учётом соотношения (12), видим, что экстремальное нормальное напряжение $\sigma_z = \frac{N}{bh}$ возникает в точке с координатами $x = \pm\frac{b}{2\sqrt{3}}$ и $z = 0$.

Поскольку условия $\frac{d\sigma_z}{dz} = 0$ и $\frac{d\sigma_z}{dx} = 0$ дают нам точку перегиба поверхности $\sigma_z(z, y)$, то для окончательного нахождения опасной точки стержня, проанализируем экстремум функции $\sigma_z(z, x)$ на границах рассматриваемой области.

1) При $z = 0$ и $-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}$ максимальное напряжение можно найти по формуле

$$\sigma_z^{max} = \frac{N}{A}. \tag{13}$$

2) При $z = \pm\frac{l}{2}$ и $-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}$ максимальное напряжение можно найти по формуле

$$\sigma_z^{max} = 1{,}5\frac{N}{A}. \tag{14}$$

3) При $0 \leq z \leq \frac{l}{2}$ и $x = \mp\frac{b}{2}$ максимальное напряжение можно найти по формуле

$$\sigma_z^{max} = \frac{N}{A}. \tag{15}$$

Анализируя результаты (13), (14) и (15), получаем, что опасной будет является точка с кординатами $z = \pm\frac{l}{2}$, $x = 0$, так как в ней возникает максимальное напряжение в стержне

$$\sigma_z^{max} = \frac{3N}{2A}. \tag{16}$$

Полагая, что каждое продольное волокно в стержне находится в условиях простого растяжения (или сжатия) $\sigma_z = E\varepsilon_z$, найдем перемещения отдельных продольных волокон стержня:

$$u(x_i, z) = \int_0^z \varepsilon_z(x_i, z)\, dz + c. \tag{17}$$

В силу симметрии, при z = 0, имеем $u = 0$, то есть постоянная интегрирования $c = 0$. Тогда

$$u(x_i, z) = \int_0^z \frac{\sigma_z(x_i, z)}{E} dz = \frac{1}{E}\int_0^z \sigma_z(x_i, z)\, dz=$$

$$= \frac{1}{E}\frac{3N}{lbh}\left(1 - \frac{4}{b^2}x^2\right)\int_0^z zdz - \frac{1}{E}\frac{2N}{lbh}\int_0^z zdz + \frac{1}{E}\frac{N}{bh}\int_0^z dz = \tag{18}$$

$$= \left[\frac{3}{2l}\left(1 - \frac{4}{b^2}x^2\right)z - \frac{z}{l} + 1\right]z\frac{N}{EA}.$$

На рисунке 5 представлены графики перемещений продольных волокон в стержне, определённых координатами $x_0 = 0$ м; $x_1 = \frac{b}{8}$; $x_2 = \frac{b}{4}$; $x_3 = \frac{3b}{8}$; $x_4 = \frac{b}{2}$. На рисунке 6 представлены графики перемещений в продольных волокнах в горизонтальных сечениях, определённых координатами $z_0 = 0$ м; $z_1 = \frac{l}{8}$; $z_2 = \frac{l}{4}$; $z_3 = \frac{3l}{8}$; $z_4 = \frac{l}{2}$.

Исходные данные для построения графиков: $N = 2000$ Н ; $l = 2$ м ; $b = 0{,}1$ м; $h = 0{,}01$ м.

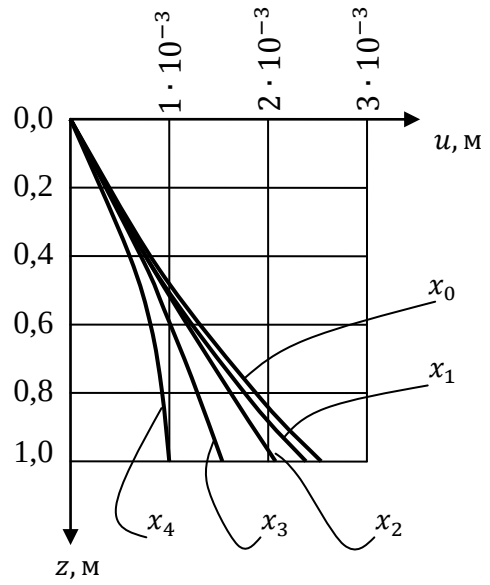

Рисунок 5

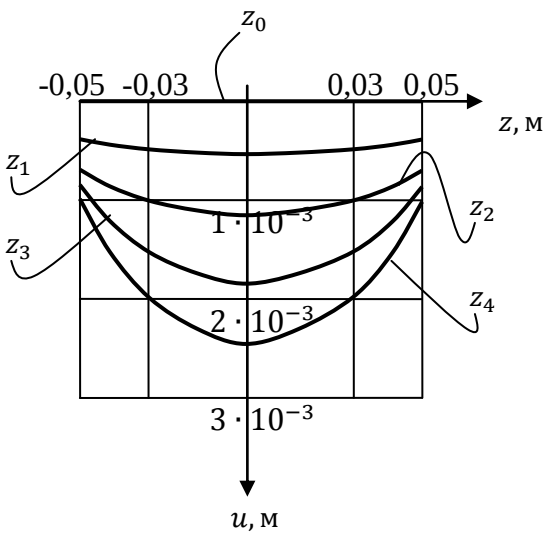

Рисунок 6

Случай 2. Рассмотрим стержень на который действуют сосредоточенные силы $\frac{F}{2}$, приложенные по краям торцевого поперечного сечения (рисунок 7), то есть в точках с координатами $z = \pm\frac{l}{2}$ и $x = \pm\frac{b}{2}$.

Так же, как и в случае приложения сосредоточенной силы в центре тяжести поперечного сечения, предположим, что нормальное напряжение σ_z

распределено по произвольному поперечному сечению стержня $z = z_i$ для $\left|\frac{l}{2}\right| \leq z < 0$ по закону квадратной параболы (2).

Для $z = 0$ имеем равномерное распределение нормальных напряжений по закону (3).

По длине стержня нормальное напряжение σ_z изменяется вдоль произвольного волокна $x = x_i$ по линейному закону (4) симметрично относительно оси стержня (рисунок 8).

Коэффициенты a', b'и c' найдём из условий:

1. При $z = \pm\frac{l}{2}$ и $x = 0$ имеем $\sigma_z\left(0, \pm\frac{l}{2}\right) = 0$.
2. При $z = \pm\frac{l}{2}$ и $x = \pm\frac{b}{2}$ имеем $\sigma_z\left(\pm\frac{b}{2}, \pm\frac{l}{2}\right) = \sigma_{zo}$.

Применяя данные условия к уравнению (2), получим:

$$c' = \sigma_{zo};$$

$$a'\frac{b^2}{4} + b'\frac{b}{2} + c' = \sigma_{zo};$$

$$a'\frac{b^2}{4} - b'\frac{b}{2} + c' = \sigma_{zo}.$$

Отсюда $b' = 0$ и $a' = 4\frac{\sigma_{zo}}{b^2}$.

При этом уравнение (2) получает вид:

$$\sigma_z(x, z_i) = \frac{4}{b^2}\sigma_{zo}x^2. \tag{19}$$

Напряжение σ_{zo} можно найти, вычислив величину продольной силы, действующей в торцевом поперечном сечении стержня:

$$N = \int_A \sigma_z\left(x, \pm\frac{l}{2}\right)dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_z\left(x, \pm\frac{l}{2}\right)hdx = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{4\sigma_{zo}}{b^2}x^2hdx = \frac{1}{3}\sigma_{zo}bh.$$

Отсюда $\sigma_{zo} = \frac{3N}{A}$.

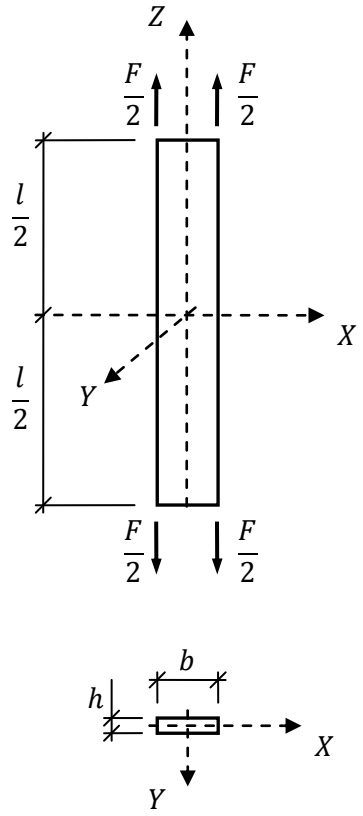

Рисунок 7

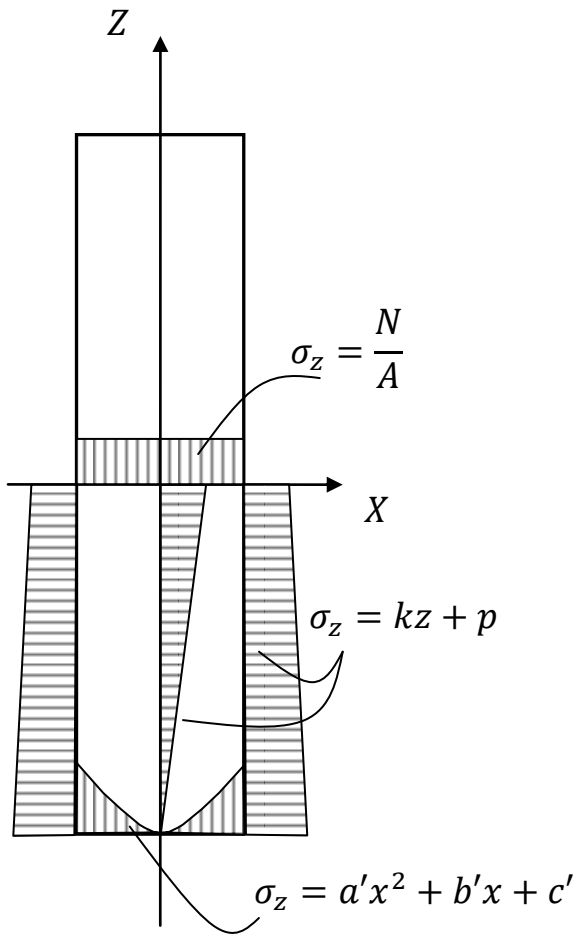

Рисунок 8

Итак, распределение нормальных напряжений вдоль торцевой поверхности стержня описывается квадратной параболой:

$$\sigma_z\left(x, \pm\frac{l}{2}\right) = \frac{12N}{Ab^2}x^2. \tag{20}$$

Коэффициенты k и p, входящие в формулу (4), найдём из условий:

1. При $z = 0$ имеем $\sigma_z(x_i, 0) = \frac{N}{A}$, то есть $p = \frac{N}{A}$.
2. При $z = \pm\frac{l}{2}$ имеем $\pm k\frac{l}{2} + \frac{N}{A} = \frac{12N}{Ab^2}x^2$. Отсюда

$$\pm k = \frac{24N}{Alb^2}x^2 - \frac{2N}{lA}. \tag{21}$$

Принимая во внимание (20) и (21), формула (4) получает вид:

$$\sigma_z(x, z) = \left(\mp\frac{24}{b^2 l}x^2 z \pm \frac{2}{l}z + 1\right)\frac{N}{A}. \tag{22}$$

Формула (22) позволяет вычислить нормальное напряжение на площадках, нормаль к которым параллельна продольной оси стержня, в любой точке стержня, заданной координатами z и x.

В формуле (22) знак «–» в первом и знак «+» во втором слагаемом соответствуют положительной полуоси Z; знак «+» в первом и знак «–» во втором слагаемом соответствуют отрицательной полуоси Z.

На рисунке 9 представлены графики нормальных напряжений σ_z, построенные в вертикальных сечениях стержня, определённых координатами $x_0 = 0$ м; $x_1 = \frac{b}{8}$; $x_2 = \frac{b}{4}$; $x_3 = \frac{3b}{8}$; $x_4 = \frac{b}{2}$. На рисунке 10 представлены графики нормальных напряжений σ_z, построенные в горизонтальных сечениях стержня, определённых координатами:

$$z_0 = 0 \text{ м};\ z_1 = \frac{l}{8};\ z_2 = \frac{l}{4};\ z_3 = \frac{3l}{8};\ z_4 = \frac{l}{2}.$$

Исходные данные для построения графиков: $N = 2000$ Н ; $l = 2$ м ; $b = 0{,}1$ м; $h = 0{,}01$ м.

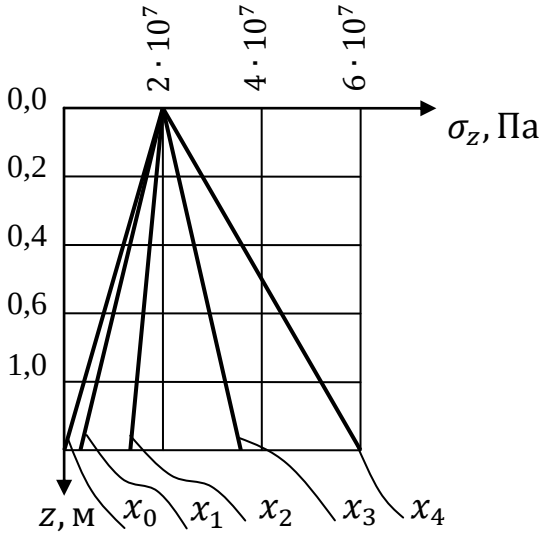

Рисунок 9

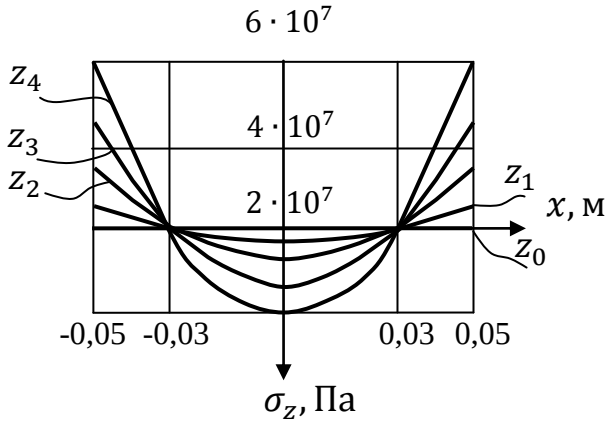

Рисунок 10

Найдём опасную точку стержня, то есть точку, в которой нормальное напряжение $\sigma_z(z, x) = \sigma_z^{max}$.

Судя по рисункам 9 и 10, опасной будет точка с координатами $z = \pm\frac{l}{2}$ и $x = \pm 0{,}05$. Подтвердим это утверждение аналитическими расчётами. Найдём экстремум функции (22):

$$\frac{\partial\sigma_z(z,x)}{\partial z} = \mp\frac{24N}{b^3hl}x^2 \pm \frac{2N}{lbh} = 0; \tag{23}$$

$$\frac{\partial\sigma_z(z,x)}{\partial x} = \mp\frac{12N}{b^3hl}xz = 0. \tag{24}$$

Из уравнения (23) получаем:

$$x = \pm\frac{b}{2\sqrt{3}}. \tag{25}$$

Из уравнения (25) получаем два решения:

– либо $x = 0$ и $z -$ любое;

– либо $z = 0$ и $x -$ любое.

Из соотношения (25) следует, что экстремальное нормальное напряжение $\sigma_z = \frac{N}{bh}$ возникает в точке с координатами $x = \pm\frac{b}{2\sqrt{3}}$ и $z = 0$.

Поскольку условия $\frac{d\sigma_z}{dz} = 0$ и $\frac{d\sigma_z}{dx} = 0$ определяют точку перегиба поверхности $\sigma_z(z,y)$, то для окончательного нахождения опасной точки стержня, проанализируем экстремум функции $\sigma_z(z,x)$ на границах рассматриваемой области.

1) При $z = 0$ и $-\frac{b}{2} \le x \le \frac{b}{2}$ максимальное напряжение можно найти по формуле

$$\sigma_z^{max} = \frac{N}{A}. \tag{26}$$

2) При $z = \pm\frac{l}{2}$ и $-\frac{b}{2} \le x \le \frac{b}{2}$ максимальное напряжение можно найти по формуле

$$\sigma_z^{max} = 3\frac{N}{A}. \tag{27}$$

3) При $0 \le z \le \frac{l}{2}$ и $x = \mp\frac{b}{2}$ максимальное напряжение можно найти по формуле

$$\sigma_z^{max} = \frac{N}{A}. \tag{28}$$

Анализируя результаты (26), (27) и (28), получаем, что опасной будет является точка с кординатами $z = \pm\frac{l}{2}$, $x = \pm\frac{b}{2}$, так как в ней возникает максимальное напряжение в стержне

$$\sigma_z^{max} = \frac{3N}{A}. \tag{29}$$

Полагая, что каждое продольное волокно в стержне находится в условиях простого растяжения (или сжатия) $\sigma_z = E\varepsilon_z$, найдем перемещения отдельных продольных волокон стержня:

$$u(x_i, z) = \int_0^z \varepsilon_z(x_i, z)\, dz + c. \tag{30}$$

В силу симметрии, при z = 0, имеем $u = 0$, то есть постоянная интегрирования $c = 0$. Тогда

$$\begin{gathered} u(x_i, z) = \int_0^z \frac{\sigma_z}{E} dz = \frac{1}{E}\int_0^z \sigma_z\, dz = \\ = \frac{1}{E}\frac{24N}{Ab^2}x^2 \int_0^z dz - \frac{1}{E}\frac{2N}{lA}\int_0^z dz + \frac{1}{E}\frac{N}{A}\int_0^z dz = \\ = \left(\frac{12}{b^2 l}x^2 z - \frac{z}{l} + 1\right) z\frac{N}{EA}. \end{gathered} \tag{31}$$

На рисунке 11 представлены графики перемещений продольных волокон в стержне, определённых координатами: $x_0 = 0$ м; $x_1 = \frac{b}{8}$; $x_2 = \frac{b}{4}$; $x_3 = \frac{3b}{8}$; $x_4 = \frac{b}{2}$. На рисунке 12 представлены графики перемещений в продольных волокнах в горизонтальных сечениях, определённых координатами: $z_0 = 0$ м; $z_1 = \frac{l}{8}$; $z_2 = \frac{l}{4}$; $z_3 = \frac{3l}{8}$; $z_4 = \frac{l}{2}$.

Исходные данные для построения графиков: $N = 2000$ Н ; $l = 2$ м ; $b = 0{,}1$ м; $h = 0{,}01$ м.

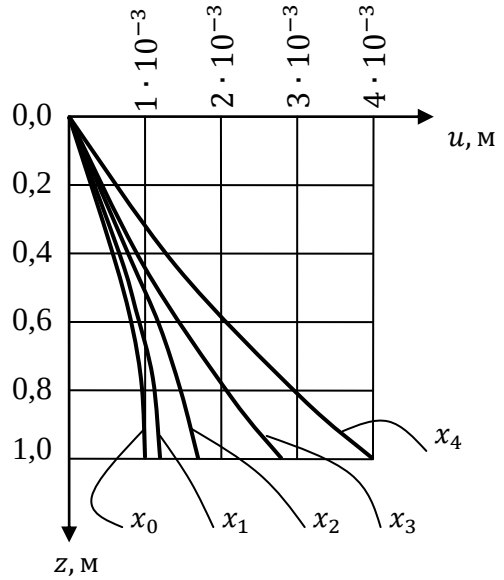

Рисунок 11

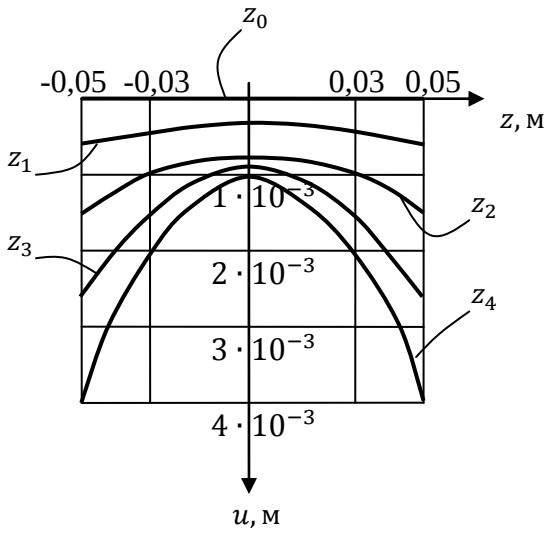

Рисунок 12

Выводы.

1. В обоих рассмотренных случаях и нормальное напряжение, действующее на площадках, совпадающих с поперечными сечениями стержня, и продольные перемещения волокон стержня является квадратичными функциями и поперечной, и продольной координаты. При этом расчётные соотношения оказываются разными.

2. Максимальное нормальное напряжение возникает в торцевых сечениях стержня под силой, причём во втором случае оно в два раза выше, чем в первом.

3. Таким образом, при отказе от гипотезы плоских сечений и напряжённое, и деформированное состояние в стержне существенно зависят от характера распределения внешних усилий по торцу стержня.

Библиографический список:

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. Изд. 3-е. М.: Высшая шк., 2003. 560 с.