УДК 517.9

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Гаврилов Павел Игоревич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

студент.

Киселев Артем Анатольевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

аспирант.

Снежкина Ольга Викторовна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Начертательная геометрия и графика».

Аннотация

Рассматриваются приложения дифференциальных уравнений к инженерным задачамна примере теории висячего моста при изучении дисциплины «Математика»с целью формирования профессиональных компетенций у обучающихся в высших учебных заведениях по направлению «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, инженерные приложения, теория висячего моста, формирование производственных компетенций.

APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS TO THE SOLUTION OF ENGINEERING PROBLEMS

Gavrilov Pavel Igorevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Student.
Kiselev Artem Anatolyevich,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Post-graduate student.
Snezhkina Olga Viktorovna,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Descriptive geometry and graphics".

Abstract

Discuss the applications of differential equations to engineering tasks by the example of suspension bridge theory in the study of discipline "Mathematics" with the purpose of formation of professional competence of students in higher educational institutions in the field of "Construction of unique buildings and structures".
Keywords: differential equations, engineering applications, and theory suspension bridge, the formation of production skills.

Для интегрирования курса математики в общий учебный процесс высшей школы и для более успешного формирования производственных компетенций у студентов рекомендуется внедрять большее количество инженерных задач во время практических занятий. В качестве примера рассмотрим приложения дифференциальных уравнений к решению вопросов механики.

Известно, что так называемая теория изгиба висячего моста рассматривает мостовое сооружение как сочетание цепи (подвесной трос) и балки (мостовая ферма) (рисунок 1).

Рисунок 1 – Висячий мост Акаси-Кайкё (Япония)

Особенность сечения висячего моста заключается в разных прогибах балки и цепи (рисунок 2, согласно Т. Карман и М.Био). Тем не менее, если принять, как это обычно делаетсяв теории висячих мостов, что собственный вес цепи, вес подвесок и вес балки передаются полностью на цепьи тем самым разгружается балка, то дополнительные прогибы балки, вызванные лишь полезной нагрузкой моста, незначительны по величине и могут быть определены с помощью линейных уравнений.

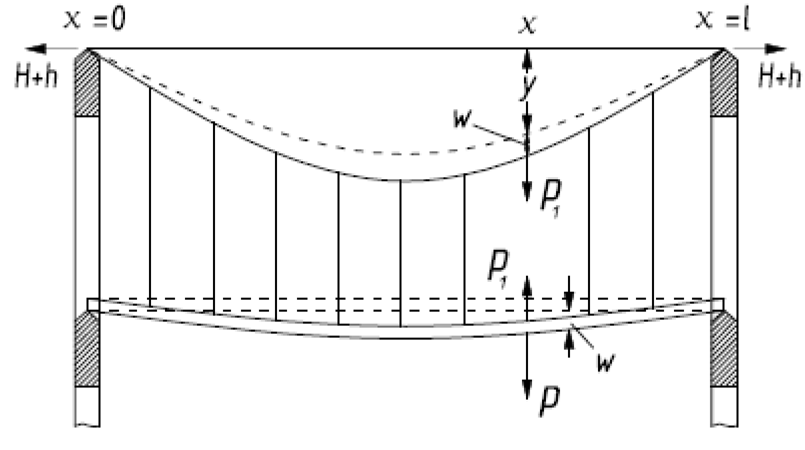

Рисунок 2 – Изгиб балки и цепи висячего моста

Введём следующие обозначения:

1. Нагрузка системы на единицу длины (постоянная нагрузка), вызванная весом самого моста, пусть будет *q;* полезную нагрузку на балку обозначим через *p.*

2. Горизонтальное натяжение цепи, вызванное только весом самого моста, обозначим через H, добавочное натяжение, обусловленноеполезной нагрузкой,– через h. Форма цепи, соответствующая начальным условиям нагрузки, пусть задана уравнением y=y(x), где ось *y,* перпендикулярная к горизонтальной прямой, направлена вниз. Добавочное отклонение цепи пусть будет w(x). Предположим, что упругой деформацией подвесок можно пренебречь, и что вертикальный прогиб балки в токе x равен вертикальному отклонению цепи в той же точке. Это предполагает жёсткую связь между цепью и балкой и пренебрежение горизонтальным растяжением цепи.

3. Момент инерции поперечного сечения балки полагаем постоянным и равным I. Модуль Юнга обозначаем через E. Рассмотрим цепь, протянутую между точками x=0 и x=l, и балку, закреплённую в точках x=0 и x=l.

Дифференциальное уравнение для определения формы каната при первоначальной нагрузке имеет вид

$$H\frac{d^2y}{dx^2} \tag{1}$$

Если прибавить полезную нагрузку*p,* то какую-то часть этой полезной нагрузки p_1 несёт цепь, а остальная, часть p-p_1 приходится на балку. Горизонтальная составляющая натяжения цепи возрастает до H+h, и к ординате y прибавляется отклонение w. При этих условиях получим уравнение

$$(H+h)\frac{d^4w}{dx^4}(y+w)=-q-p_1 \tag{2}$$

С другой стороны, дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=p-\ p_1 \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) содержат три неизвестные величины – две функции $w(x)$ и $p_1(x)$ и параметр h. Поэтому необходимо найти ещё одно соотношение для определения параметра h. Его можно получить из следующих соображений:

если функция $w(x)$ известна, то изменение длины определится добавочным натяжением h и упругостью цепи. Мы можем вычислить изменение длины обоими способами и, сравнивая полученные результаты, найти искомое соотношение для определения h.

Допустим сначала, что h известно. Тогда, подставляя из уравнения (2) значение p_1 в уравнение (3), получим:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} - (H+h)\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2w}{dx^2}\right) = p + q \tag{4}$$

Принимая во внимание уравнение (1), можно привести (4) к виду

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} - (H+h)\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) = p + h\frac{d^2y}{dx^2}$$

или, подставляя снова $\frac{q}{H}$ вместо -$\frac{d^2y}{dx^2}$,

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} - (H+h)\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) = p_1 - q\frac{h}{H} \tag{5}$$

Это основное уравнение теории висячих мостов. Сопоставляя его с уравнением (3), мы видим, что та часть полезной нагрузки, которая падает на цепь, равна

$$p_1 = q\frac{h}{H} - (H+h)\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \tag{6}$$

Значение первого члена правой части этого равенства легко выяснить: балка освобождена от некоторой части постоянной нагрузки q; это уменьшение нагрузки, выраженное в процентах, равно относительному увеличению натяжения цепи.

Второй член также предполагает физическое истолкование. Допустим, что сила $X = H + h$ действует вдоль осибалки. Если уравнение изогнутой оси балки имеет вид $w = w(x)$, а радиус кривизны равен $\frac{1}{R} \approx -\frac{d^2w}{dx^2}$, то действие осевого натяжения X эквивалентно действию нормальной нагрузки, равной $\frac{X}{R}$, и, если X положительно, это действие представляет восстанавливающую силу. Поэтому действие подвесок такое же, как если бы осевое натяжение, равное по величине натяжению цепи, было бы приложено вдоль оси балки.

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$w = A + Bx + Ce^{\mu x} + De^{-\mu x} + w_p(x), \tag{7}$$

где $\mu = \sqrt{\frac{H+h}{EI}}$, а $w_p(x)$ есть частное решение уравнения (5).

Допустим, что р $-\frac{h}{H}$ есть величина постоянная. Тогда удобнее выбрать за начало системы координат середину балки и допустить, что $w=0$ и $\frac{d^2w}{dx^2}=0$ при $x = \pm\frac{l}{2}$. Если принять во внимание симметрию, вытекающую из условий задачи, то ясно, что решением может быть только чётная функция w. Поэтому

$$w = C_1 + C_2 \mathrm{ch} x - \frac{1}{H+h}\left(p - q\frac{h}{H}\right)\frac{x^2}{2} \tag{8}$$

Путём дифференцирования можно показать, что последний член в уравнении (8) представляет частное решение уравнения (5). Согласно граничным условиям

$$C_1 + C_2 chx - \frac{1}{H+h}\left(p - q\frac{h}{H}\right)\frac{X^2}{2} = 0,$$

$$-\mu^2 C_2 ch\frac{\mu l}{2} - \frac{p - q\frac{h}{H}}{H+h} = 0.$$

Поэтому

$$-\mu^2 C_1 1 = \frac{p - q\frac{h}{H}}{H+h}\left(\frac{\mu^2 l^2}{8} + 1\right),$$

$$-\mu^2 C2 = \frac{p - q\frac{h}{H}}{H+h}\left(\frac{1}{ch\frac{\mu l}{2}}\right). \tag{9}$$

Найдем теперь изгибающий момент в середине. Равенство (8) даёт:

$$M = -EI\frac{d^2w}{dx^2} = EI\left(\mu^2 C_2 + \frac{p - q\frac{h}{H}}{H+h}\right),$$

если подставить значение C_2 из равенства (9), получим

$$M = EI\frac{p - q\frac{h}{H}}{H+h}\left(1 - \frac{1}{ch\frac{\mu l}{2}}\right). \tag{10}$$

Подставив $\frac{H+h}{EI} = \mu^2$, получим:

$$M_{max} = pl^2\left(1 - \frac{q}{p}\frac{h}{H}\right)\frac{1}{(\mu l)^2}\left(1 - \frac{1}{ch\frac{\mu l}{2}}\right), \qquad (11)$$

учитывая, что отношение $\frac{h}{H}$ есть функция от безразразмерной величины $\frac{Hl^2}{EI}$ и отношения $\frac{p}{q}$.

Таким образом, максимальный момент в середине пролета выразится в виде

$$M_{max} = pl^2 f(\frac{p}{q}.\frac{Hl^2}{EI}), \qquad (12)$$

где отношение $\frac{p}{q}$ и безразмерная величина $\frac{Hl^2}{EI}$ играют роль основных параметров этой задачи. Частное решение уравнения (5) при произвольной нагрузке p может быть найдено либо с помощью суперпозиции сосредоточенных сил, либо разложением функции p в ряд Фурье.

Библиографический список:

1. Shein A.I., Snezhkina O.V., Ladin R.A. Numerical study of short reinforced concrete beams // Contemporary Engineering Sciences. 2015. No. 9. Vol. 8. P. 361-365. URL: http://dx.doi.org/10.12988/ces.2015.5246.

2. Снежкина О.В., Ладин Р.А., Киселев А.А. Оценка трещиностойкости коротких железобетонных балок при разрушении по сжатой зоне [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no2/stroitelnye-konstrukcii-zdaniya-i-sooruzheniya/2.11/at_download/file.

3. Киселев А.А., Снежкина О.В., Бочкарева О.В. Реализация межпредметных связей на примере регрессионного анализа [Текст] // Молодой ученый. 2015. №9. С. 1081-1083.

4. Снежкина О.В., Корнюхин А.В., Киселев А.А., Ладин Р.А. Программа и результаты исследования коротких железобетонных балок // Молодой ученый. 2014. №6 (65). С.240-243.