УДК 517.9

# К ВОПРОСУ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

***Гаврилов Павел Игоревич,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,*

*студент.*

***Киселев Артем Анатольевич,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,*

*аспирант.*

***Снежкина Ольга Викторовна,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры «Начертательная геометрия и графика».*

**Аннотация**

Среди важнейших проблем, приводящихся к дифференциальному уравнению об изгибе балки на упругом основании, относится вопрос об осе-симметричной деформации круглой трубы. В статье приводится математическое исследование задачи, с целью формирования производственных компетенций на занятиях по математике в высшей школе.

**Ключевые слова:** инженерные приложения математики, дифференциальные уравнения, изгиб балки на упругом основании, деформации круглой трубы, понижение напряжений, формирование производственных компетенций.

# TO THE QUESTION ABOUT THE MATHEMATICAL STUDY OF ENGINEERING PROBLEMS

***Gavrilov Pavel Igorevich,***
*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*
*Student.*
***Kiselev Artem Anatolyevich,***
*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*
*Post-graduate student.*
***Snezhkina Olga Viktorovna,***
*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*
*Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Descriptive geometry and graphics".*

**Abstract**

Among the major problems, leading to a differential equation of bending of a beam on an elastic foundation, is the question about axis-symmetric deformation of a circular pipe. The article presents a mathematical study of the task with the purpose of formation of competences at lessons of mathematics at higher school.
**Keywords:** engineering applications of mathematics, differential equation, bending of beams on an elastic foundation, the deformation of the round pipe, lowering stress, the formation of production skills.

Для более глубокого усвоения курса математики в высшем учебном заведении и формирования профессиональных компетенций у обучающихся, в качестве индивидуальной работы студентам предлагается самостоятельное изучение ряда технических задач. В статье приводится математическое исследование задачи, решающей вопрос о понижении напряжений в длинной трубе с помощью ряда упрочняющих колец.

Существует много различных инженерных вопросов, приводящих к дифференциальному уравнению изгиба балки. Среди важнейших проблем, приводящихся к задаче об изгибе балки на упругом основании, относится вопрос об осе-симметричной деформации круглой трубы.

Рассмотрим круглую трубу толщины $t$ и среднего радиуса $r$( под средним радиусом принято среднее арифметическое внешнего и внутреннего радиусов). Предполагается, что давления, действующие на трубу, а, следовательно, и её деформации симметричны относительно оси $x$ (рисунок 1, согласно Т. Карман и М.Био). Рассмотрим на этой трубе полосу, заключённую между двумя плоскостями, проходящими через ось $x$ и наклонёнными друг к другу под малым углом $\Delta\alpha$. Такая полоса будет вести себя, как балка, шириной $r\Delta\alpha$ и толщиной $t$ если только рассматривать эту полосу подверженной не только давлению, действующему на трубу, но также силам, действующим на оба края полосы, обусловленным упругим сжатием или растяжением частей трубы. Результирующая этих сил направлена по радиусу и представляет восстанавливающую упругую силу рассматриваемой балки. Радиальное отклонение $w$ полосы будем считать положительным в направлении, от оси наружу.

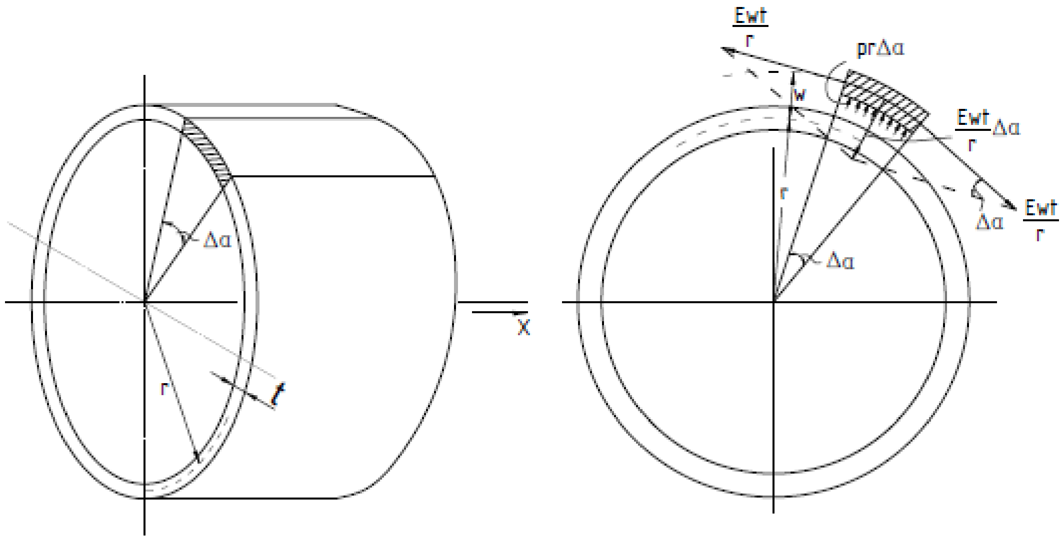


Рисунок 1 –Осе-симметрическая деформация цилиндрической трубы под действием внутреннего давления

Удлинение радиуса кольцеобразной части от $r$ до $r+w$ обусловливает в кольце натяжение, равное $E\frac{w}{r}$, где $E$ – модуль упругости материала. Тогда силы, действующие на боковые края полосы, приходящиеся на единицу длины трубы, равны $\frac{Ewt}{r}$, а равнодействующая радиальных сил, действующая перпендикулярно к оси, равна $E\frac{w}{r}t\Delta\alpha$ на единицу длины полосы. Эта равно действующая эквивалентна упругой восстанавливающей силе с коэффициентом пропорциональности

$$k = \frac{Et}{r}\Delta\alpha$$

Внешняя нагрузка на единицу длины равна $pr\Delta\alpha$, где $p$ выражает внутреннее давление на единицу площади цилиндрической поверхности. (Точное значение нагрузки равно $(r-\frac{t}{2})p\Delta\alpha$, но в случае тонкостенных труб можно пренебречь величиной $\frac{t}{2}$ по сравнению с $r$). Учитывая, что момент инерции поперечного сечения полосы равен: $r\Delta\alpha\frac{t^3}{12}$ дифференциальное уравнения изгиба балки

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = p(x) - kw \qquad (1)$$

примет следующий вид:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{12}{r^2t^2}w = \frac{12}{Et^3}p \qquad (2)$$

Введем характеристический параметр задачи $a=\sqrt{rt}$, имеющий размерность длины. Уравнение (2) запишем в виде:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{12}{a^4}w = \frac{12}{Et^3}p \qquad (3)$$

Применим это уравнение к случаю неограниченной трубы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления $p$ и скреплённой в сечении x=0 жёстким кольцом, жёсткость которого так велика, что можно пренебречь изменением диаметра этого сечения трубы (рисунок 2). Тогда краевые условия примут вид: при $x = 0$, $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$; в бесконечности значение $w$ остаётся конечным, а $\frac{dw}{dx} = 0$.

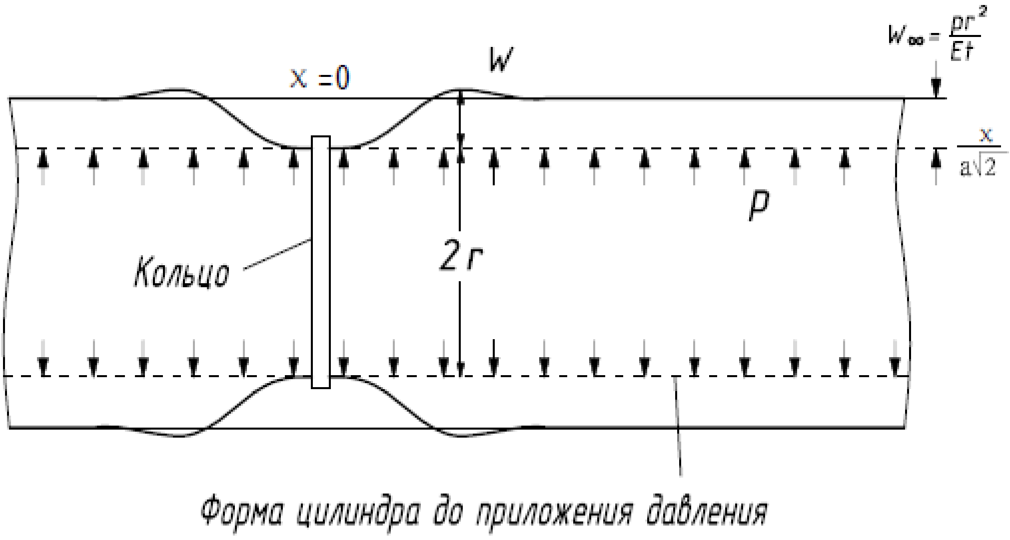


Рисунок 2 – Деформация скреплённой цилиндрической трубы под действием внутреннего давления

Общее решение уравнения (3) содержит в качестве слагаемого произвольное частное решение неоднородного уравнения. В качестве частного решения возьмём

$$w=\frac{a^4 p}{Et^3}=\frac{pr^2}{Et} \tag{4}$$

Решение однородного уравнения можно получить из уравнения

$$w = Ce^{\pm\frac{\beta}{\sqrt{2}}(x-\varepsilon)}\left[cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}(x-\varepsilon) \mp sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}(x-\varepsilon)\right], \tag{5}$$

подставляя $\beta=\frac{\sqrt[4]{12}}{a}$и $\varepsilon$=0 (это удовлетворяет граничным условиям в бесконечности и условию $\frac{dw}{dx}$=0 для x=0). Таким образом, мы получим:

$$w=\frac{pr^2}{Et}+Ce^{\pm\frac{x}{a}\sqrt[4]{3}}\left[\cos\left(\frac{x}{a}\sqrt[4]{3}\right) \mp \sin\left(\frac{x}{a}\sqrt[4]{3}\right)\right], \tag{6}$$

где верхний знак берётся для x<0, а нижний – для x>0. Оставшаяся постоянная *C* определяется из условия w=0 при x=0. Окончательно получаем:

$$w=\frac{pr^2}{Et}\left\{1-e^{\pm\frac{x}{a}\sqrt[4]{3}}\left[\cos\left(\frac{x}{a}\sqrt[4]{3}\right) \mp \sin\left(\frac{x}{a}\sqrt[4]{3}\right)\right]\right\}. \tag{7}$$

На рисунке 2 изображены значения $w$, как функции от x (радиальное перемещение в бесконечности $w$=$\frac{pr^2}{Et}$ , т.е. тому перемещению, которое имело бы любое сечение трубы при отсутствии упрочняющего кольца).

Если упрочняющее кольцо применяют как приспособление, понижающее напряжение, то важно знать длину той части трубы, на которую кольцо оказывает влияние. Чтобы вычислить эту длину, подсчитаем нагрузку, которую несёт кольцо. Её можно найти, если подсчитать срезывающие силы для $x$=$\mp\varepsilon$, если подсчитать для каждого сечения частичное давление $p_1$, которое уравновешивается с кольцевыми напряжениями в трубе. Если полное давление равно $p$, то оставшуюся нагрузку, т.е.

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}(p - p_1)dx = 2\int_0^{\infty}(p - p_1)dx \qquad (8)$$

должна нести единица длины кольца. Тангенциальное напряжение в трубе равно $E\frac{w}{r}$; поэтому $p_1$=$E\frac{wt}{r^2}$. Подставляя это значение в выражение (8) и используя для $w$ выражение (7), получим:

$$P = 2p\int_0^{\infty} e^{\frac{-x\sqrt[4]{3}}{a}}(cos\frac{x\sqrt[4]{3}}{a} + sin\frac{x\sqrt[4]{3}}{a})dx \qquad (9)$$

Выполнив интегрирование, найдем:

$$P = \frac{2pa}{\sqrt[4]{3}} = 2p\frac{\sqrt{rt}}{\sqrt[4]{3}}. \qquad (10)$$

Давление, действующее по длине $2l = \frac{2\sqrt{rt}}{\sqrt[4]{3}}$, передается на упрочняющее кольцо.

Таким образом, чтобы понизить напряжение в длинной трубе с помощью ряда упрочняющих колец, следует их разместить на расстоянии порядка $2l$, пропорциональном квадратному корню из радиуса трубы и квадратному корню из толщины стенки.

**Библиографический список:**


1. Shein A.I., Snezhkina O.V., Ladin R. A. Numerical study of short reinforced concrete beams // Contemporary Engineering Sciences. 2015. No. 9. Vol. 8. P. 361-365. URL: http://dx.doi.org/10.12988/ces.2015.5246.

2. Снежкина О.В., Ладин Р.А., Киселев А.А. Оценка трещиностойкости коротких железобетонных балок при разрушении по сжатой зоне [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no2/stroitelnye-konstrukcii-zdaniya-i-sooruzheniya/2.11/at_download/file.

3. Киселев А.А., Снежкина О.В., Бочкарева О.В. Реализация межпредметных связей на примере регрессионного анализа [Текст] // Молодой ученый. 2015. №9. С. 1081-1083.

4. Снежкина О.В., Корнюхин А.В., Киселев А.А., Ладин Р.А. Программа и результаты исследования коротких железобетонных балок // Молодой ученый. 2014. №6 (65). С.240-243.