

УДК 004.42:004.942

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННОГО Z- ОБРАЗНОГО СТЕРЖНЯ С ЗАКРУГЛЕНИЕМ И С УСИЛЕННОЙ НАРУЖНОЙ ОТБОРТОВКОЙ

Волков Владимир Павлович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Боронина Анастасия Викторовна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Максяшева Арина Михайловна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Статья посвящена определению геометрических характеристик гнутого тонкостенного стержня Z-образного профиля с закруглением и с усиленной наружной отбортовкой при расчете его на растяжение и изгиб с кручением. Приведены расчетные формулы для определения относительных значений длины контура, главных осевых моментов инерции и главных осевых моментов сопротивления, главных секториальных координат.

Ключевые слова: гнутый тонкостенный стержень, Z-образный профиль, главные центральные оси сечения, главные осевые моменты инерции, главные осевые моменты сопротивления, главные секториальные координаты.

GEOMETRIC CHARACTERISTICS THIN-WALLED Z-SHAPED ROD WITH OUT EDGE

Volkov Vladimir Pavlovich,

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Candidate of Sciences, Associate Professor of the department «Mechanics».*

Boronina Anastasia Viktorovna,

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
student.*

Maksyasheva Arina Mikhailovna,

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
student.*

Abstract

Article is devoted to definition of the geometric characteristics of a buckler thin-walled rod Z-shaped profile with out edge for calculation this on tension, curve, turn. To deduce a formula of calculation dimensions length of contours, main axes moments of inertia and main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Keywords: buckler thin-walled rod, Z-shaped profile, the main central axes section, main axes moments of inertia, main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Условные обозначения (рис.1):

XU – главные центральные оси сечения; $B=2b$ – габаритная ширина срединной линии профиля сечения;

$H=2h$ – габаритная высота срединной линии профиля сечения;

$\delta \ll h, b$ – постоянная толщина срединной линии профиля сечения; δ_s

– толщина отбортовки;

L – полная длина срединной линии профиля сечения;

r – радиус закругления срединной линии профиля сечения станком;

s – длина отбортовки;

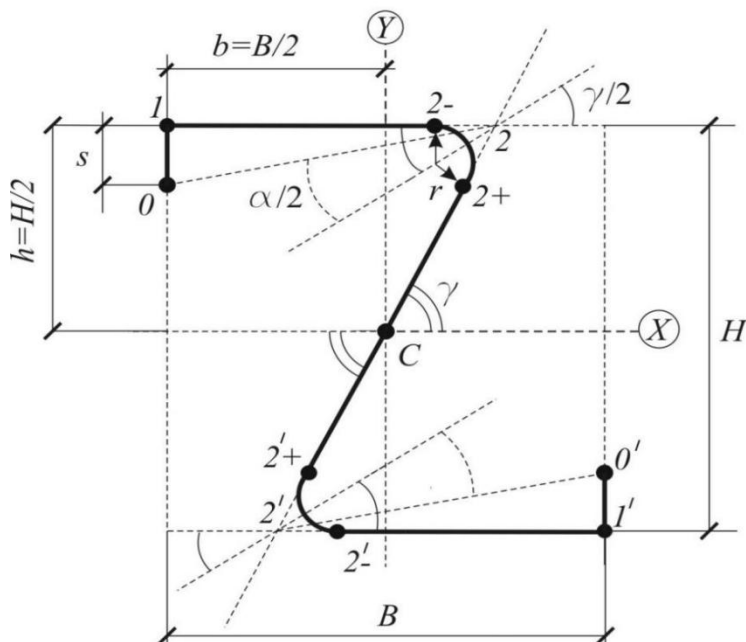
γ – угол между наклонной стенкой профиля и осью X ;

$b_h = b/h$ – относительная ширина профиля сечения;

$s_h = s/h$ – относительная длина отбортовки;

$r_h = r/h$ – относительный радиус закругления профиля сечения.

В статье рассматривается задача определения геометрических размеров и геометрических характеристик сечения гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения толщины δ с усиленной обратной отбортовкой δ_s длиной s и с закруглением r , т.е. определяется относительная ширина сечения b_h , при заданных значениях угла γ и величине r , когда одна из главных центральных осей сечения параллельна полкам.



Дано: $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$; δ ; s ;

$$0 \leq r_h \leq \frac{\cos \gamma}{1 + \cos \gamma}.$$

Найти: b_h – ?

Рисунок 1 – Z-образный профиль с обычной отбортовкой s

Случай, когда тонкостенный Z-образный стержень с полками параллельными главной центральной оси, с постоянной толщиной δ с

обратной, но не усиленной отбортовкой, s с закруглением r рассмотрен в [1].

Итак, учитывая центральную симметрию, рассмотрим верхнюю половину сечения (рис.2), причём, центр тяжести, центр изгиба или центр кручения всего сечения совпадают с центром симметрии, т.е. с точкой C (рис.1).

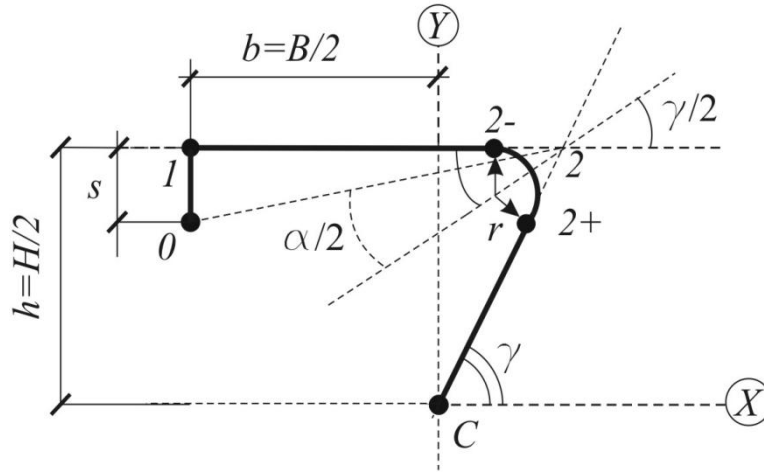


Рисунок 2 – Верхняя половина сечения с обычной отбортовкой s .

C - центр симметрии

Декартовы координаты x, y характерных точек и длины соответствующих участков l (рис. 2):

Для обратной отбортовки s :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -b, & y_0 &= h + s, & l_0 &= s; \\
 x_1 &= -b, & y_1 &= h, & l_1 &= b; \\
 x_{2-} &= \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r}{\tan^{\gamma/2}}, & y_{2-} &= h, & l_{2-} &= \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r}{\tan^{\gamma/2}}; \\
 x_{2+} &= x_{2-} + r \cdot \sin \gamma, & y_{2+} &= h - r - r \cdot \cos \gamma, & l_{2+} &= \frac{h}{\sin \gamma} - \frac{r}{\tan^{\gamma/2}}.
 \end{aligned}$$

Центральные оси XY (рис.5) являются главными [7], если

$$\begin{aligned}
 I_{XY} &= \int_0^{L/2} \delta(s) \cdot x(s) \cdot y(s) \cdot ds \Rightarrow 0, \\
 \left(\frac{\delta_s}{\delta}\right) \cdot s \cdot b \cdot \left(h + \frac{s}{2}\right) + \frac{h \cdot b^2}{2} &= \frac{l_{2-} \cdot x_{2-} \cdot y_{2-}}{2} + \frac{l_{2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} + \\
 + \int_0^{\pi-\gamma} (x_{2-} + r \cdot \sin \varphi) \cdot (h - r + r \cdot \cos \varphi) \cdot r \cdot d\varphi, \\
 \left(\frac{\delta_s}{\delta}\right) \cdot s \cdot b \cdot \left(h + \frac{s}{2}\right) + \frac{h \cdot b^2}{2} &= \frac{l_{2-} \cdot x_{2-} \cdot y_{2-}}{2} + \frac{l_{2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} +
 \end{aligned}$$

$$+r \cdot \left((x_{2-} \cdot (\pi - \gamma) + r \cdot (1 + \cos \gamma)) \cdot (h - r) + \left(x_{2-} + \frac{r \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r \cdot \sin \gamma \right),$$

где, вводя обозначения

$$x_h = \frac{x_{2-}}{h} = \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan^{\gamma/2}}, \quad \beta = \pi - \gamma,$$

относительное значение $\mathbf{b}_h > 0$ найдем из решения квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_h^2 + \mathbf{b}_h \cdot \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot s_h \cdot (2 + s_h) - \\ & - x_h^2 - \frac{2}{3} \cdot (x_h + r_h \cdot \sin \gamma) \cdot (1 - r_h \cdot (1 + \cos \gamma)) \cdot \left(\frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\tan^{\gamma/2}} \right) - \\ & - 2 \cdot r_h \cdot \left((x_h \cdot \beta + r_h \cdot (1 + \cos \gamma)) \cdot (1 - r_h) + \left(x_h + \frac{r_h \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r_h \cdot \sin \gamma \right) = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

Введем обозначения для относительных координат точек и относительных длин участков:

$$x_{0h} = -\mathbf{b}_h, \quad y_{0h} = 1 + s_h, \quad l_{01h} = s_h;$$

$$x_{1h} = -\mathbf{b}_h, \quad y_{1h} = 1, \quad l_{12-h} \Rightarrow \mathbf{b}_h + \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan^{\gamma/2}}.$$

$$x_{2+h} = x_h + r_h \cdot \sin \gamma, \quad y_{2+h} = 1 - r_h - r_h \cdot \cos \gamma, \quad l_{2+h} = \frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\tan^{\gamma/2}}.$$

Относительная длина контура гнутого Z-образного профиля L/H :

$$l_h = \frac{L}{H} = \frac{L/2}{h} \Rightarrow (s_h + \mathbf{b}_h + x_h) + r_h \cdot \beta + \left(\frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\tan^{\gamma/2}} \right), \quad (2)$$

где $L/2 = s + \mathbf{b} + x_{2-} + r \cdot \beta + l_{2+}$,

Относительная площадь гнутого Z-образного профиля $A/(\delta \cdot H)$:

$$\mathbf{A}_{\delta h} = \frac{A}{\delta \cdot H} = \frac{A}{2 \cdot \delta \cdot h} \Rightarrow \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot s_h + \mathbf{b}_h + x_h + r_h \cdot \beta + l_{2+h}, \quad (3)$$

где $\mathbf{A} = 2 \cdot \delta \cdot \left(\left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot s + \mathbf{b} + x_{2-} + r \cdot \beta + l_{2+} \right)$.

Главные осевые моменты инерции (рис.2) определяются по формулам:

$$I_X = \int_A y^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{L/2} \delta(s) \cdot y^2(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left\{ \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{01}}{3} \cdot (y_0^2 + y_1^2 + y_0 \cdot y_1) + l_{12-} \cdot h^2 + \frac{l_{2+}}{3} \cdot y_{2+}^2 + \right. \\ \left. + \int_0^\beta (h - r + r \cdot \cos \varphi)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right\}$$

$$I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{01h}}{3} \cdot (y_{0h}^2 + y_{1h}^2 + y_{0h} \cdot y_{1h}) + l_{12-h} + \frac{l_{2+h}}{3} \cdot y_{2+h}^2 + \\ + r_h \cdot \left[(1 - r_h)^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot (1 - r_h) \cdot \sin \gamma + r_h^2 \cdot \frac{\beta - \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right], \quad (4)$$

$$I_Y = \int_A x^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{L/2} \delta(s) \cdot x^2(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left\{ \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot l_{01} \cdot b^2 + \frac{l_{12-}}{3} \cdot (x_1^2 + x_{2-}^2 + x_1 \cdot x_{2-}) + \frac{l_{2+}}{3} \cdot x_{2+}^2 + \right. \\ \left. + \int_0^\beta (x_{2-} + r \cdot \sin \varphi)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right\}$$

$$I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot l_{01h} \cdot b_h^2 + \frac{l_{12-h}}{3} \cdot (x_{1h}^2 + x_h^2 + x_{1h} \cdot x_h) + \frac{l_{2+h}}{3} \cdot x_{2+h}^2 + \\ + r_h \cdot \left[x_h^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot x_h \cdot (1 + \cos \gamma) + r_h^2 \cdot \frac{\beta + \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right], \quad (5)$$

Главные осевые моменты сопротивления определяются по формулам:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} \Rightarrow \frac{I_x}{h},$$

$$W_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} \Rightarrow I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3}, \quad (6)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}} \Rightarrow \frac{I_y}{b},$$

$$W_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} \Rightarrow \frac{1}{b_h} \cdot I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3}, \quad (7)$$

Для нахождения главного секториального момента инерции

$I_\omega = \int_A \bar{\omega}^2(s) \cdot dA$ введем секториальные координаты ω (удвоенная площадь сектора между полюсом, начальной и текущей точками на профиле сечения стержня), где полюс и начальная точка отсчета выбраны в точке C :

$$\omega_C = 0; \quad \omega_{2+} = 0;$$

$$\omega(\varphi) = l_{2+} \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi) + r^2 \cdot (\varphi - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \beta;$$

$$\omega_{2-} = l_{2+} \cdot r \cdot (1 - \cos \beta) + r^2 \cdot (\beta - \sin \beta);$$

$$\omega_1 = \omega_{2-} + h \cdot l_{12-}; \quad \omega_0 = \omega_1 - s \cdot b.$$

Относительные секториальные координаты ω/h^2 :

$$\omega_{2-h} = l_{2+h} \cdot r_h \cdot (1 - \cos \beta) + r_h^2 \cdot (\beta - \sin \beta);$$

$$\omega_{1h} = \omega_{2-h} + l_{12-h}; \quad \omega_{0h} = \omega_{1h} - s_h \cdot b_h.$$

Секториальный статический момент:

$$S = \int_A \omega \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_0^{L/2} \delta(s) \cdot \omega(s) \cdot ds = 2 \cdot S_0 = 2 \cdot (\delta \cdot h^3) \cdot S_{0h},$$

$$S_C = 0; \quad S_{2+} = 0;$$

$$S_{2-} = \delta \cdot \int_0^\beta \omega(\varphi) \cdot r \cdot d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \cdot r^2 \cdot \left(l_{2+} \cdot (\beta - \sin \beta) + r \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} - (1 - \cos \beta) \right) \right) = (\delta \cdot h^3) \cdot S_{2-h};$$

$$S_1 = S_{2-} + \delta \cdot \frac{\omega_{1h} + \omega_{2-h}}{2} \cdot l_{12-h}; \quad S_0 = S_1 + \delta_s \cdot \frac{\omega_{1h} + \omega_{0h}}{2} \cdot s.$$

Относительные секториальные статические моменты $S/(\delta \cdot h^3)$:

$$S_{2-h} = r_h^2 \cdot \left(l_{2+h} \cdot (\beta - \sin \beta) + r_h \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} - (1 - \cos \beta) \right) \right);$$

$$S_{1h} = S_{2-h} + \frac{\omega_{1h} + \omega_{2-h}}{2} \cdot l_{12-h}; \quad S_{0h} = S_{1h} + \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot \frac{\omega_{1h} + \omega_{0h}}{2} \cdot s_h.$$

Постоянная D , определяющая главную начальную точку отсчета M_0 (рис.3),

где s_0 – расстояние от т. (2 -) до точки, где $\bar{\omega} = 0$:

$$D = \frac{S}{\int_A dA} \Rightarrow \frac{S_0}{A/2} = h^2 \cdot \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}}, \quad (8)$$

$$s_0 = \frac{D - \omega_{2-}}{h} \Rightarrow h \cdot \left(\frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} - \omega_{2-h} \right), \quad (9)$$

Главные секториальные координаты $\bar{\omega} = \omega - D$ (рис.3):

$$\bar{\omega}_C = \bar{\omega}_{2+} \Rightarrow h^2 \cdot \left(-\frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right) = -D; \quad \bar{\omega}_{2-} \Rightarrow h^2 \cdot \left(\omega_{2-h} - \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right);$$

$$\bar{\omega}_1 \Rightarrow h^2 \cdot \left(\omega_{1h} - \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right); \quad \bar{\omega}_0 \Rightarrow h^2 \cdot \left(\omega_{0h} - \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right).$$

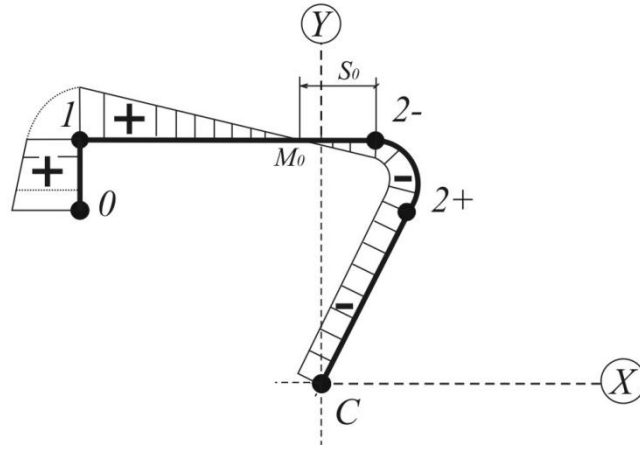


Рисунок 3 – Эпюра главных $\bar{\omega}(s)$ для профиля с обычной отбортовкой с полюсом в C и начальной точкой отсчета в M_0 .

Относительные главные секториальные координаты $\bar{\omega}/h^2$:

$$\bar{\omega}_{Ch} = \bar{\omega}_{2+h} \Rightarrow \left(-\frac{S_{0h}}{A\delta h}\right); \quad \bar{\omega}_{2-h} \Rightarrow \left(\omega_{2-h} - \frac{S_{0h}}{A\delta h}\right);$$

$$\bar{\omega}_{1h} \Rightarrow \left(\omega_{1h} - \frac{S_{0h}}{A\delta h}\right); \quad \bar{\omega}_{0h} \Rightarrow \left(\omega_{0h} - \frac{S_{0h}}{A\delta h}\right).$$

Главный секториальный момент инерции определяется по формуле:

$$\begin{aligned} I_{\omega} &= \int_A \bar{\omega}^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_0^{L/2} \bar{\omega}^2(s) \cdot ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left\{ \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{01}}{3} \cdot (\bar{\omega}_0^2 + \bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_0 \cdot \bar{\omega}_1) + \frac{l_{12-}}{3} \cdot (\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_{2-}^2 + \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_{2-}) + \right. \\ &\quad \left. + l_{2+} \cdot \bar{\omega}_{2+}^2 + \int_0^{\beta} (\omega(\varphi) - D)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right\}, \\ I_{\omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^5} &\Rightarrow \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{01h}}{3} \cdot (\bar{\omega}_{0h}^2 + \bar{\omega}_{1h}^2 + \bar{\omega}_{0h} \cdot \bar{\omega}_{1h}) + l_{2+h} \cdot \left(-\frac{S_{0h}}{A\delta h} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{l_{12-h}}{3} \cdot (\bar{\omega}_{1h}^2 + \bar{\omega}_{2-h}^2 + \bar{\omega}_{1h} \cdot \bar{\omega}_{2-h}) + \\ &\quad + r_h^3 \cdot \left(l_{2+h}^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot \beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} - 2 \cdot \sin \beta \right) + l_{2+h} \cdot r_h \cdot (\beta - \sin \beta)^2 + \right. \\ &\quad \left. + r_h^2 \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} - 2 \cdot (\sin \beta - \beta \cdot \cos \beta) \right) \right) - \\ &\quad - 2 \cdot S_{2-h} \cdot \frac{S_{0h}}{A\delta h} + r_h \cdot \beta \cdot \left(\frac{S_{0h}}{A\delta h} \right)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

После определения геометрических характеристик, по принципу независимости действия сил, полные нормальные напряжения в произвольной

точке поперечного сечения жесткого тонкостенного Z-образного стержня (с учетом знака) определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot Y(s) + \frac{M_y}{I_y} \cdot X(s) + \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \bar{\omega}(s), \quad (11)$$

где внутренние усилия:

N, M_x, M_y – соответственно продольная сила и изгибающие моменты относительно главных центральных осей, определяемые методом сечения,

B_ω – бимомент в рассматриваемом поперечном сечении, определяемый из решения дифференциального уравнения для углов закручивания при стесненном кручении тонкостенного стержня открытого профиля.

Библиографический список:

1. Волков В.П. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением и с наружной отбортовкой. [Электронный ресурс] //Моделирование и механика конструкций. 2025. №15. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no15/stroitel'naya-mechanika/geometric-harakterics-tonkostennogo-z-obraznogo-sterzhnya with out edge/at_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no15/stroitel'naya-mechanika/geometric-harakterics-tonkostennogo-z-obraznogo-sterzhnya%20with%20out%20edge/at_download/file) (дата обращения: 06.05.2025).
2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - М: Высш. шк., 1995. - 560 с.; ил.