УДК 624.04

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, СВЯЗАННЫХ С ВЫБОРОМ ФОРМЫ ОДНОСВЯЗНОЙ ВЫПУКЛОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ: ПЛАСТИНЫ, МЕМБРАНЫ, ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Черняев Андрей Александрович,

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, г. Орел,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительные конструкции и материалы».

Аннотация

В статье приводится методика и общий алгоритм решения задачи по определению геометрии формы плоской области: пластины, мембраны, поперечного сечения стержня на соответствующие заданные ограничения по прочности, жесткости, устойчивости, жесткости на кручение геометрическими методами строительной механики.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, односвязная выпуклая плоская область, оптимизация, пластина, мембрана, поперечное сечение стержня, конформные радиусы.

GEOMETRIC MODELING OF OPTIMIZATION PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS AND THEORY OF ELASTICITY CONNECTED WITH THE CHOICE OF SIMPLY CONNECTED FORMS CONVEX PLANE DOMAINS: PLATE, MEMBRANE CROSS-SECTION BEAM

Chernyaev Andrey Aleksandrovich,

Orel State University, Orel,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Construction structures and materials".

Abstract

Article provides a methodology and a general algorithm for solving the problem of determining the geometry of the shape of a plane domain: plates, membrane cross-section of the rod to the corresponding preset limit of strength, stiffness, stability and torsional stiffness geometrical methods of structural mechanics.

Keywords: geometric modeling, structural mechanics, simply connected flat area convex optimization, a plate, a membrane, a cross-section of the beam, conformal radiuses.

Рассмотрим известные дифференциальные уравнения двумерных задач теории упругости и строительной механики, сгруппированные по признаку общности структуры [1]:

– группа дифференциальных уравнений эллиптического типа четвертого порядка (1), включающая задачи поперечного изгиба, свободных колебаний и устойчивости пластинок;

– группа дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка (уравнения Пуассона) (2), включающая задачи поперечного изгиба растянутых мембран, свободных колебаний мембран и задачу кручения упругого призматического бруса:

$$\begin{cases} D\Delta^2\Delta^2 w - q = 0, \\ D\Delta^2\Delta^2 w - \beta^2 w = 0, \\ D\Delta^2\Delta^2 w - q_0\Delta^2 w = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 w + q/p = 0, \\ \Delta^2 w + \lambda^2 w = 0, \\ \Delta^2 w + 2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

В выражениях (1) и (2) приняты следующие обозначения:

$D = Eh^3 / 12(1 - v^2)$ – цилиндрическая жесткость пластинки (E – модуль упругости материала первого рода; h – толщина пластинки; v – коэффициент Пуассона;

Δ – оператор Лапласа;

$\beta^2 = \omega_n^2 m / D$ – собственное значение дифференциального уравнения колебаний пластинок;

$\lambda^2 = \omega_{\text{м}}^2 m / p$ – собственные значения дифференциального уравнения колебаний мембран;

w – для пластинки и мембраны функция прогибов, для бруса – функция напряжений;

q – интенсивность равномерно распределенной поперечной нагрузки на пластинку или мембрану;

q_0 – интенсивность усилия равномерного сжатия пластинки;

p – интенсивность усилия равномерного растяжения мембраны;

$\omega_{\text{м}}$ – частота свободных колебаний мембраны;

m – масса единицы площади пластинки или мембраны.

Представим функцию прогибов (и напряжений) в виде произведения максимального прогиба w_0 на единичную функцию $f(x, y)$, удовлетворяющую условию $1 \geq f(x; y) \geq 0$:

$$w = w(x, y) = w_0 f(x, y) \; . \tag{3}$$

Подставив ее в дифференциальные уравнения и проинтегрировав их по площади области A (площади пластинки, мембраны или поперечного сечения бруса) получим следующие выражения для определения соответствующих интегральных ФМХ в рассматриваемых задачах [2, с. 231]:

$$\begin{cases} (w_0)_{\text{п}} = \dfrac{qA}{D}\Big/\iint \Delta^2\Delta^2 f\,dA, \\ (\omega_0)^2_n = \dfrac{D}{m}\iint \Delta^2\Delta^2 f\,dA\Big/\iint f\,dA, \\ q_{0,\,\text{кр}} = D\iint \Delta^2\Delta^2 f\,dA\Big/\iint \Delta^2 f\,dA; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} (w_0)_{\text{м}} = -\dfrac{qA}{p}\Big/\iint \Delta^2 f\,dA, \\ (\omega_0)^2_{\text{м}} = -\dfrac{p}{m}\iint \Delta^2 f\,dA\Big/\iint f\,dA, \\ (w_0)_{\text{б}} = -2A\Big/\iint \Delta^2 f\,dA, \end{cases} \tag{5}$$

где $(w_0)_{\text{п}}$ – максимальный прогиб пластинки (мембраны); $(w_0)_{\text{м}}$ – максимальный прогиб мембраны; $q_{0,\text{кр}}$ – критическое усилие при потере устойчивости пластинки; $(w_0)_{\text{б}}$ – максимальное значение функций напряжений бруса.

Используя их в работе [3] на основе вариационного представления собственных значений дифференциальных уравнений поперечного изгиба, свободных колебаний и устойчивости пластинок, и конформном представлении внутренности их области при отображении на единичный круг, были получены следующие математические аналогии некоторых основных физико-механических характеристик с отношением внутреннего к внешнему конформных радиусов $\dot{r} / \bar{r}$:

$$\begin{cases} w_0 \le k_w\left(\dot{r}/\bar{r}\right)\cdot qA^2\big/D, \\ \omega_0 \le k_\omega\left(\dot{r}/\bar{r}\right)^{-1}\cdot\sqrt{D/m}\big/A, \\ q_0 \le k_q\left(\dot{r}/\bar{r}\right)^{-1}\cdot D/A, \end{cases} \tag{6}$$

где k_i – числовые константы, зависящие от вида граничных условий и обращающие выражение (6) в равенство для круглой области.

Из выражений (6) следует, что при заданных исходных данных для рассматриваемых задач и граничных условий пластинки отношение конформных радиусов выступает в качестве единственного аргумента, однозначно определяющего верхнюю оценку рассматриваемых физико-механических характеристик.

Другими словами, отношение конформных радиусов является геометрическим аналогом этих параметров. Это означает, что, не решая дифференциальных уравнений (1), (2), а, рассматривая лишь геометрическую задачу, связанную с анализом изменения отношения конформных радиусов при изменении геометрических параметрах и формы пластинок, можно оценивать качественную и количественную стороны изменения рассматриваемых физико-механических характеристик пластинок.

Конформные радиусы – это радиусы, получаемые при конформном отображении плоской области на внутренность и внешность круга [4]. Формулы для нахождения внутреннего $\dot{r}$ (здесь и далее подразумевается его максимальное значение) и внешнего $\bar{r}$ конформных радиусов для ряда односвязных областей с выпуклым контуром имеют следующий вид [3, 5]:

– для круга радиуса a:

$$\dot{r} = a\,, \quad \bar{r} = a\,; \tag{7}$$

– для правильных n-угольников:

$$\dot{r} = \frac{\Gamma\left(1 - 1/n\right)}{2^{1-\frac{2}{n}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)} L\,, \qquad \bar{r} = \frac{\Gamma\left(1 + 1/n\right)}{2^{1+\frac{2}{n}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)} L\,, \tag{8}$$

где n – число сторон; L – здесь и далее, периметр; $\Gamma(x)$ – здесь и далее Г-функция (Гамма-функция);

– для произвольных треугольников с углами $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$:

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f(\alpha)\, f(\beta)\, f(\gamma) \cdot \rho\,, \qquad \bar{r} = A/\pi\dot{r} \tag{9}$$

где $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(x)} \left\{ \dfrac{x^x}{(1-x)^{1-x}} \right\}^{1/2}$; ρ – радиус описанного круга, где A – площадь;

– для равнобедренных треугольников с углами α=β выражения (9) примут следующий вид:

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f^2(\alpha) f(\gamma) \cdot \rho \; ; \quad \overline{r} = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot h^2}{\pi \dot{r}} \;, \tag{10}$$

где α – равный угол при основании; h – высота;

– для прямоугольных треугольников (α = π/2) из выражение (9) следует

$$\overline{r} = \frac{\sin 2\alpha \cdot c^2}{4\pi \dot{r}}, \tag{11}$$

где α – угол при гипотенузе; c – гипотенуза;

– для ромбов с углом $\pi\alpha$:

$$\dot{r} = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} L, \;\; \overline{r} = \frac{\pi^{1/2}}{8\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} L; \tag{12}$$

– для эллипсов с полуосями a и b ($a \geq b$):

$$\dot{r} = \overline{r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \right\}^{-1} \left\{ 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right\}^{-1}, \quad \overline{r} = \frac{a+b}{2}, \tag{13}$$

где $q = (a-b)^2 / (a+b)^2$;

– для прямоугольников со сторонами a и b ($a \geq b$):

$$\dot{r} = \frac{2}{\pi} b \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^{-2}, \quad \begin{cases} \dfrac{a}{\overline{r}} = \pi \cos^2 \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((2k-1)!!\right)^2}{2^{2k}(k+1)!k!} \cos^{2k} \alpha; \\ \dfrac{b}{\overline{r}} = \pi \sin^2 \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((2k-1)!!\right)^2}{2^{2k}(k+1)!k!} \sin^{2k} \alpha, \end{cases} \tag{14}$$

где $q = e^{-\pi a/b}$, α – аргумент комплексных чисел (точек окружности, образами которых при конформном отображении служат вершины прямоугольника); (-1)!! = 1.

Кроме этого выражения (6) позволяют моделировать форму плоских элементов конструкций с помощью отношения конформных радиусов и использовать их в задачах физико-механического и геометрического подобия, связанных с решением задач вариантного проектирования и оптимизации формы. Покажем это.

В работах [6-9] были построены графические зависимости интегральных физико-механических характеристик от отношения конформных радиусов (рисунок 1).

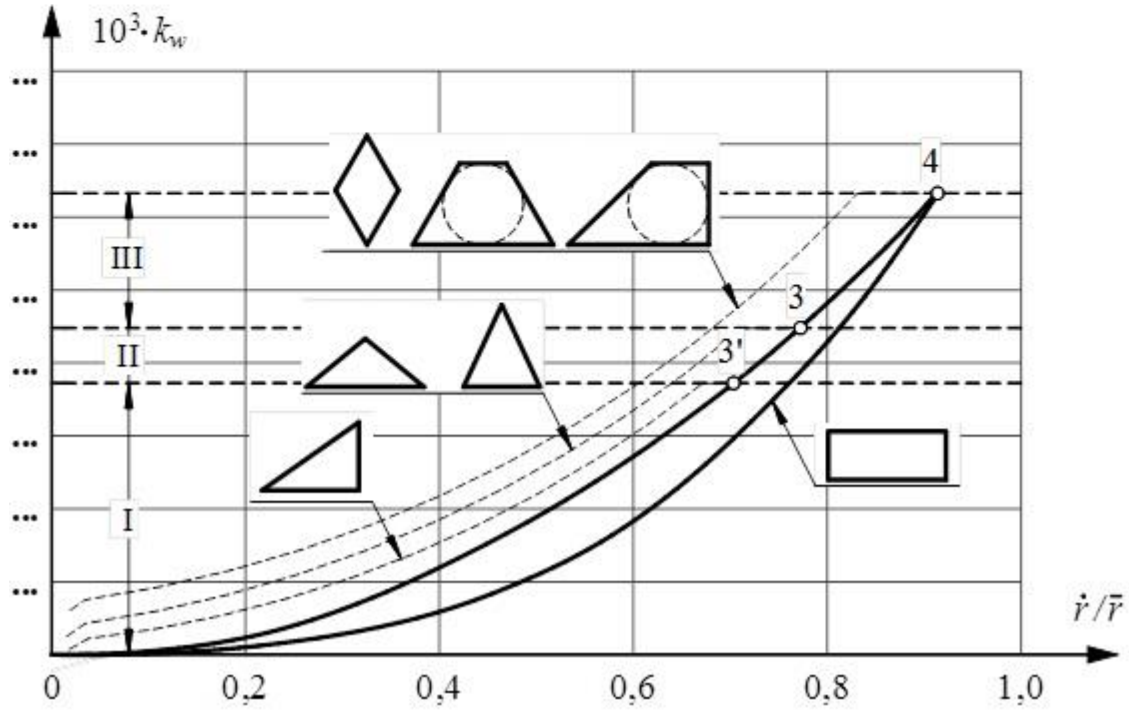

Рисунок 1 – Графические зависимости интегральных физико-механических характеристик (прогиба, напряжений, критического усилия, основной частоты колебаний, жесткости на кручение) от отношения конформных радиусов

Поскольку отношение конформных радиусов полностью определяет геометрию, то решение задачи по определению формы плоской области: пластины, мембраны, поперечного сечения стержня на соответствующие заданные ограничения по прочности, жесткости, устойчивости, жесткости на кручение, будет осуществляться в следующей последовательности.

1. Для заданного граничного допустимого значения и случая граничных условий определяется отношение конформных радиусов для пластинок, мембран, сечений простых форм. То есть таких, форма которых однозначно определяется одним геометрическим параметром: для прямоугольных это отношение сторон, для ромбической это угол, для равнобедренной треугольной это, например, равный угол при основании и т.д.

2. По полученным значениям отношения конформных радиусов определяются геометрические параметры, однозначно определяющие их форму.

3. Путем геометрического моделирования [10] из пластинок, мембран, сечений простых форм с использованием геометрических преобразований строятся пластинки, мембраны, сечения сложных форм. То есть таких, форма которых однозначно определяется двумя и более геометрическими параметрами: параллелограммные, трапециевидные и т.д.

4. Полученные пластинки, мембраны, сечения приводятся к равной (единичной) площади.

Таким образом, в статье разработана методика и общий алгоритм решения задачи по определению геометрии формы плоской области: пластины, мембраны, поперечного сечения стержня на соответствующие заданные ограничения по прочности, жесткости, устойчивости, жесткости на кручение на основе геометрических методов с использованием конформных радиусов. Использования этой методики к решению конкретных задач будет рассмотрено в последующих работах.

Библиографический список:

1. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 508 с.

2. Коробко В.И. Изопериметрический метод в строительной механике. Теоретические основы изопериметрического метода. М.: АСВ, 1997. 390 с.

3. Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: КомКнига, 2006. 336 с.

4. Иванов В.И., Попов В.Ю. Конформные отображения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2002. 324 с.

5. Казанцев В.П., Золотов О.А., Долгополова М.В. Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Емкости уединенного проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы // Вестник Красноярского

государственного университета. Физико-математические науки. 2005. № 1. С. 32-38.

6. Коробко В.И., Черняев А.А. Отношение конформных радиусов – новый аргумент геометрических методов решения двумерных задач теории упругости // Вестник отделения строительных наук РААСН. 2012. Вып. 16. Т. 1. С. 149-161.

7. Коробко А.В., Черняев А.А. Определение основной частоты свободных колебаний пластинок с использованием конформных радиусов // Строительство и реконструкция. 2011. №1. С. 12-18.

8. Коробко В.И., Черняев А.А. Решение задач поперечного изгиба пластинок с использованием конформных радиусов / В.И. Коробко, А.А. Черняев // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №6. С. 16-22.

9. Коробко А.В., Черняев А.А. Расчет пластин на устойчивость с использованием отношения конформных радиусов // Строительство и реконструкция. 2010. №6. С. 31-38.

10. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. М.: АСВ, 1999. 320 с.