

УДК 539.3/.6

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛНОЙ ФОРМУЛЫ МОРА

Бакушев Сергей Васильевич

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Мельников Ярослав Артёмович

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

студент.

Аннотация

Рассматривается расчёт статически неопределимой рамы методом сил с использованием полной формулы Мора для определения перемещений по направлению лишних связей, то есть с учётом поперечных и продольных сил в элементах рамы. Механические характеристики материалов элементов рамы (модуль упругости и коэффициент Пуассона), а также размеры поперечных сечений элементов рамы принимаются разными. Показано, что влиянием поперечных и продольных сил в элементах рамы при вычислении коэффициентов и правых частей системы канонических уравнений метода сил можно пренебречь даже в том случае, если элементы рамы имеют не только разные геометрические размеры, но и выполнены из разных материалов.

Ключевые слова: рама, метод сил, поперечные силы, продольные силы.

CALCULATION OF STATICALLY INDETERMINATE FRAMES BY THE FORCE METHOD USING THE FULL MOHR FORMULA

Bakushev Sergey Vasilevish

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Technical Sciences, Professor, chair "Mechanics".

Melnikov Yaroslav Artemovich

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
student.*

Abstract

The calculation of a statically indefinable frame by the force method using the full Mohr formula is considered to determine the displacements in the direction of excess braces, that is, taking into account the transverse and longitudinal forces in the frame elements. The mechanical characteristics of the materials of the frame elements (modulus of elasticity and Poisson's ratio), as well as the cross-sectional dimensions of the frame elements, are taken to be different. It is shown that the influence of transverse and longitudinal forces in the frame elements when calculating the coefficients and right sides of the system of canonical equations of the force method can be neglected even if the frame elements have not only different geometric dimensions, but are also made of different materials.

Keywords: frame, force method, shear forces, longitudinal forces.

Введение

Одним из наиболее универсальных и признанных методов расчёта статически неопределимых стержневых систем является метод сил. Метод сил теоретически выверен, всесторонне опробован, подтверждён и верифицирован. Несмотря на это в открытой печати продолжают публиковаться статьи, посвящённые расчёту статически неопределимых стержневых систем методом сил. Так, в работе [1] при расчёте статически неопределимых рам методом сил даны рекомендации для выбора оптимальной основной системы по критерию трудоёмкости и точности расчётов. В статье [2] показано применение метода сил для расчета систем с односторонними связями при моделировании осадки/выпучивания дискретных односторонних опор. В работах [3, 4]

приложенных по направлению лишних связей; M_p – грузовая эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе метода сил от внешней нагрузки.

После определения лишних неизвестных, то есть после решения системы канонических уравнений (1), выполняется построение окончательной эпюры моментов, на основании которой строятся окончательные эпюры поперечных и продольных сил в элементах статически неопределимой рамы.

Вместе с тем, элементы рамы испытывают не только изгиб, но и осевое растяжение-сжатие, а также сдвиг и, следовательно, воспринимают не только изгибающий момент, но также и поперечную, и продольную силы. Но при учёте поперечной и продольной сил в элементах рамы коэффициенты и свободные члены (2) в системе канонических уравнений (1) должны также вычисляться с учётом и поперечных и продольных сил:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum \int \frac{M_i M_j}{EI} dz + \sum k \int \frac{Q_i Q_j}{GA} dz + \sum \int \frac{N_i N_j}{EA} dz; \\ \Delta_{jp} &= \sum \int \frac{M_j M_p}{EI} dz + \sum k \int \frac{Q_j Q_p}{GA} dz + \sum \int \frac{N_j N_p}{EA} dz. \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (3) $M_i, M_j, Q_i, Q_j, N_i, N_j$ – это единичные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, построенные в основной системе метода сил от единичных воздействий, приложенных по направлению лишних связей; M_p, Q_p, N_p – грузовые эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, построенные в основной системе метода сил от внешней нагрузки; k – коэффициент формы поперечного сечения элемента рамы.

На численном примере покажем, что влиянием продольных и поперечных сил при вычислении коэффициентов и правых частей системы канонических уравнений метода сил можно пренебречь, даже в том случае, когда элементы рамы имеют не только разные геометрические размеры, но и разные механические характеристики.

Пример расчёта

Рассмотрим один раз статически неопределимую П-образную раму, нагруженную, для упрощения, четырьмя сосредоточенными силами F_1, F_2, F_3, F_4 (рис. 1, а). Все элементы рамы имеют различные механические характеристики $- E_i, G_i; i = 1, 2, 3$; а также геометрические параметры $- A_i, I_i; i = 1, 2, 3$.

Основная системы показана на рис. 1, б.

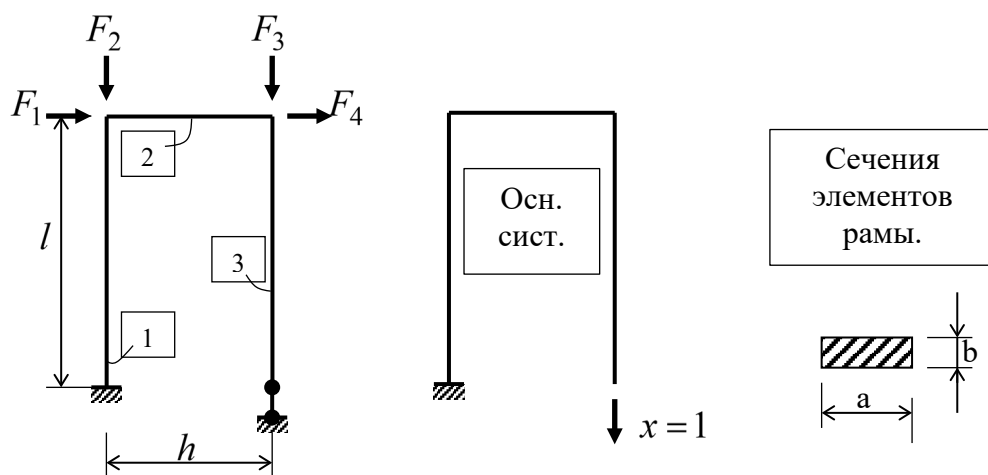


Рисунок 1 – Расчётная схема рамы

Расчёт рамы методом сил будем выполнять с учётом поперечных и продольных сил в элементах рамы, то есть коэффициенты системы канонических уравнений будем подсчитывать по формулам (3). Строим грузовые и единичные эпюры, показанные на рис. 2.

Поскольку рама один раз статически неопределима, система канонических уравнений (1) сводится к одному уравнению:

$$\delta_{11}x + \Delta_{1p} = 0, \quad (4)$$

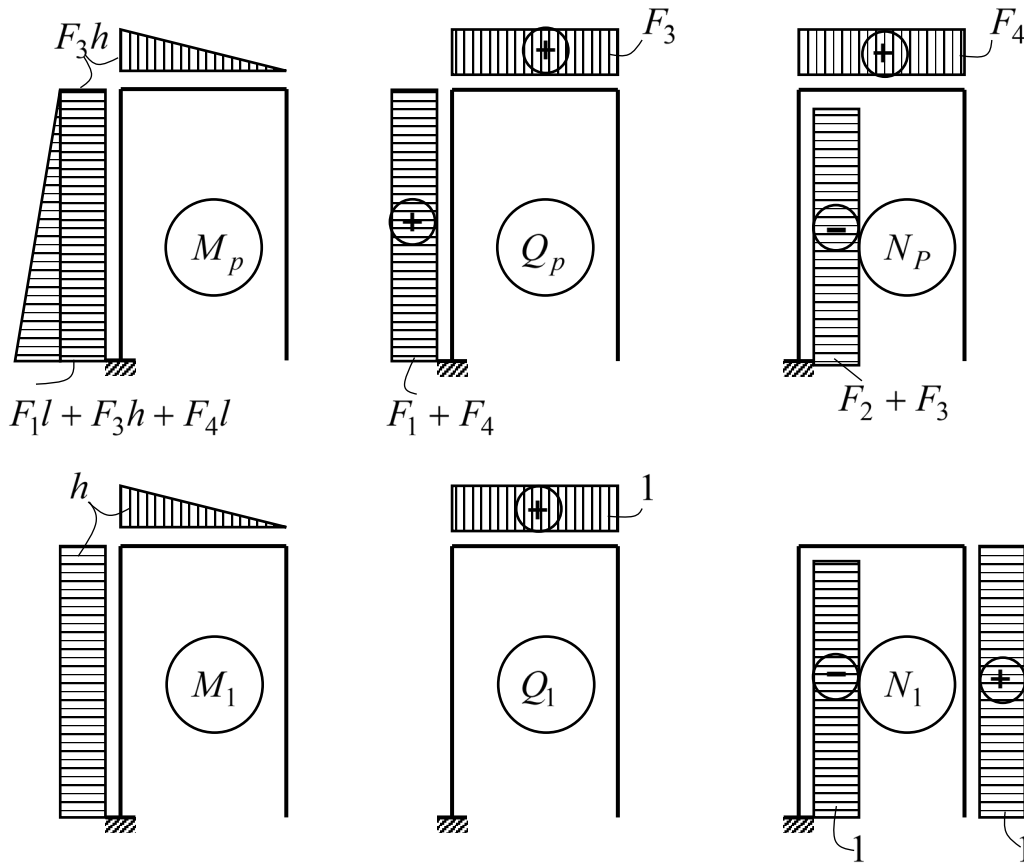


Рисунок 2 – Грузовые и единичные эпюры

Здесь, в соответствии с рис. 2,

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{M_i M_i}{E_i I_i} dz + \sum_{i=1}^3 k_i \int \frac{Q_i Q_i}{G_i A_i} dz + \sum_{i=1}^3 \int \frac{N_i N_i}{E_i A_i} dz = \\ &= \left[\frac{1}{E_i I_i} (h l h) + \frac{1}{E_2 I_2} \left(\frac{1}{2} h h \frac{2}{3} h \right) \right] + \left[k_2 \frac{1}{G_2 A_2} (1 \cdot h \cdot 1) \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{E_1 A_1} (1 \cdot l \cdot 1) + \frac{1}{E_3 A_3} (1 \cdot l \cdot 1) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{1p} &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{M_{ip} M_i}{E_i I_i} dz + \sum_{i=1}^3 k_i \int \frac{Q_{ip} Q_i}{G_i A_i} dz + \sum_{i=1}^3 \int \frac{N_{ip} N_i}{E_i A_i} dz = \\
&= \left[\frac{1}{E_i I_i} \left(F_3 h l h + \frac{1}{2} (F_3 l + F_3 l) h^2 \right) + \frac{1}{E_2 I_2} \left(\frac{1}{2} F_3 h h \frac{2}{3} h \right) \right] + \\
&+ \left[k_2 \frac{1}{G_2 A_2} (F_3 h \cdot 1) \right] + \left[\frac{1}{E_1 A_1} (F_2 + F_3) l \cdot 1 \right].
\end{aligned} \tag{5}$$

В каждой из приведённых выше формулах (5) первая квадратная скобка вычисляет соответствующее перемещение только от изгибающего момента, вторая квадратная скобка вычисляет соответствующее перемещение только от продольной силы, третья квадратная скобка вычисляет соответствующее перемещение только от поперечной силы.

Решаем уравнение (4):

$$x = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}. \tag{6}$$

Вычисляем ординаты окончательных эпюр моментов, поперечных и продольных сил в намеченных характерных сечениях $s=1, 2, 3, 4, 5, 6$ исходной статически неопределимой рамы (рис. 3):

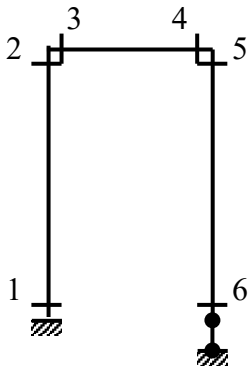


Рисунок 3 – Характерные сечения рамы

$$\begin{aligned}
M_{ok}^{(s)} &= M_p^{(s)} + M_1^{(s)} x; \\
Q_{ok}^{(s)} &= Q_p^{(s)} + Q_1^{(s)} x; \\
N_{ok}^{(s)} &= N_p^{(s)} + N_1^{(s)} x.
\end{aligned} \tag{7}$$

В формулах (7):

$$\begin{aligned}
M_{ok}^{(1)} &= (F_1 l + F_3 h + F_4 l) + hx; & Q_{ok}^{(1)} &= F_1 + F_4; & N_{ok}^{(1)} &= -(F_2 + F_3) - 1 \cdot x; \\
M_{ok}^{(2)} &= F_3 h + hx; & Q_{ok}^{(2)} &= F_1 + F_4; & N_{ok}^{(2)} &= -(F_2 + F_3) - 1 \cdot x; \\
M_{ok}^{(3)} &= F_3 h + hx; & Q_{ok}^{(3)} &= F_3 + 1 \cdot x; & N_{ok}^{(3)} &= F_4; \\
M_{ok}^{(4)} &= 0; & Q_{ok}^{(4)} &= F_3 + 1 \cdot x; & N_{ok}^{(4)} &= F_4; \\
M_{ok}^{(5)} &= 0; & Q_{ok}^{(5)} &= 0; & N_{ok}^{(5)} &= 0 + 1 \cdot x; \\
M_{ok}^{(6)} &= 0; & Q_{ok}^{(6)} &= 0; & N_{ok}^{(6)} &= 0 + 1 \cdot x.
\end{aligned}$$

Результаты расчёта

Исходные данные для элементов рамы, приведённой на рис. 1, а, с поперечными сечениями в стойках и ригеле в форме прямоугольников, приведены в табл. 1:

Таблица 1- Исходные данные для элементов рамы

| Нагрузка $F_i, кН$ | Элемент рамы | Модуль упругости $E_i, МПа$ | Коэффициент Пуассона μ_i | Ширина сечения $a, см$ | Высота сечения $b, см$ | Габариты рамы $h, м; l, м$ |
|-----------------------|------------------|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------------|
| $F_1 = 0,1$ | Левая стойка | $E_1 = 2 \cdot 10^5$ | $\mu_1 = 0,26$ | $a_1 = 10$ | $b_1 = 3$ | $h = 4$ |
| $F_2 = 0,2$ | Ригель | $E_2 = 0,69 \cdot 10^5$ | $\mu_2 = 0,34$ | $a_2 = 5$ | $b_2 = 2$ | $l = 3$ |
| $F_3 = 0,2$ | Правая стойка | $E_3 = 2 \cdot 10^5$ | $\mu_3 = 0,26$ | $a_3 = 10$ | $b_3 = 3$ | |
| $F_4 = 0,1$ | | | | | | |

Вычисляем:

$$I_1 = \frac{a_1 b_1^3}{12} = 22,50 см^4; \quad G_1 = \frac{E_1}{1(1 + \mu_1)} = 793,65 МПа; \quad A_1 = a_1 b_1 = 30 см^2;$$

$$I_2 = \frac{a_2 b_2^3}{12} = 3,33 см^4; \quad G_2 = \frac{E_2}{1(1 + \mu_2)} = 257,46 МПа; \quad A_2 = a_2 b_2 = 10 см^2;$$

$$I_3 = \frac{a_3 b_3^3}{12} = 22,50 см^4; \quad G_3 = \frac{E_3}{1(1 + \mu_3)} = 793,65 МПа; \quad A_3 = a_3 b_3 = 30 см^2.$$

Для прямоугольных сечений элементов рамы $k_1 = k_2 = k_3 = 1,2$.

Следовательно,

$$\delta_{11} = [1034,20290] + [0,01864] + [0,00100] = 1034,22254;$$

$$\Delta_{1p} = [32,00041] + [0,00373] + [2,00000 \cdot 10^{-7}] = 32,00434 \text{ см.}$$

Значит, $x = -0,03095$.

Ординаты окончательных эпюр моментов, поперечных и продольных сил в намеченных характерных сечениях $s=1, 2, 3, 4, 5, 6$ исходной статически неопределимой рамы (рис. 3) равны:

$$\begin{array}{lll} M_{ok}^{(1)} = 127,62187 \text{ кН} \cdot \text{см}; & Q_{ok}^{(1)} = 0,2 \text{ кН}; & N_{ok}^{(1)} = -0,36905 \text{ кН}; \\ M_{ok}^{(2)} = 67,62187 \text{ кН} \cdot \text{см}; & Q_{ok}^{(2)} = 0,2 \text{ кН}; & N_{ok}^{(2)} = -0,36905 \text{ кН}; \\ M_{ok}^{(3)} = 67,62187 \text{ кН} \cdot \text{см}; & Q_{ok}^{(3)} = 0,16905 \text{ кН}; & N_{ok}^{(3)} = 0,100 \text{ кН}; \\ M_{ok}^{(4)} = 0; & Q_{ok}^{(4)} = 0,16905 \text{ кН}; & N_{ok}^{(4)} = 0,100 \text{ кН}; \\ M_{ok}^{(5)} = 0; & Q_{ok}^{(5)} = 0; & N_{ok}^{(5)} = -0,03095 \text{ кН}; \\ M_{ok}^{(6)} = 0; & Q_{ok}^{(6)} = 0; & N_{ok}^{(6)} = -0,03095 \text{ кН}. \end{array}$$

На рис. 4 показаны окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных сил, и продольных сил.

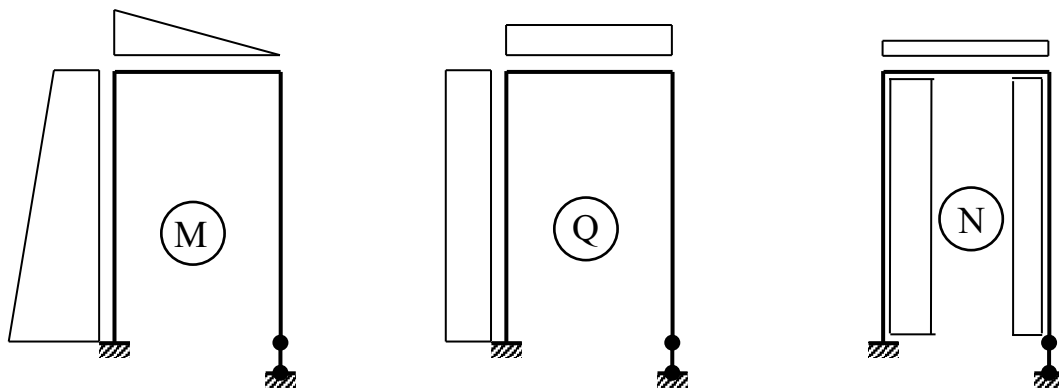


Рисунок 4 – Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил

Вычислим ординаты окончательных эпюр моментов, поперечных и продольных сил, построенные без учёта поперечных и продольных сил при определении перемещений, то есть по окончательной эпюре моментов.

При этом, $\delta_{11} = 1034,20290$; $\Delta_{1p} = 32,00041$ см, то есть $x = -0,03094$.

Ординаты окончательной эпюры моментов в намеченных характерных сечениях $s=1, 2, 3, 4, 5, 6$ исходной статически неопределимой рамы (рис. 3) будут равны:

$$M_{ок}^{(1)} = (F_1 l + F_3 h + F_4 l) + hx = 127,62316 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$M_{ок}^{(2)} = F_3 h + hx = 67,62316 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$M_{ок}^{(3)} = F_3 h + hx = 67,62316 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$M_{ок}^{(4)} = 0; \quad M_{ок}^{(5)} = 0; \quad M_{ок}^{(6)} = 0.$$

Следовательно, эпюра «М» будет иметь вид, показанный на рис. 4. Тогда ординаты окончательной эпюры «Q», вычисленные по окончательной эпюре моментов, будут равны:

$$Q_{ок}^{(1)} = \frac{|M_{ок}^{(2)} - M_{ок}^{(1)}|}{l} = \frac{|67,62316 - 127,62316|}{300} = 0,2 \text{ кН}; \quad Q_{ок}^{(2)} = Q_{ок}^{(1)}$$

$$Q_{ок}^{(3)} = \frac{|M_{ок}^{(4)} - M_{ок}^{(3)}|}{h} = \frac{|0 - 67,62316|}{400} = 0,16906 \text{ кН}; \quad Q_{ок}^{(4)} = Q_{ок}^{(3)};$$

$$Q_{ок}^{(5)} = 0; \quad Q_{ок}^{(6)} = 0.$$

Рассматривая равновесие жёстких узлов, определяем ординаты окончательной эпюры «N» (рис. 5).

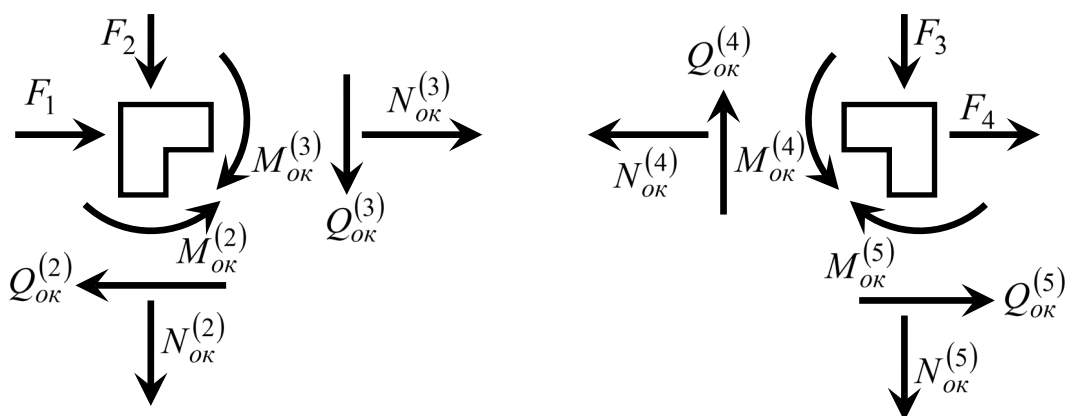


Рисунок 5 – Равновесие жёстких узлов

Из рис. 5 следует:

$$N_{ок}^{(2)} = N_{ок}^{(1)} = -F_2 - Q_{ок}^{(3)} = -0,2 - 0,16906 = -0,36906 \text{ кН};$$

$$N_{ок}^{(3)} = -F_1 + Q_{ок}^{(2)} = -0,1 + 0,2 = 0,1 \text{ кН};$$

$$N_{ок}^{(4)} = F_4 + Q_{ок}^{(5)} = 0,1 + 0 = 0,1 \text{ кН};$$

$$N_{ок}^{(5)} = N_{ок}^{(6)} = -F_3 + Q_{ок}^{(4)} = -0,2 + 0,16906 = -0,03094 \text{ кН}.$$

Выводы

1. Влияние поперечных и продольных сил при вычислении коэффициентов и правых частей в системе канонических уравнений метода сил весьма мало и им можно пренебречь.

2. Результаты численного анализа при расчёте и построении эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в статически неопределимых рамах методом сил с учётом и без учёта продольных и поперечных сил показывают их совпадение вплоть до четвёртого знака после запятой.

Заключение

При вычислении коэффициентов и правых частей системы канонических уравнений метода сил нет необходимости учитывать поперечные и продольные силы в формулах Мора.

Библиографический список:

1. Тихий И.И., Зуев М.В. Выбор основной системы при расчете статически неопределимых рам // Молодая наука Сибири. 2021. № 2 (12). С. 408-416.

2. Ван Н.Х., Ловцов А.Д. Моделирование выпучивания (просадки) дискретных односторонних опор балок методом сил // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса. 2014. № 1. С. 310-315.

3. Старегородцева Д.С., Козлова Н.Ю., Иванов О.Г. Регулирование перемещений в статически неопределимой системе изменением жесткости элементов // Научному прогрессу – творчество молодых. 2022. № 1. С. 85-86.

4. Микакова Д.Е., Иванова А.С., Иванов С.П. О перераспределении усилий и перемещений в статически неопределимых конструкциях в зависимости от изменения жесткости элементов // Научному прогрессу – творчество молодых. 2020. № 1. С. 114-117.

5. Алферов И.В., Эйдук А.Б. Влияние сдвиговых и продольных деформаций на расчет статически неопределимой рамы: сравнение метода сил и метода конечных элементов // Научный Альманах ассоциации France-Kazakhstan. 2025. № 2. С. 192-198.

6. Алферов И.В., Эйдук А.Б. Сравнение метода сил и метода конечных элементов при расчете рам с учетом сдвиговых и продольных деформаций // Инновации и инвестиции. 2025. № 3. С. 457-459.

7. Алферов И.В., Лосенков М.А., Прокопов М.В., Холуянов А.А. Определение изгибающего момента в статически неопределимых рамах с учетом и без учета сдвиговых и продольных деформаций. Научный альманах ассоциации France-Kazakhstan, № 3. Булонь, 2024. - С. 227-232.

8. Алферов И.В., Мирзоев М.А., Зиновьев О.В. Определение линейных перемещений в раме с учетом и без учета продольных и поперечных деформаций. Научный журнал "Инновации. Наука. Образование", № 73. М.: 2023. - С. 44-51.

9. Александров А. В., Державин Б. П., Потапов В. Д. Сопротивление материалов. Учебник для вузов. - 7-е изд., испр. - М.: Высш. шк., 2009. - с. 245-252, с. 256-264.