УДК 539.3/.6

НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ СТЕРЖНЕ ПРИ ИЗГИБЕ

Бакушев Сергей Васильевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,

г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Сиротин Тимофей Павлович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,

г. Пенза,

студент.

Аннотация

Рассматривается задача определения нормальных и касательных напряжений в неоднородном многослойном упругом стержне, находящемся в условиях плоского поперечного изгиба. Слои стержня располагаются параллельно вертикальной оси стержня, являющейся осью симметрии поперечного сечения, и параллельно продольной оси стержня. Механические характеристики слоёв симметричны относительно вертикальной оси симметрии поперечного сечения. Рассмотрен числовой пример. Полученные в статье результаты могут найти применение при расчёте усилений балок с использованием накладок из материала, не совпадающего по механическим характеристикам с материалом усиливаемой балки.

Ключевые слова: нормальные и касательные напряжения, плоский поперечный изгиб, упругая балка, неоднородность.

NORMAL AND SHEAR STRESSES INHOMOGENEOUS ELASTIC MEMBER UNDER BENDING

Bakushev Sergey Vasilevish,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Doctor of Technical Sciences, Professor, chair "Mechanics".
Sirotin Timofey Pavlovich,
Penza State University of Architecture and Construction,Penza,
student.

Abstract

The problem of determining normal and shear stresses in an inhomogeneous multilayer elastic member under conditions of plane transverse bending is considered. The member layers are parallel to the vertical axis of the member, which is the axis of symmetry of the cross-section, and parallel to the longitudinal axis of the member. The mechanical characteristics of the layers are symmetrical with respect to the vertical axis of symmetry of the cross-section. A numerical example is considered. The results obtained in the article can be used in the calculation of beam reinforcements using overlays made of a material that does not coincide in mechanical characteristics with the material of the beam being reinforced.

Keywords: normal and shear stresses, planar transverse bending, elastic beam, heterogeneity.

Введение

Неоднородные конструкции, выполненные из материалов с различными механическими характеристиками, могут найти и находят широкое распространение в строительной практике, особенно при реконструкции существующих зданий и сооружений. Это может быть связано с тем, что механические характеристики усиливаемой конструкции могут быть известны недостаточно точно или существенно отличаться от механических характеристик элементов усиления. Ввиду этого для неоднородных конструкций требуются расчётные формулы для определения напряжений как в

зоне действия наибольшего изгибающего момента, так и в зоне действия наибольшей поперечной силы (для изгибаемых элементов).

Вопросы определения напряжений в элементах строительных конструкций исследованы в настоящее время достаточно подробно. Основополагающей работой по механике многослойных конструкций является монография [1], а также, для трёхслойных конструкций, книги [2, 3]. Современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных неоднородных стержней изложена в статье [4]. Вопросы определения нормальных и касательных напряжений в многослойных неоднородных изгибаемых стержнях с горизонтальными слоями изложены в статьях [5, 6, 7]. Исследование вопросов расслоения неоднородных многослойных балок с изменяющейся толщиной поперечного сечения и вертикальными разнородными слоями рассматривались в работе [8].

В данной работе оценивается напряжённое состояние многослойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба. Слои стержня, параллельные между собой, располагаются параллельно продольной оси стержня (оси OZ) и одной из главных осей инерции (вертикальной оси OY), причём симметрично относительно этой оси OY поперечного сечения стержня. Прямоугольные поперечные сечения слоёв не изменяются по длине стержня, высота слоёв принимается одинаковой. Сдвиги между слоями отсутствуют. Гипотеза плоских сечений остаётся справедливой. Искривлением поперечных сечений стержня при плоском поперечном изгибе пренебрегаем, так что, определяя нормальные напряжения σ_z в условиях чистого изгиба, будем считать полученные формулы справедливыми и при плоском поперечном изгибе.

Теоретические основы

Рассмотрим поперечное сечение изгибаемого многослойного упругого стержня, содержащего n – прямоугольных слоёв (рис. 1). Обозначим площади поперечных сечений слоёв через A_i, высоту слоёв – через h, модули упругости материала слоёв - E_i, расчётные сопротивления материала слоёв по нормальным и касательным напряжениям – через $R_{\sigma}^{(i)}$ и $R_{\tau}^{(i)}$.

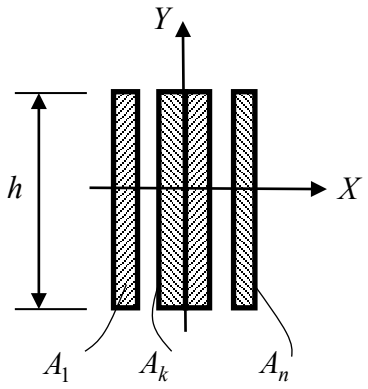


Рисунок 1 – Поперечное сечение многослойного

В соответствии с гипотезой плоских сечений при чистом изгибе деформация произвольного волокна балки определяется соотношением $\varepsilon_z = \frac{y}{\rho}$. Следовательно, нормальные напряжения в частях сечения из разного материала будут определяться соотношениями

$$\sigma_z^{(i)} = E_i \frac{y}{\rho};\ i = 1,2,...n. \qquad (1)$$

В силу формулы $\varepsilon_z = \frac{y}{\rho}$ положение нейтральной линии не зависит от модулей упругости материалов слоёв балки.

Поскольку искривлением поперечных сечений стержня при плоском поперечном изгибе пренебрегаем, то нормальные напряжения σ_z, в соответствии с формулой (1), распределены вдоль ширины площади поперечного сечения $A^* = \sum_{i=1}^{n} A_i$ неравномерно.

Рассматривая связь между внутренними усилиями и напряжениями σ_z при чистом изгибе, получим:

$$
\begin{aligned}
N &= \int_{A_1} \sigma_z^{(1)} dA_1 + \int_{A_2} \sigma_z^{(2)} dA_2 + \ldots + \int_{A_n} \sigma_z^{(n)} dA_n = \\
&= \int_{A_1} E_1 \frac{y}{\rho} dA_1 + \int_{A_2} E_2 \frac{y}{\rho} dA_2 + \ldots + \int_{A_n} E_n \frac{y}{\rho} dA_n = \\
&= \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y dA_1 + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y dA_2 + \ldots + \frac{E_n}{\rho} \int_{A_n} y dA_n = \\
&= \frac{E_1}{\rho} S_x^{(1)} + \frac{E_2}{\rho} S_x^{(2)} + \ldots + \frac{E_n}{\rho} S_x^{(n)} = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $S_x^{(i)} = \int_{A_i} y dA_i -$ статический момент площади $i-$го слоя поперечного сечения относительно нейтральной оси X.

На основании соотношения (2) можно найти положение нейтральной оси X многослойного поперечного сечения из уравнения:

$$
E_1 S_x^{(1)} + E_2 S_x^{(2)} + \ldots + E_n S_x^{(n)} = 0. \tag{3}
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
M_y &= \int_{A_1} \sigma_z^{(1)} x_1 dA_1 + \int_{A_2} \sigma_z^{(2)} x_2 dA_2 + \ldots + \int_{A_n} \sigma_z^{(n)} x_n dA_n = \\
&= \int_{A_1} E_1 \frac{y}{\rho} x_1 dA_1 + \int_{A_2} E_2 \frac{y}{\rho} x_2 dA_2 + \ldots + \int_{A_n} E_n \frac{y}{\rho} x_n dA_n = \\
&= \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y x_1 dA_1 + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y x_2 dA_2 + \ldots + \frac{E_n}{\rho} \int_{A_n} y x_n dA_n = \\
&= \frac{E_1}{\rho} I_{xy}^{(1)} + \frac{E_2}{\rho} I_{xy}^{(2)} + \ldots + \frac{E_n}{\rho} I_{xy}^{(n)} = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь $I_{xy}^{(i)} = \int_{A_i} y x_i dA_i -$ центробежный момент инерции площади $i-$го слоя поперечного сечения относительно осей XY;

На основании уравнения (4) можно найти положение вертикальной оси OY многослойного поперечного сечения из уравнения:

$$
E_1 I_{xy}^{(1)} + E_2 I_{xy}^{(2)} + \ldots + E_n I_{xy}^{(n)} = 0. \tag{5}
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int\limits_{A_1} \sigma_z^{(1)} y dA_1 + \int\limits_{A_2} \sigma_z^{(2)} y dA_2 + ... + \int\limits_{A_n} \sigma_z^{(n)} y dA_n = \\
&= \int\limits_{A_1} E_1 \frac{y}{\rho} y dA_1 + \int\limits_{A_2} E_2 \frac{y}{\rho} y dA_2 + ... + \int\limits_{A_n} E_n \frac{y}{\rho} y dA_n = \\
&= \frac{E_1}{\rho} \int\limits_{A_1} y^2 dA_1 + \frac{E_2}{\rho} \int\limits_{A_2} y^2 dA_2 + ... + \frac{E_n}{\rho} \int\limits_{A_n} y^2 dA_n = \\
&= \frac{E_1}{\rho} I_x^{(1)} + \frac{E_2}{\rho} I_x^{(2)} + ... + \frac{E_n}{\rho} I_x^{(n)} = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Здесь $I_x^{(i)} = \int\limits_{A_i} y^2 dA_i -$ осевой момент инерции площади $i-$го слоя поперечного сечения относительно оси X.

Из уравнения (6) определяем кривизну изогнутой оси балки:

$$
\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}}. \tag{7}
$$

Сопоставляя (7) и (1), найдём связь между внешним изгибающим моментом M_x и нормальными напряжениями $\sigma_z^{(i)}$ в поперечном сечении многослойной упругой балки со слоями, параллельными оси OY:

$$
\sigma_z^{(i)} = \frac{M_x E_i y}{E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}}. \tag{8}
$$

Следуя методике [1], рассмотрим равновесие заштрихованной части сечения (рис. 2). На неё действуют нормальные напряжения $\sigma_z^{(i)}$ слева и нормальные напряжения $\sigma_z^{(i)} + d\sigma_z^{(i)}$ справа, а также касательные напряжения τ_{yz} вдоль нижней грани.

Предположим, что касательные напряжения τ_{yz}, действующие вдоль нижней грани заштрихованной отсечённой части равномерно распределены по ширине сечения каждого слоя A_i^*.

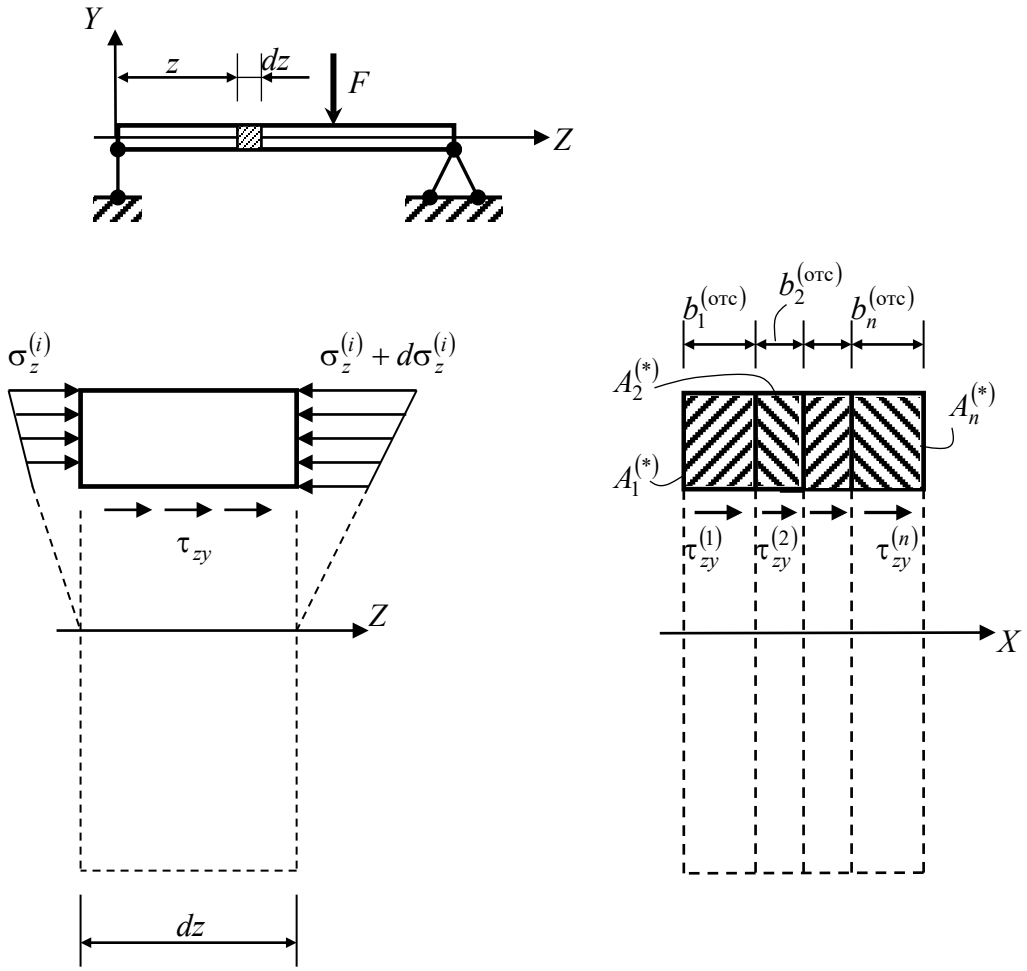


Рисунок 2 – К определению касательных

Составляя уравнение равновесия заштрихованной отсечённой части каждого слоя A_i^* в проекции на ось Z, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\sum Z_1 &= \int\limits_{A_1^*} \sigma_z^{(1)} dA_1^* - \int\limits_{A_1^*} \left(\sigma_z^{(1)} + d\sigma_z^{(1)}\right) dA_1^* + \tau_{yz}^{(1)} b_1^{(\text{отс})} dz = 0; \\
\sum Z_2 &= \int\limits_{A_2^*} \sigma_z^{(2)} dA_2^* - \int\limits_{A_2^*} \left(\sigma_z^{(2)} + d\sigma_z^{(2)}\right) dA_2^* + \tau_{yz}^{(2)} b_2^{(\text{отс})} dz = 0; \\
&\cdots \\
\sum Z_n &= \int\limits_{A_n^*} \sigma_z^{(n)} dA_n^* - \int\limits_{A_n^*} \left(\sigma_z^{(n)} + d\sigma_z^{(n)}\right) dA_n^* + \tau_{yz}^{(n)} b_n^{(\text{отс})} dz = 0.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Отсюда получаем:

$$\tau_{yz}^{(1)} = \frac{E_1 S_1^{(\text{отс})}}{\left(E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}\right) b_1^{(\text{отс})}} \frac{dM_x}{dz} = \frac{Q_y E_1 S_1^{(\text{отс})}}{\left(E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}\right) b_1^{(\text{отс})}};$$

$$\tau_{yz}^{(2)} = \frac{E_2 S_2^{(\text{отс})}}{\left(E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}\right) b_2^{(\text{отс})}} \frac{dM_x}{dz} = \frac{Q_y E_2 S_2^{(\text{отс})}}{\left(E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}\right) b_2^{(\text{отс})}};$$

. . .

$$\tau_{yz}^{(n)} = \frac{E_n S_n^{(\text{отс})}}{\left(E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}\right) b_n^{(\text{отс})}} \frac{dM_x}{dz} = \frac{Q_y E_n S_n^{(\text{отс})}}{\left(E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}\right) b_n^{(\text{отс})}}.$$

(10)

Итак, условия прочности по нормальным напряжениям в каждом слое многослойной балки со слоями, параллельными оси OY, получают вид:

$$\max \sigma_z^{(i)} = \frac{M_x^{(\max)} E_i y^{(\max)}}{E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}} \le R_\sigma^{(i)} \gamma_d . \qquad (11)$$

Условия прочности по касательным напряжениям получают вид:

$$\max \tau_{yz}^{(i)} = \frac{Q_y^{(\max)} E_i S_i^{(\text{п.с.})}}{\left(E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + ... + E_n I_x^{(n)}\right) b_i^{(\text{н.о.})}} \le R_\tau^{(i)} \gamma_d . \qquad (12)$$

Пример

В качестве примера рассмотрим трёхслойную балку, в которой

$$M_x^{(\max)} = 340 \text{ кН} \cdot \text{м};\ Q_y^{(\max)} = 1000 \text{ кН}.$$

Пусть $E_1 = 1{,}75 \cdot 10^5$ МПа; $E_2 = 2{,}00 \cdot 10^5$ МПа; $E_3 = 1{,}75 \cdot 10^5$ МПа;

$R_\sigma^{(1)} = 180$ МПа; $R_\sigma^{(1)} = 200$ МПа; $R_\sigma^{(1)} = 180$ МПа;

$R_\tau^{(1)} = 120$ МПа; $R_\tau^{(1)} = 140$ МПа; $R_\tau^{(1)} = 120$ МПа.

Далее, $h = 40$ см; $b_1 = 2$ см; $b_2 = 3$ см; $b_3 = 2$ см.

Определяем положение нейтральной линии – оси OX – используя соотношение (3):

$$E_1 S_x^{(1)} + E_2 S_x^{(2)} + E_3 S_x^{(3)} = 0. \qquad (13)$$

Пусть нейтральная линия располагается на расстоянии «а» от нижней стороны поперечного сечения. Тогда

$$S_x^{(1)} = b_1 h\left(\frac{h}{2} - a\right);\ S_x^{(2)} = b_2 h\left(\frac{h}{2} - a\right);\ S_x^{(3)} = b_3 h\left(\frac{h}{2} - a\right).$$

Решая уравнение (13), находим $a = 20$ см.

Определяем положение вертикальной оси OY используя выражение (5):

$$E_1 I_{xy}^{(1)} + E_2 I_{xy}^{(2)} + E_3 I_{xy}^{(3)} = 0.$$

Так как ось OX является горизонтальной осью симметрии каждого слоя балки, то центробежные моменты каждого слоя относительно собственных центральных осей равны нулю и равны нулю относительно осей XY. Следовательно, ось OY должна проходить через центр тяжести многослойного поперечного сечения и быть его осью симметрии.

Проверяем прочность по нормальным напряжениям (формула (11)):

$$\max \sigma_z^{(i)} = \frac{M_x^{(\max)} E_i y^{(\max)}}{E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + E_3 I_x^{(3)}} \le R_\sigma^{(i)} \gamma_d .$$

Здесь $y^{(\max)} = \frac{h}{2} = 20\text{см}$; $I_x^{(1)} = \frac{b_1 h^3}{12} = 10666{,}7\ \text{см}^4$; $I_x^{(2)} = \frac{b_2 h^3}{12} = 16000\ \text{см}^4$;

$$I_x^{(3)} = \frac{b_3 h^3}{12} = 10666{,}7\ \text{см}^4.$$

Тогда $\max \sigma_z^{(1)} = 171{,}63\ \text{МПа} < R_\sigma^{(1)} \gamma_d = 180\ \text{МПа}$;

$\max \sigma_z^{(2)} = 196{,}15\ \text{МПа} < R_\sigma^{(2)} \gamma_d = 200\ \text{МПа}$;

$\max \sigma_z^{(3)} = 171{,}63\ \text{МПа} < R_\sigma^{(3)} \gamma_d = 180\ \text{МПа}$.

Проверяем прочность по касательным напряжениям (формула (12)):

$$\max \tau_{yz}^{(i)} = \frac{Q_y^{(\max)} E_i S_i^{(\text{п.с.})}}{\left(E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + E_n I_x^{(n)}\right) b_i^{(\text{н.о.})}} \le R_\tau^{(i)} \gamma_d .$$

Здесь $b_1^{(\text{н.о.})} = b_1$; $b_2^{(\text{н.о.})} = b_2$; $b_3^{(\text{н.о.})} = b_3$. $b_1^{(\text{н.о.})} = b_1$;

$$S_1^{(\text{п.с.})} = \frac{b_1 h^2}{4} = 800\ \text{см}^3;\ S_2^{(\text{п.с.})} = \frac{b_2 h^2}{4} = 1200\ \text{см}^3;\ S_3^{(\text{п.с.})} = \frac{b_3 h^2}{4} = 800\ \text{см}^3.$$

Тогда $\max \tau_z^{(1)} = 100{,}96\ \text{МПа} < R_\tau^{(1)} \gamma_d = 120\ \text{МПа}$;

$\max \tau_z^{(2)} = 115{,}38\ \text{МПа} < R_\tau^{(2)} \gamma_d = 140\ \text{МПа}$;

$$\max \tau_z^{(3)} = 100{,}96 \text{ МПа} < R_\tau^{(3)} \gamma_d = 120 \text{ МПа}.$$

Таким образом, условия прочности и по нормальным и по касательным напряжениям выполняется.

Эпюра нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении каждого слоя балки показана на рис. 3.

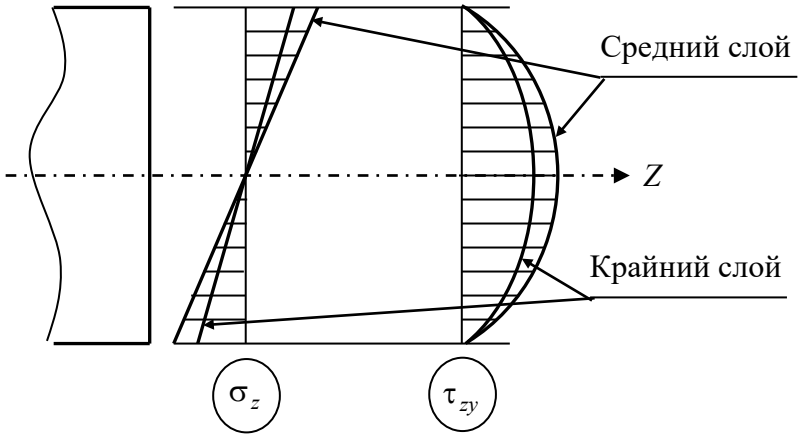


Рисунок 3 – Эпюры нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении

Выводы

1. Получены расчётные формулы для нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении каждого слоя многослойного неоднородного стержня, слои которого располагаются параллельно вертикальной оси симметрии *OY* поперечного сечения.

2. Эпюры и нормальных и касательных напряжений остаются постоянными в пределах ширины каждого слоя.

3. При переходе от одного слоя к другому вдоль ширины сечения эпюры и нормальных и касательных напряжений претерпевают конечный разрыв.

Заключение

Полученные в статье результаты могут найти применение при расчёте усилений балок с использованием накладок из материала, не совпадающего по механическим характеристикам с материалом усиливаемой балки.

Библиографический список:

1. Болотин В. Механика многослойных конструкций / М.: Машиностроение, - 1980. - 375 с.

2. Кобелев В. Расчёт трёхслойных конструкций / М.: Машиностроение, - 1984. - 304 с.

3. Горшков А., Старовойтов.Э, Ярова. А, Расчёт трёхслойных конструкций / М.: ФИЗМАТЛИТ, - 2005. - 576 с.

4. *Анарова Ш.А., Шокиров Д.А., Исмоилов Ш.М.* Современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных стержней // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2022. № 4 (42). с. 54-78.

5. *Бакушев С.В., Мирзаханов М.Р.* К вопросу о равнопрочности изгибаемых неоднородных стержней // Моделирование и механика конструкций. 2025. № 21. С. 69-81.

6. *Бакушев С.В.* Касательные напряжения в многослойном неоднородном упругом стержне // Строительная механика и конструкции. 2026. № 1 (48). С. 7-21. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.48.1.001.

7. *Бакушев С.В., Баронин С.А.* Расчёт многослойных неоднородных упругих изгибаемых балок из условия жёсткости // Региональная архитектура и строительство. 2026. № 3 (68). С. 65-72. DOI: 10.54734/20722958_2026_3_65.

8. *Ризов В.И.* Исследование расслоения неоднородных многослойных балок, толщина которых непрерывно меняется // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 1 (365). С. 55-62. DOI: 10.15372/PMTF20210106.