УДК 624.04

СИМВОЛЬНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ФОРМУЛ АРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

Шеин Александр Иванович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,

г. Пенза,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика».

Гришин Анатолий Евгеньевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,

г. Пенза,

аспирант кафедры «Механика».

Аннотация

В статье представлен метод механико-математической символьной оптимизации для автоматической генерации уравнений, в данном случае аналитических функций, определяющих армирование железобетонных балок, на основе физического и геометрического описания данных по балкам с учетом ограничений в виде уравнений состояния в форме символьного представления матриц жесткости и вектора нагрузок МКЭ. Физико-геометрическое описание разграничивает, что из себя представляет материал (железобетон) и как он устроен (расположен и армирован) в пространстве. Данная задача решается на основе конечно-элементного представления балок в виде совокупности треугольных элементов, для решения плоской задачи теории упругости, описывающих матрицу бетона, которая дополняется боковыми стержневыми элементами, образующих матрицу армирования. Приведена формула оптимального армирования балки.

Ключевые слова: железобетон; армирование; физико-геометрическое описание; символьная оптимизация; генерация формул.

SYMBOLIC GENERATION OF REINFORCED CONCRETE BEAM REINFORCEMENT FORMULAS

Shein Alexander Ivanovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Mechanics.

Grishin Anatoly Evgenievich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

post-graduate student of the Department of Mechanics.

Abstract

The article presents a method of mechanical-mathematical symbolic optimization for automatic generation of equations, in this case, analytical functions that determine the reinforcement of reinforced concrete beams, based on the physical and geometric description of data on beams, taking into account restrictions in the form of state equations in the form of a symbolic representation of stiffness matrices and FEM load vector. The physical and geometric description delimits what the material (reinforced concrete) is and how it is arranged (located and reinforced) in space. This problem is solved on the basis of a finite element representation of beams in the form of a set of triangular elements, in order to solve the flat problem of the theory of elasticity describing the concrete matrix, which is complemented by side rod elements forming the reinforcement matrix. The formula for the optimal reinforcement of a beam is presented.

Keywords: reinforced concrete; reinforcement; physical and geometric description; symbolic optimization; formula generation

В строительстве широко используется железобетон – композиционный строительный материал, где бетон и стальная арматура работают вместе как единый механизм. Бетон (матрица) хорошо выдерживает сжатие, но слаб при растяжении. Сталь же, наоборот, прекрасно справляется с растягивающими и изгибающими нагрузками, тем самым усиливая бетон там, где он наиболее

уязвим. В работах [1-5] рассматривались различные подходы к оптимизации армирования железобетонных конструкций. Вопросы символьной оптимизации армирования затрагивались в [6-8]. В данной работе ставится задача разработки метода механико-математической символьной оптимизации для автоматической генерации уравнений, в данном случае аналитических функций, определяющих армирование железобетонных балок, на основе физического и геометрического описания данных по балкам с учетом ограничений в виде уравнений состояния в форме символьного представления матриц жесткости и вектора нагрузок МКЭ.

Символьная оптимизация в построении искомых железобетонных элементов представляет собой набор приёмов, которые позволяют эффективно сформировать физическую модель конструкции. Суть в том, что вместо того, чтобы запускать программу расчета на конкретных численных входных данных, в неё подставляют «символы» — переменные, которые представляют все возможные значения. В точках ветвления (условные операторы) строятся булевы формулы, описывающие ограничения на эти символы. Проблема в том, что при сложных много узловых конечно-элементных математических моделях число таких путей может расти очень быстро («path explosion»). Поэтому на практике строя символьную оптимизацию физико-геометрической модели железобетонной конструкции приходится применять различные вспомогательные приемы: упрощать исходные формулы (убирать избыточные условия, применять тождественные преобразования), сужать интервалы возможных значений символьных переменных, чтобы сократить базу для проверок решателя (например, SMT-решателя (Satisfiability Modulo Theories — выполнимость формул в теориях)), и кэшируют результаты, чтобы не пересчитывать то, что уже известно. Всё это в сумме ускоряет анализ путей выполнения и поиск ошибок.

Модернизацию МКЭ для последующего описания железобетона произведем таким образом, чтобы можно было решать задачи расчета композитных систем. При этом, конечные элементы будем формировать путем разработки специальных композитных элементов, описывающих совместную

работу бетона и арматуры. Для плоской задачи теории упругости такой конечный элемент можно получить наложением стержневого конечного элемента на одну из сторон треугольного конечного элемента плоской задачи (рис.1). Здесь стержневой элемент будет иметь характеристики арматуры, а плоский треугольный элемент будет описывать бетонное тело.

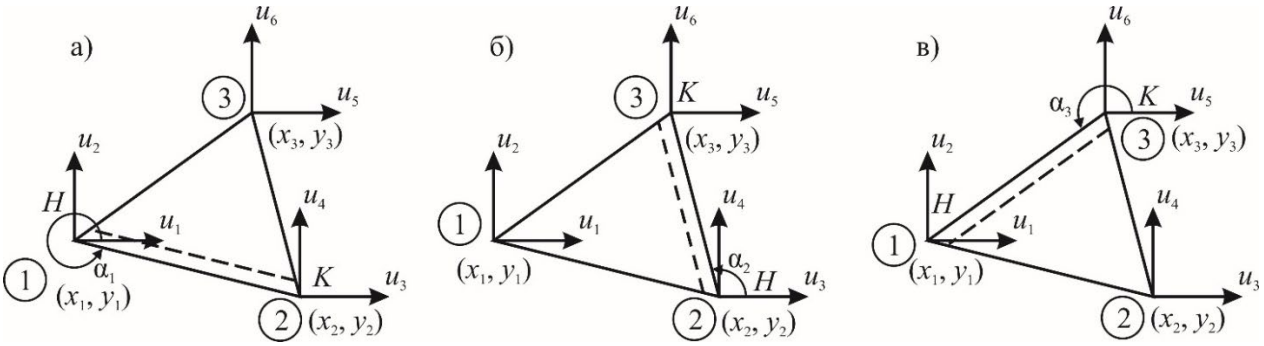


Рисунок 1 – Композитный конечный элемент для решения плоской задачи для композита – треугольник описывает бетонное тело, стержень (пунктир) описывает арматуру

Задача оптимизации арматуры композита имеет вид:

$$min\ \Sigma A_{si} l_i \qquad (1)$$

при $$K(A_{si})U=P, \qquad (2)$$

$$U_{max} \geq U \geq U_{min}. \qquad (3)$$

Здесь, A_{si} – искомые площади поперечных сечений элементов арматурного каркаса; l_i – длины этих арматурных стержней; $K(A_{si})$ – матрица жесткости железобетона, зависящая от символьно заданных параметров бетона и искомых параметров арматуры; U – неизвестный вектор узловых перемещений композита; U_{max} - вектор максимальных перемещений, подсчитанный при заданном минимальном армировании композита; U_{min} - вектор минимальных перемещений, подсчитанный при заданном максимальном армировании композита; P – заданный вектор узловых нагрузок. Возможность символьных операций с матрицами и матричного представления ограничений создает предпосылки к решению сложных оптимизационных задач относительно композитов.

В данной работе не вводились ограничения на размеры трещин и глубину их проникновения. В связи с этим размеры поперечных сечений наклонных арматурных стержней и сечения горизонтальной арматуры определены без учета этих ограничений. Основное внимание обращалось на построение работоспособного алгоритма по построению формул физико-геометрического представления конструкции, возможности математического пакета Matlab и выводе аналитических функций, определяющих армирование железобетонных балок.

Для решения задачи была выбрана расчетная схема в виде балки на двух опорах (рисунок 2). Были приняты физико-механические характеристики материалов: модуль упругости бетона $E_b = 2 \cdot 10^{10}$ Па; модуль упругости стали $E_s = 2 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона бетона $\nu = 0{,}2$.

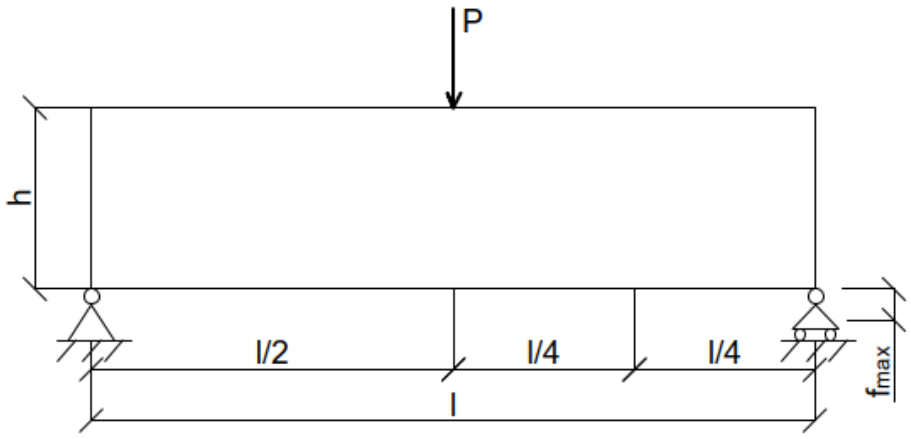


Рисунок 2 – Расчетная схема балки на двух опорах с символьными исходными данными

В результате разбиения конструкции на конечные элементы были получены 8 композитных треугольных элементов (рисунок 3).

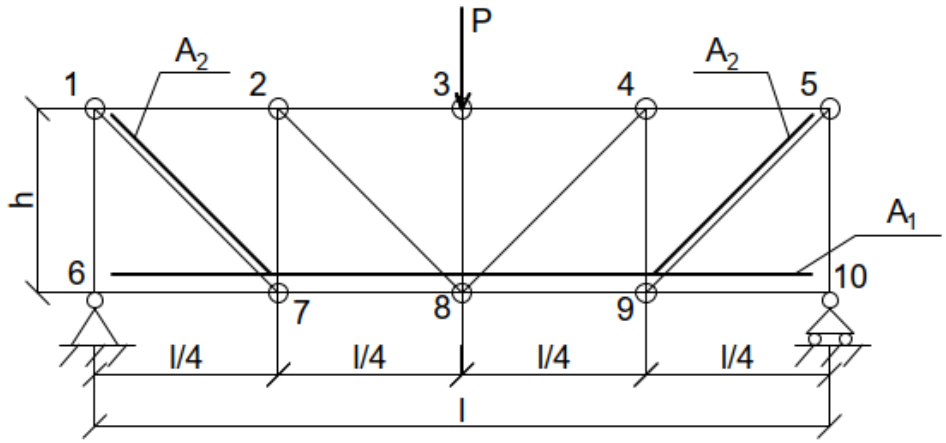


Рисунок 3 – Сетка разбиения конструкции на конечные элементы с указанием неизвестных площадей арматурных стержней

В результате аналитического решения системы уравнений упругого деформирования и интеграции критерия равнопрочности стержней с помощью математического пакета Matlab получены формулы площадей арматуры и минимального объема стали для конструкции в следующем виде:

$$A_1 = \frac{6.8815 \cdot 10^{-12} \cdot l \cdot \left(\frac{P}{f_{max}} - 1.9603 \cdot 10^{11} \cdot \frac{t \cdot h^3}{l^3}\right) \cdot (16 \cdot h^2 + l^2)^2}{100 \cdot h^4 + 14.0790 \cdot h^2 \cdot l^2 + 0.3906 \cdot l^4}; \quad (4)$$

$$A_2 = \frac{3.6962 \cdot 10^{-12} \cdot l^2 \cdot \left(\frac{P}{f_{max}} - 1.9603 \cdot 10^{11} \cdot \frac{t \cdot h^3}{l^3}\right) \cdot (16 \cdot h^2 + l^2)^{3/2}}{100 \cdot h^4 + 14.0790 \cdot h^2 \cdot l^2 + 0.3906 \cdot l^4}; \quad (5)$$

$$V_{min} = \frac{8.7295 \cdot 10^{-12} \cdot l^2 \cdot \left(\frac{P}{f_{max}} - 1.9603 \cdot 10^{11} \cdot \frac{t \cdot h^3}{l^3}\right) \cdot (16 \cdot h^2 + l^2)^2}{100 \cdot h^4 + 14.0790 \cdot h^2 \cdot l^2 + 0.3906 \cdot l^4}; \quad (6)$$

Таким образом, на основе полученных аналитических зависимостей сделан вывод о том, что присутствующий в числителе всех формул (4-6) функциональный бином, связывающий параметры внешней нагрузки и предельного прогиба, отражает распределение усилий в системе. Слагаемое с параметрами h (высота) и t (толщина) количественно описывает вклад собственной жесткости бетонной конструкции. С увеличением этих параметров бетон забирает на себя больше нагрузки, что пропорционально снижает требуемую площадь арматурных стержней и общий объем стали.

По выведенным формулам (4-6) были вычислены результаты требуемого армирования конструкции в зависимости от принятых исходных данных согласно схемам по рисункам 2 и 3. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Требуемое армирование балки

№ примера	P, Н	f_{max}, м	t, м	h, м	l, м	A_1, $см^2$	A_2, $см^2$	V_{min}, $см^3$
1	15000	0,001	0,15	0,4	3,0	-27,70	-13,13	-10542
2	15000	0,001	0,15	0,4	6,0	6,54	3,40	4980
3	15000	0,001	0,15	0,3	3,0	-7,39	-3,69	-2813
4	15000	0,001	0,15	0,3	6,0	11,86	6,25	9027
5	15000	0,001	0,10	0,4	3,0	-15,94	-7,55	-6065
6	15000	0,001	0,10	0,4	6,0	9,57	4,96	7281
7	40000	0,001	0,15	0,4	3,0	-15,04	-7,13	-5724
8	40000	0,001	0,15	0,4	6,0	32,56	16,90	24784

Анализ полученных численных результатов требуемого армирования, приведенных в таблице 1, позволяет сделать следующие выводы:

1). Для коротких пролетов расчетные значения площадей армирования принимают отрицательные значения, что физически указывает на отсутствие необходимости включения стальных стержней. Это, в частности, обусловлено симметричной диаграммой работы бетона, примененной для матрицы жесткости бетона. Изгибной жесткости бетона достаточно для восприятия данной нагрузки.

2). Из-за увеличения пролета в два раза при неизменных других параметрах резко возрастает необходимость добавления армирования. Это обусловлено тем, что изгибная жесткость сплошного бетонного пролета падает обратно пропорционально изменению куба его длины.

3). Характер распределения усилий: в примерах с большим пролетом строго соблюдается соотношение площадей продольного нижнего и наклонного армирования ($A_1/A_2 = 1,92$). Стержни работают на одинаковом уровне расчетных напряжений, что обеспечивает минимальную металлоемкость системы.

Библиографический список:

1. Бондаренко В. М. Вопросы энергетической оптимизации железобетонных конструкций при динамическом нагружении // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2015. №5.

2. Краковский М., Оптимизация армирования железобетонных плит, [Электронный ресурс]. URL: https://yandex.ru/search/?clid= 2186620&text= Краковский М%2С Оптимизация армирования железобетонных плит%2С Электронный ресурс%2С Опубликовано%3А 20 окт.

3. Мироненко, И. В. Анализ сходимости эволюционной оптимизации железобетонных конструкций [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. 2011. №4.

4. Серпик И.Н., Мироненко И.В., Алгоритм оптимизации плоских железобетонных рам [Текст] // Бетон и железобетон. 2011. №4. С. 17-21.

5. Серпик И.Н., Мироненко И.В. Алгоритм оптимизации железобетонных рам с учетом многовариантности нагружения [Текст] // Строительство и реконструкция. 2012. №1(39). С. 33-39.

6. Шеин А.И., Земцова О.Г. Оптимизация строительных конструкций. Основы теории и примеры расчета. Учебное пособие. Пенза: ПГУАС, 2014. 123 с.

7. Шеин А.И., Земцова О.Г., Азимова Я.А. Расчёт и оптимизация арматуры композитных систем методом конечных элементов [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №6. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/ Plone/nomerazhurnala /no6/stroitelnaya-mehanika/6.2/at_download/file

8. Шеин А.И., Азимова А.Я. Практическая оптимизация фиброармированных балок [Электронный ресурс]

// Моделирование и механика конструкций. 2021. №14. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no14/stroitelnye-konstrukcii-zdaniya-i-sooruzheniya /14.7/at_download/file