УДК 69.04

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ПРИ РАСЧЁТЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

Бакушев Сергей Васильевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Рассматривается статически определимая плоская ферма в предположении, что в наиболее нагруженных стержнях нормальное напряжение достигает величины расчётного сопротивления материала. Задаваясь соотношением значений внешних сосредоточенных узловых сил, определяются их значения из условия, что нормальное напряжение в наиболее нагруженных стержнях достигает величины расчётного сопротивления материала. Данный подход при расчёте статически определимых плоских ферм можно назвать обратной задачей строительной механики. Результаты данного исследования могут найти применение при проектировании и расчёте статически определимых плоских ферм.

Ключевые слова: плоская ферма, упругость, усилия, расчёт, статическая определимость, обратная задача.

INVERSE PROBLEM OF STRUCTURAL MECHANICS WHEN CALCULATING STATICALLY DEFINABLE TRUSSES

Bakushev Sergey Vasilevish,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Technical Sciences, Professor, chair "Mechanics".

Abstract

A statically defined flat truss is considered on the assumption that in the most loaded members the normal stress reaches the value of the calculated resistance of the material. Given the ratio of the values of the external concentrated nodal forces, their values are determined from the condition that the normal stress in the most loaded members reaches the value of the design resistance of the material. This approach in the calculation of statically definable flat trusses can be called the inverse problem of structural mechanics. The results of this study can be used in the design and analysis of statically defined flat trusses.

Keywords: flat farm, elasticity, effort, calculation, static definability, inverse problem.

Введение

Задача расчёта статически определимых плоских ферм в упругой стадии работы в части определения усилий в стержнях формы относится к самым простым среди всех задач механики деформируемого твёрдого тела. В высшей школе эту задачу изучают одной из первых ещё в курсе теоретической механики в разделе «Статика». Фундаментальный вклад в теорию расчёта ферм внесли русские инженеры, в частности, Д.И. Журавский, который создал теорию расчета решетчатых конструкций (1850-е гг.), Л.Д. Проскуряков и В.Г. Шухов. Основополагающими пособиями по расчёту и конструированию плоских и пространственных ферм могут служить руководства [1, 2, 3, 4, 5].

Теоретические основы

Определение усилий в элементах статически определимых ферм выполняется, как правило, либо методом сечений (методом Риттера), либо методом вырезания узлов, либо методом конечных элементов. При этом известными являются внешние сосредоточенные нагрузки, прикладываемые в узлах фермы.

Путём последовательного перерасчёта, изменяя значения внешних сил, можно добиться того, что наиболее нагруженные элементы фермы будут находиться в условиях предельного состояния, то есть напряжения в них будут близки или равны расчётному сопротивлению их материала. Подобный приём расчёта усилий в элементах фермы можно назвать прямым методом строительной механики при расчёте статически определимых ферм.

Вместе с тем напрашивается обратный метод расчёта статически определимых ферм, в соответствии с которым предполагается что некоторые наиболее нагруженные элементы фермы будут находиться в состоянии предельного равновесия, то есть напряжения в этих элементах будут равны расчётному сопротивлению материала. Следовательно, усилия в этих элементах будут известны. Тогда, используя уравнения равновесия для определения опорных реакций и уравнения равновесия метода вырезания узлов для определения усилий в элементах фермы, можно будет определить значения внешней узловой нагрузки.

Рассмотрим статически определимую ферму. Пусть

$n -$ количество вне опорных узлов фермы;

$n + 2 -$ общее количество узлов фермы;

$m -$ количество стержней в ферме;

$k -$ количество узловых сил, подлежащих определению;

$i -$ количество стержней с известными усилиями (находящимися в состоянии предельного равновесия).

Тогда, общее количество уравнений равновесия (уравнений равновесия для определения опорных реакций плюс уравнения равновесия при вырезании узлов) будет равно:

$$N_y = 3 + (n + 2)2. \quad (1)$$

При этом количество неизвестных будет равно:

$$N_n = (m - i) + k + 3. \quad (2)$$

Так как $N_y = N_n$, то количество узловых сил, подлежащих определению, не должно превышать величины

$$k \le (n+2)2 - (m-i). \tag{3}$$

Рассмотрим пример фермы (рисунок 1).

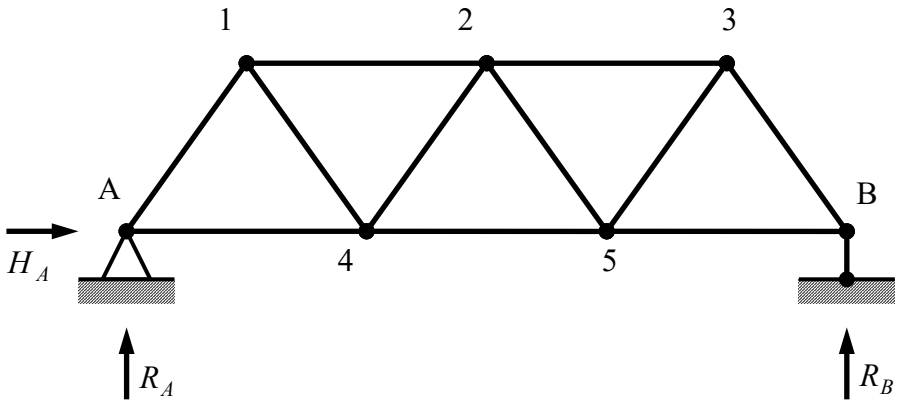


Рисунок 1 – Ферма

Здесь $n = 5;\ m = 11$.

Случай 1. Пусть стержень 4-5 находится в состоянии предельного равновесия, то есть $i = 1$. Тогда получаем: $k \le 4,\ N_y = 17;\ N_n = 17$.

В этом случае количество узловых сил, подлежащих определению должно быть не более четырёх. Узлы, где будут приложены эти четыре силы, определяет проектировщик исходя из условия, что бы усилие в стержне 4-5 было бы максимальным.

Случай 2. Пусть стержни А-4, 4-5, 5-В находятся в состоянии предельного равновесия, то есть $i = 3$. Тогда получаем: $k \le 6,\ N_y = 17;\ N_n = 17$.

В обоих случаях количество уравнений равновесия одинаково, однако решение этой системы уравнений в первом и втором случае будет, очевидно, разным.

Пример расчёта фермы

В качестве примера рассмотрим ферму, изображённую на рисунке 2. Все стержни фермы имеют одинаковую длину; все углы между стержнями, следовательно, равны 60^0. Стержни выполнены из трубы $6{,}6\times 3{,}5$ с площадью поперечного сечения $A = 6{,}6\,\text{см}^2$. Прикладываем к узлам фермы четыре внешних силы: $F_1 = 15\,\text{кН},\ F_2 = 10\,\text{кН},\ F_4 = 20\,\text{кН},\ F_5 = 25\,\text{кН}$.

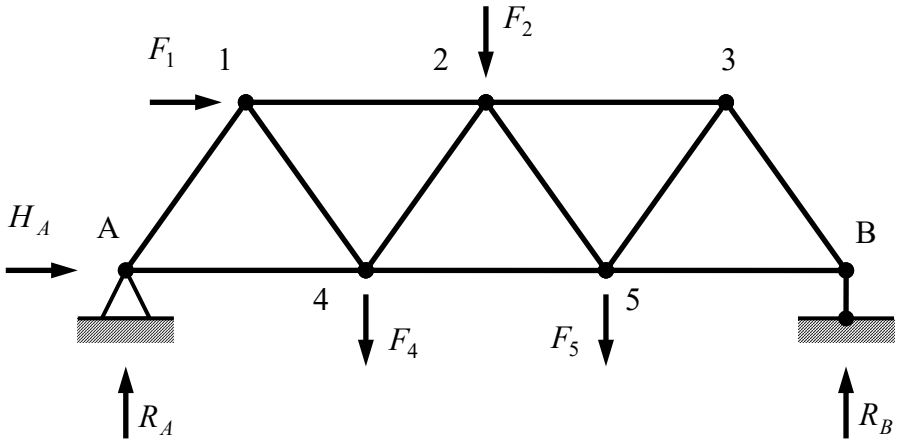


Рисунок 2 – Расчётная ферма

От заданной нагрузки вычисляем опорные реакции.

$$\sum M_B = 0:\ R_A 3l + F_1\frac{\sqrt{3}}{2}l - F_2\frac{3}{2}l - F_4 2l - F_5 l = 0;$$

$$\sum M_A = 0:\ F_1\frac{\sqrt{3}}{2}l + F_2\frac{3}{2}l + F_4 l + F_5 2l - R_B 3l = 0; \qquad (4)$$

$$\sum X = 0:\ H_A + F_1 = 0.$$

Отсюда

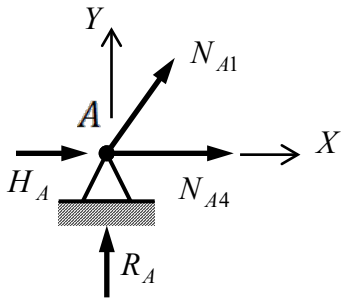
$$R_A = -F_1\frac{1}{2\sqrt{3}} + F_2\frac{1}{2} + F_4\frac{2}{3} + F_5\frac{1}{3} = 22{,}337\,\text{кН};$$

$$R_B = F_1\frac{1}{2\sqrt{3}} + F_2\frac{1}{2} + F_4\frac{1}{3} + F_5\frac{2}{3} = 32{,}663\,\text{кН};$$

$$H_A = -F_1 = -10{,}0\,\text{кН}.$$

Методом вырезания узлов определяем усилия в стержнях фермы.

Узел А:



$$\sum X = 0:\ H_A + N_{A1}\cos 60^0 + N_{A4} = 0;$$

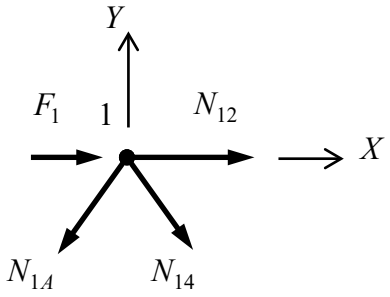
$$\sum Y = 0:\ R_A + N_{A1}\sin 60^0 = 0.$$

Отсюда

$$N_{A1} = -R_A\frac{2}{\sqrt{3}} = -25{,}792\ \text{кН};$$

$$N_{A4} = -H_A - N_{A1}\frac{1}{2} = 27{,}896\ \text{кН}.$$

Узел 1:



$$\sum X = 0:\ F_1 + N_{12} + N_{14}\cos 60^0 - N_{1A}\cos 60^0 = 0;$$

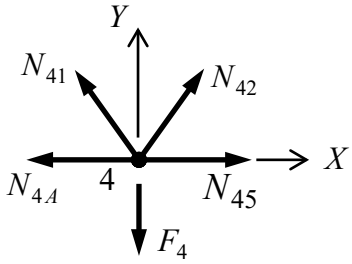
$$\sum Y = 0:\ -N_{1A}\cos 30^0 - N_{14}\cos 30^0 = 0.$$

Отсюда

$$N_{14} = -N_{1A} = 25{,}792\ \text{кН};$$

$$N_{12} = -N_{14}\frac{1}{2} + N_{1A}\frac{1}{2} - F_1 = -40{,}792\ \text{кН}.$$

Узел 4:



$$\sum X = 0:\ -N_{4A} - N_{41}\cos 60^0 +$$
$$+ N_{42}\cos 30^0 + N_{45} = 0;$$

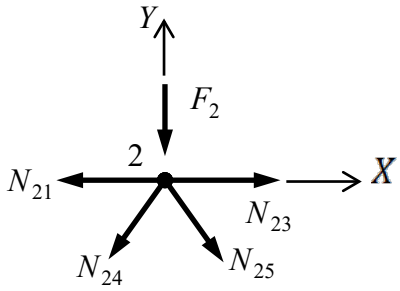
$$\sum Y = 0:\ -F_4 + N_{41}\cos 30^0 + N_{42}\cos 30^0 = 0.$$

Отсюда

$$N_{42} = F_4\frac{2}{\sqrt{3}} - N_{41} = -2{,}698\ \text{кН};$$

$$N_{45} = N_{4A} + N_{41}\frac{1}{2} - N_{42}\frac{1}{2} = 42{,}141\ \text{кН}.$$

Узел 2:



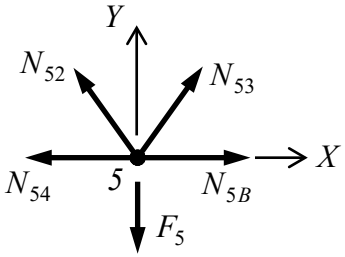
$$\sum X = 0: -N_{21} - N_{24}\cos 60^0 + $$
$$+ N_{25}\cos 60^0 + N_{23} = 0;$$
$$\sum Y = 0: -F_2 - N_{24}\cos 30^0 - N_{25}\cos 30^0 = 0.$$

Отсюда

$$N_{25} = -F_2\frac{2}{\sqrt{3}} - N_{24} = -8{,}849\ \text{кН};$$

$$N_{23} = N_{21} + N_{24}\frac{1}{2} - N_{25}\frac{1}{2} = -37{,}717\ \text{кН}.$$

Узел 5:



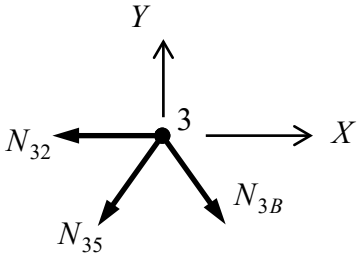
$$\sum X = 0: -N_{54} - N_{52}\cos 60^0 + $$
$$+ N_{53}\cos 60^0 + N_{5B} = 0;$$
$$\sum Y = 0: -F_5 + N_{52}\cos 30^0 + N_{53}\cos 30^0 = 0.$$

Отсюда

$$N_{53} = F_5\frac{2}{\sqrt{3}} - N_{52} = 37{,}717\ \text{кН};$$

$$N_{5B} = N_{54} + N_{52}\frac{1}{2} - N_{53}\frac{1}{2} = 18{,}858\ \text{кН}.$$

Узел 3:



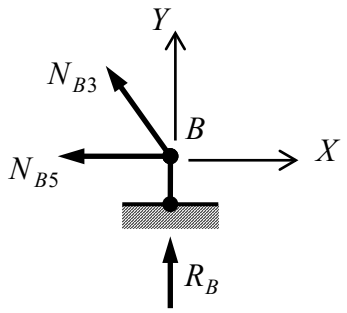
$$\sum X = 0: -N_{32} - N_{35}\cos 60^0 + N_{3B}\cos 60^0 = 0;$$
$$\sum Y = 0: -N_{35}\cos 30^0 - N_{3B}\cos 30^0 = 0.$$

Отсюда

$$N_{3B} = -N_{35} = -37{,}717\ \text{кН};$$

$$-N_{32} - N_{35}\cos 60^0 + N_{3B}\cos 60^0 \equiv 0.$$

Узел B:



$$\sum X = 0: \; -N_{5B} - N_{B3}\cos 60^0 \equiv 0;$$

$$\sum Y = 0: \; R_B + N_{B3}\cos 30^0 \equiv 0.$$

Из полученных результатов следует, что для заданных значений внешней нагрузки наиболее нагруженным является стержень 4-5. Исследования показывают, что если внешнюю нагрузку увеличить в n раз, то наиболее нагруженный стержень останется прежним. Если же значение внешних сил изменить произвольно, то наиболее нагруженный стержень может измениться. Таким образом, для решения обратной задачи строительной механики нужно задаваться соотношением значений внешних сосредоточенных узловых сил.

Итак, будем считать, что напряжение в стержне 4-5 достигает значения расчётного сопротивления материала стержня, то есть стержень 4-5 находится в состоянии предельного равновесия: $P_{45} = R_\sigma A$. Исходя из этого, найдём величину внешних узловых сил, зная соотношения между силами. В нашем случае: $F_1 = 3F;\; F_2 = 2F;\; F_4 = 4F;\; F_5 = 5F$, где $F = 5\,кН$.

В соответствии с исходными данными $P_{45} = R_\sigma A = 132{,}0\,кН$.

Для определения параметра F, при котором значение напряжения в стержне 4-5 достигает величины расчётного сопротивления материала стержня, выражаем опорные реакции через параметр F:

$$R_A = -3F\frac{1}{2\sqrt{3}} + 2F\frac{1}{2} + 4F\frac{2}{3} + 5F\frac{1}{3} = F\frac{32-3\sqrt{3}}{6};$$

$$R_B = 3F\frac{1}{2\sqrt{3}} + 2F\frac{1}{2} + 4F\frac{1}{3} + 5F\frac{2}{3} = F\frac{32+3\sqrt{3}}{6}; \qquad (5)$$

$$H_A = -3F.$$

Далее последовательно записываем уравнения равновесия всех узлов с учётом соотношений (5) и значений тригонометрических функций:

$$-3F+N_{A1}\frac{1}{2}+N_{A4}=0;$$

$$F\frac{32-3\sqrt{3}}{6}+N_{A1}\frac{\sqrt{3}}{2}=0;$$

$$3F+N_{12}+N_{14}\frac{1}{2}-N_{1A}\frac{1}{2}=0;$$

$$-N_{1A}\frac{\sqrt{3}}{2}-N_{14}\frac{\sqrt{3}}{2}=0;$$

$$-N_{4A}-N_{41}\frac{1}{2}+N_{42}\frac{1}{2}+P_{45}=0;$$

$$-4F+N_{41}\frac{\sqrt{3}}{2}+N_{42}\frac{\sqrt{3}}{2}=0;$$

$$-N_{21}-N_{24}\frac{1}{2}+N_{25}\frac{1}{2}+N_{23}=0; \qquad (6)$$

$$-2F-N_{24}\frac{\sqrt{3}}{2}-N_{25}\frac{\sqrt{3}}{2}=0;$$

$$-P_{54}-N_{52}\frac{1}{2}+N_{53}\frac{1}{2}+N_{5B}=0;$$

$$-5F+N_{52}\frac{\sqrt{3}}{2}+N_{53}\frac{\sqrt{3}}{2}=0;$$

$$-N_{32}-N_{35}\frac{1}{2}+N_{3B}\frac{1}{2}=0;$$

$$-N_{35}\frac{\sqrt{3}}{2}-N_{3B}\frac{\sqrt{3}}{2}=0;$$

$$-N_{5B}-N_{B3}\frac{1}{2}=0;$$

$$F\frac{32+3\sqrt{3}}{6}+N_{B3}\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$$

Решая систему (6), выражаем параметр F через силу P_{45}:

$$F=\frac{P_{45}}{\frac{32-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+3-\frac{4}{\sqrt{3}}}=15{,}662\text{ кН}. \qquad (7)$$

При этом значение внешней нагрузки будет равно:

$$F_1 = 3F = 46{,}985\ \text{кН};\quad F_2 = 2F = 31{,}323\ \text{кН};$$

$$F_4 = 4F = 62{,}647\ \text{кН};\quad F_5 = 5F = 78{,}308\ \text{кН}.$$

Значение усилий в стержнях фермы представлены ниже:

$$N_{A1} = -80{,}789\ \text{кН};\ N_{A4} = -80{,}380\ \text{кН};\ N_{14} = 80{,}789\ \text{кН};$$

$$N_{12} = -127{,}774\ \text{кН};\ N_{42} = -8{,}451\ \text{кН};\ N_{45} = 132{,}0\ \text{кН};$$

$$N_{25} = -27{,}718\ \text{кН};\ N_{23} = -118{,}141\ \text{кН};\ N_{53} = 118{,}141\ \text{кН};$$

$$N_{5B} = 59{,}070\ \text{кН};\ N_{3B} = -118{,}141\ \text{кН}.$$

Выводы

1. Решение обратной задачи строительной механики статически определимых плоских ферм приводит к более точному определению значений внешних узловых сил, обеспечивающих состояние предельного равновесия в наиболее напряжённых стержнях фермы.

2. При пропорциональном увеличении внешней нагрузки наиболее нагруженные стержни не меняются и остаются прежними.

3. Если значения внешних узловых сил изменять произвольно, то наиболее нагруженные стержни изменяется.

4. При решении обратной задачи строительной механики статически определимых плоских ферм нужно задаваться соотношением значений внешних сосредоточенных узловых сил.

Заключение

Результаты данного исследования могут найти применение при проектировании и расчёте статически определимых плоских ферм.

Библиографический список:

1. *Дарков А. В.* «Строительная механика» / учебник для строит. спец. вузов. — ил. — М.: «Высшая школа», 1986. — 607 с.

2. *Муханов К. К.* «Металлические конструкции» / Учебник для вузов. — 3-е изд., исправ. и доп. — М.: «Стройиздат», 1978. — 572 с.

3. *Будур А. И., Белогуров В. Д.* «Стальные конструкции». Справочник конструктора / Под общей ред. Шимановского А. В. — Киев: «Сталь», 2010. — 299 с.

4. *Кудишин Ю. И., Беленя Е. И., Игнатьева В. С. и др.* «Металлические конструкции». / Учебник для студ. высш. учеб. заведений / Под ред. Кудишина Ю. И. — 11-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. —688 с.

5. *Кирсанов М. Н.* Плоские фермы. Схемы и расчётные формулы: справочник. — М.: Инфра—М, 2019. — 238 с.