

УДК 539.3/.6

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ ПУЧКА РАЗНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Часть 1

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Максяшева Арина Михайловна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Рассматривается внецентренное сжатие стойки, состоящей из пучка разнородных стержней, не связанных друг с другом, но работающих совместно. Сечение стержней приняты прямоугольными. Стойка опирается на жёсткую горизонтальную поверхность. Нагрузка на верхний конец стойки передаётся через жёсткую недеформированную пластину так, что пластина поворачивается, а стойка испытывает внецентренное сжатие. Определяются внутренние усилия в каждом стержне стойки, а также координаты точки приложения внешней сжимающей силы. Результаты работы могут найти применение при реконструкции и усилении внецентренно сжатых стоек.

Ключевые слова: внецентренное сжатие, разнородные стержни, внутренние усилия.

OFF-CENTER COMPRESSION BUNDLE OF HETEROGENEOUS RODS

Part 1

Bakushev Sergey Vasilevish,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Technical Sciences, Professor, chair "Mechanics".

Maksyashева Arina Mikhailovna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

The off-center compression of a rack consisting of a bundle of heterogeneous rods that are not connected to each other, but work together, is considered. The cross-section of the members is assumed to be rectangular. The rack rests on a rigid horizontal surface. The load on the upper end of the rack is transferred through a rigid undeformed plate so that the plate rotates and the rack experiences eccentric compression. The internal forces in each strut rod are determined, as well as the coordinates of the point of application of the external compressive force. The results of the work can be used in the reconstruction and reinforcement of extra-centerly compressed racks.

Keywords: out-of-center compression, heterogeneous rods, internal forces.

Введение

Колонны и стойки зданий и сооружений достаточно часто работают в условиях внецентренного сжатия. В процессе эксплуатации, в результате изменения технологических процессов, а также в следствие естественной деградации материала стоек, возникает необходимость их реконструкции, то есть усиления. Процесс усиления подразумевает, вообще говоря, установку рядом со стойкой дополнительной опоры, зачастую выполненной из другого

материала (например, усиливаемая стойка выполнена из железобетона, а дополнительная опора - металлическая). В итоге получаем разнородную стойку, состоящую из двух стержней, не связанных друг с другом, но работающих совместно. Правила усиления и реконструкции конструкций зданий и сооружений регламентируются нормами проектирования [1, 2]. Вопросы усиления железобетонных стоек и колонн рассматривались в работах [3 - 11]. В работе [12] рассматриваются современные подходы к усилению железобетонных конструкций композитными материалами. В статье [13] даётся обзор методов усиления железобетонных колонн в Китае. В работе [14] приведено сопоставление результатов испытания железобетонных колонн, усиленных металлом и композитными материалами на основе углепластика. Основное внимание уделено деформативности и жёсткости. В статье [15] рассматриваются вопросы внецентренного сжатия массивного неоднородного стержня. В работе [16] исследовано напряжённое состояние кирпичных стен, усиленных двусторонним бетонным наращиванием при местном сжатии.

В данной работе рассматривается определение внутренних усилий в упругих разнородных, не связанных друг с другом стержнях прямоугольного поперечного сечения, составляющих стойку, находящуюся в условиях внецентренного сжатия.

Постановка задачи

Рассмотрим пучок разнородных стержней, образующих стойку, находящуюся в условиях внецентренного сжатия. Стержни не связаны друг с другом, но работают совместно. Нижний конец стойки упирается в горизонтальную жёсткую недеформируемую платформу. Сжимающее усилие – сосредоточенная сила F , приложенная на оси симметрии X , передаётся на верхний конец стойки через недеформируемую жёсткую пластину так, что пластина поворачивается, в результате чего верхний обрез стойки получает неравномерное вертикальное перемещение и стойка изгибается в отрицательном направлении оси X (рис. 1). Стержни, образующие стойку,

могут иметь, вообще говоря, различные формы поперечного сечения. Мы будем рассматривать стержни с прямоугольным поперечным сечением. При этом стержни, образующие стойку, могут располагаться так, что их плоскость либо перпендикулярна оси X (рис. 1, а), либо совпадает с направлением оси X (рис. 1, б).

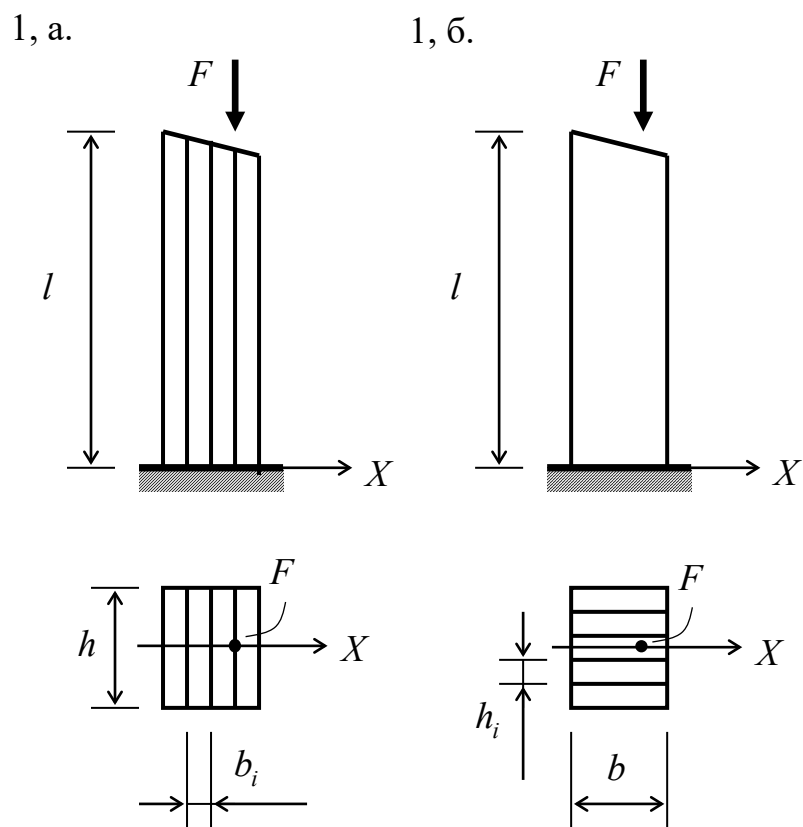


Рисунок 1 – Схема стойки

Случай 1. (рис. 1, а).

Эпюра перемещений верхнего конца стойки показана на рис. 2, откуда следует, что

$$\tan \alpha = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{b_i}, \quad (1)$$

Разделив и числитель, и знаменатель на длину стойки l получим формулу

(1) в виде:

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{b_i} l, \quad (2)$$

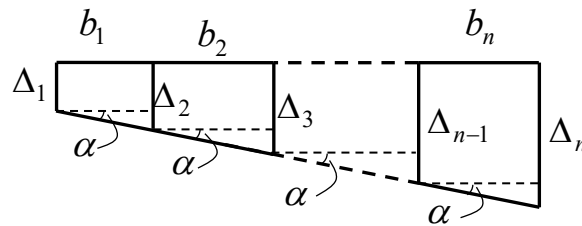


Рисунок 2 – Эпюра перемещений верхнего конца стойки

Следовательно, имеем систему уравнений совместности деформаций:

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{b_1} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{b_2} = \dots = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{b_n}, \quad (3)$$

От действия сосредоточенной силы F в каждом стержне стойки возникнет продольная сила N_i . Следовательно,

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n = F, \quad (4)$$

Будем полагать, что в крайних правых волокнах n – го слоя нормальное напряжение достигает величины расчётного сопротивления материала n – го слоя:

$$\sigma_{nz}^{\max} = \frac{N_n}{A_n} \left(1 + \frac{x_0 x}{i_y^2} \right) = R_{n\sigma} \gamma_d, \quad (5)$$

Здесь x_0 – координата приложения силы N_n ;

x – координата точки, в которой нормальное напряжение достигает величины расчётного сопротивления материала;

$$i_y^2 = \frac{I_{ny}}{A_n}; I_{ny_n} = \frac{b_n^3 h}{12} - \text{ момент инерции площади поперечного сечения}$$

n – го слоя относительно собственной центральной оси Y_n , перпендикулярной оси X ;

Вполне понятно, что $x_0 = x = \frac{1}{2} b_n$.

Тогда из соотношения (5) получаем:

$$N_n = \frac{A_n R_{n\sigma} \gamma_d}{1 + \frac{x_0 x}{i_y^2}} = \frac{A_n R_{n\sigma} \gamma_d}{1 + \frac{b_n^2}{4i_y^2}} = \frac{A_n R_{n\sigma} \gamma_d}{1 + \frac{b_n^2 A_n}{4I_{ny}}} = \frac{1}{4} b_n h R_{n\sigma} \gamma_d, \quad (6)$$

В системе (3) величины деформаций ε_i в каждом стержне будем определять только от действия продольной силы N_i , не принимая во внимание разность деформаций по ширине сечения b_i , обусловленную действием изгибающего момента $M_{iy_i} = N_i \cdot \frac{1}{2} b_i$. Таким образом,

$$\varepsilon_1 = \frac{N_1 l}{E_1 A_1}; \varepsilon_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2}; \dots; \varepsilon_n = \frac{N_n l}{E_n A_n}, \quad (7)$$

Введя обозначение

$$P_1 = \frac{N_1}{E_1 A_1}; P_2 = \frac{N_2}{E_2 A_2}; \dots; P_n = \frac{N_n}{E_n A_n}, \quad (8)$$

систему (3) приведём к виду:

$$\begin{aligned} \frac{P_2 - P_1}{b_1} &= \frac{P_3 - P_2}{b_2}; \\ \frac{P_2 - P_1}{b_1} &= \frac{P_4 - P_3}{b_3}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{P_2 - P_1}{b_1} &= \frac{P_n - P_{n-1}}{b_n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решая совместно систему уравнений (9) и (4), и принимая во внимание формулу (5), найдём:

$$P_1 = \frac{D}{G};$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{R_{n\sigma}\gamma_d b_1}{\left(1 + \frac{b_n^2 A_n}{4I_{ny}}\right) E_n b} + \frac{D(b-b_1)}{G b}; \\
P_3 &= \frac{R_{n\sigma}\gamma_d b_1}{\left(1 + \frac{b_n^2 A_n}{4I_{ny}}\right) E_n b} \left(1 + \frac{1}{b_1}\right) + \frac{D}{G} \left(\frac{(b-b_1)}{b} - \frac{b_2}{b_1}\right); \\
P_4 &= \frac{R_{n\sigma}\gamma_d b_1}{\left(1 + \frac{b_n^2 A_n}{4I_{ny}}\right) E_n b} \left(1 + \frac{1}{b_1} + \frac{b_3}{b_1}\right) + \frac{D}{G} \left[\left(\frac{(b-b_1)}{b} - \frac{b_2}{b_1}\right) + \left(\frac{(b-b_1)b_3}{b b_1} - \frac{b_3}{b_1}\right)\right]; \\
P_5 &= \frac{R_{n\sigma}\gamma_d b_1}{\left(1 + \frac{b_n^2 A_n}{4I_{ny}}\right) E_n b} \left(1 + \frac{1}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \frac{b_4}{b_1}\right) + \\
&+ \frac{D}{G} \left[\left(\frac{(b-b_1)}{b} - \frac{b_2}{b_1}\right) + \left(\frac{(b-b_1)b_3}{b b_1} - \frac{b_3}{b_1}\right) + \left(\frac{(b-b_1)b_4}{b b_1} - \frac{b_4}{b_1}\right)\right]; \\
P_6 &= \frac{R_{n\sigma}\gamma_d b_1}{\left(1 + \frac{b_n^2 A_n}{4I_{ny}}\right) E_n b} \left(1 + \frac{1}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \frac{b_4}{b_1} + \frac{b_5}{b_1}\right) + \\
&+ \frac{D}{G} \left[\left(\frac{(b-b_1)}{b} - \frac{b_2}{b_1}\right) + \left(\frac{(b-b_1)b_3}{b b_1} - \frac{b_3}{b_1}\right) + \left(\frac{(b-b_1)b_4}{b b_1} - \frac{b_4}{b_1}\right) + \right. \\
&\left. + \left(\frac{(b-b_1)b_5}{b b_1} - \frac{b_5}{b_1}\right)\right]; \\
&\dots\dots\dots \\
P_6 &= \frac{R_{n\sigma}\gamma_d b_1}{\left(1 + \frac{b_n^2 A_n}{4I_{ny}}\right) E_n b} \left(1 + \frac{1}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \frac{b_4}{b_1} + \frac{b_5}{b_1} + \dots + \frac{b_{n-2}}{b_1}\right) + \\
&+ \frac{D}{G} \left[\left(\frac{(b-b_1)}{b} - \frac{b_2}{b_1}\right) + \left(\frac{(b-b_1)b_3}{b b_1} - \frac{b_3}{b_1}\right) + \left(\frac{(b-b_1)b_4}{b b_1} - \frac{b_4}{b_1}\right) + \right. \\
&\left. + \dots + \left(\frac{(b-b_1)b_{n-2}}{b b_1} - \frac{b_{n-2}}{b_1}\right)\right];
\end{aligned} \tag{10}$$

$$P_n = \frac{R_{n\sigma} \gamma_d}{\left(1 + \frac{b_n^2 A_n}{4I_{ny}}\right) E_n}.$$

В формулах (9) обозначено:

$$\begin{aligned} G = & E_1 A_1 + E_2 A_2 \frac{(b-b_1)}{b} + E_3 A_3 \left(\frac{(b-b_1)}{b} - \frac{b_2}{b_1} \right) + \\ & + E_4 A_4 \left[\left(\frac{(b-b_1)}{b} - \frac{b_2}{b_1} \right) + \left(\frac{(b-b_1)b_3}{b b_1} - \frac{b_3}{b_1} \right) \right] + \\ & + E_5 A_5 \left[\left(\frac{(b-b_1)}{b} - \frac{b_2}{b_1} \right) + \left(\frac{(b-b_1)b_3}{b b_1} - \frac{b_3}{b_1} \right) + \left(\frac{(b-b_1)b_4}{b b_1} - \frac{b_4}{b_1} \right) \right] + \dots + \\ & + E_{n-1} A_{n-1} \left[\left(\frac{(b-b_1)}{b} - \frac{b_2}{b_1} \right) + \left(\frac{(b-b_1)b_3}{b b_1} - \frac{b_3}{b_1} \right) + \left(\frac{(b-b_1)b_4}{b b_1} - \frac{b_4}{b_1} \right) + \dots + \right. \\ & \left. + \left(\frac{(b-b_1)b_{n-2}}{b b_1} - \frac{b_{n-2}}{b_1} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = F - \frac{R_{n\sigma} \gamma_d b_1}{\left(1 + \frac{b_n^2 A_n}{4I_{ny}}\right) E_n b} & \left[E_2 A_2 + \left(1 + \frac{1}{b_1}\right) E_3 A_3 + \left(1 + \frac{1}{b_1} + \frac{b_3}{b_1}\right) E_4 A_4 + \right. \\ & + \left(1 + \frac{1}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \frac{b_4}{b_1}\right) E_5 A_5 + \dots + \left(1 + \frac{1}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \frac{b_4}{b_1} + \dots + \frac{b_{n-2}}{b_1}\right) E_{n-1} A_{n-1} + \\ & \left. + E_n A_n \right]. \end{aligned}$$

Далее, принимая во внимание обозначения (8), выписываем формулы для продольных сил в каждом стержне:

$$\begin{aligned} N_1 &= P_1 E_1 A_1; \\ N_2 &= P_2 E_2 A_2; \\ &\dots\dots\dots \\ N_n &= P_n E_n A_n. \end{aligned} \tag{11}$$

Зная продольные силы можно оценить прочность каждого стержня в стойке.

Если окажется что максимальное нормальное сжимающее напряжение в каком-либо стержне превышает расчётное сопротивление его материала, то

необходимо выполнить перерасчёт, приняв максимальное нормальное напряжение в n – ом стержне как долю от расчётного сопротивления материала n – го стержня.

Определение положения внешней сжимающей силы

Будем полагать, что внешняя сжимающая сила F , в результате действия которой стойка, состоящая из совокупности не связанных между собой разнородных стержней находится в условиях внецентренного сжатия, приложена на оси симметрии поперечного сечения стойки, то есть на оси OX . Её точное местоположение можно найти, используя теорему Вариньона о моменте равнодействующей [17]. На рис. 3 показано поперечное сечение стойки с силой F , расположенной в k – ом стержне.

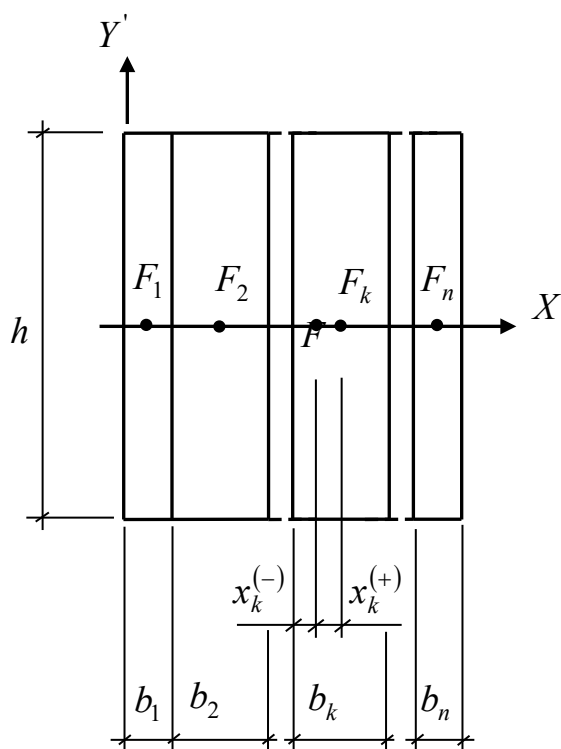


Рисунок 3 – Поперечное сечение стойки

Тогда, на основании теоремы Вариньона,

$$\begin{aligned}
 & F_1 \left(\frac{b_1}{2} + b_2 + \dots + b_{k-1} + x_k^{(-)} \right) + F_2 \left(\frac{b_2}{2} + b_3 + \dots + b_{k-1} + x_k^{(-)} \right) + \dots + \\
 & + F_{k-1} \left(\frac{b_{k-1}}{2} + x_k^{(-)} \right) - F_k x_k^{(+)} - F_{k+1} \left(x_k^{(+)} + \frac{b_k}{2} + \frac{b_{k+1}}{2} \right) - \dots - \\
 & - F_n \left(x_k^{(+)} + \frac{b_k}{2} + b_{k+1} + \dots + b_{n-1} + \frac{b_n}{2} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $x_k^{(-)} + x_k^{(+)} = \frac{b_k}{2}$.

Следовательно, из соотношения (12) получаем:

$$x_k^{(+)} = \frac{F_1 b^{(1)} + F_2 b^{(2)} + \dots + F_{k-1} b^{(k-1)} + F_{k+1} b^{(k+1)} + \dots + F_n b^{(n)}}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \tag{13}$$

В формуле (13),

$$\begin{aligned}
 b^{(1)} &= \frac{b_1}{2} + b_2 + \dots + \frac{b_{k-1}}{2} + \frac{b_k}{2}; \\
 b^{(2)} &= \frac{b_2}{2} + b_3 + \dots + b_{k-1} + \frac{b_k}{2}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 b^{(k-1)} &= \frac{b_{k-1}}{2} + \frac{b_k}{2}; \\
 b^{(k+1)} &= \frac{b_k}{2} + \frac{b_{k+1}}{2}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 b^{(n)} &= \frac{b_k}{2} + b_{k+1} + \dots + b_{n-1} + \frac{b_n}{2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Итак, сила F , действующая на верхний конец стойки через недеформируемую жёсткую пластину должна быть приложена в точке с координатами

$$y_F = \frac{h}{2}; \quad x_F = b_1 + b_2 + \dots + b_{k-1} + \frac{b_k}{2} - x_k^{(+)}, \tag{15}$$

в системе координат XOY' .

Выводы

Результаты данной работы могут найти применение при усилении и реконструкции внецентренно сжатых стоек, состоящих из не связанных друг с другом, но работающих совместно, разнородных стержней.

Библиографический список:

1. СП 349.1325800.2017. Конструкции бетонные и железобетонные. Правила ремонта и усиления. Москва: Стандартинформ, 2017.
2. Рекомендации по проектированию усиления железобетонных конструкций зданий и сооружений реконструируемых предприятий. Наземные конструкции и сооружения. НИИЖБ Госстроя СССР. Москва: Стройиздат, 1992.
3. *Онуфриев Н.М.* Усиление железобетонных конструкций изменением их конструктивной схемы. Ленинград: Стройиздат, 1949. 254 с.
4. *Бондаренко В. М., Римшин В. И.* Усиление железобетонных конструкций композитными материалами // Вестник МГСУ. - 2013. - № 5. - С. 14-24.
5. *Добромыслов А.Н.* Проблемы усиления железобетонных конструкций композитами // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. - 2011. - № 10. - С. 29-31.
6. *Клюева Н.В., Колчунов В.И., Яковенко И.А.* Проблемы исследования деформирования и разрушения железобетонных конструкций, усиленных внешним армированием // Строительство и реконструкция. - 2010. - № 6. - С. 3-7.
7. *Овчинников И.Г., Валиев Ш.Н., Овчинников И.И., Зиновьев В.С., Умиров А.Д.* Вопросы усиления железобетонных конструкций композитами: 1. Экспериментальные исследования особенностей усиления композитами изгибаемых железобетонных конструкций // Интернет-журнал "Науковедение". - 2012. - №4. - С. 1-22.

8. *Овчинников И.Г., Валиев Ш.Н., Овчинников И.И., Зиновьев В.С., Умиров А.Д.* Вопросы усиления железобетонных конструкций композитами: 2. Натурные исследования усиления железобетонных конструкций композитами, возникающие проблемы и пути их решения // Интернет-журнал "Науковедение". - 2012. - №4. - С. 1-37.

9. *Овчинников И.И., Овчинников И.Г., Чесноков Г.В., Михалдыкин Е.С.* О проблеме расчета трубобетонных конструкций с оболочкой из разных материалов. Часть 3. Опыт применения полимерных композитных материалов в мостостроении // Интернет-журнал "Науковедение". - 2015. - №5. - С. 1-25.

10. *Чу Х.* Гибкие внецентренно сжатые железобетонные стойки, усиленные композитными материалами // Инновации и инвестиции. 2024. № 11. С. 609-612.

11. *Иванов С.И., Паньков Е.Н., Квасников А.А.* Усиление сжатых и изгибаемых железобетонных конструкций системами внешнего армирования с применением шпоночных соединений // Бетон и железобетон. 2025. № 4 (629). С. 19-26. DOI: 10.37538/0005-9889-2025-4(629)-19-26

12. *Нур М.К.* Современные подходы к усилению несущей способности железобетонных конструкций композитными материалами // Вестник науки. 2025. Т. 3. № 5 (86). С. 1767-1774.

13. *Сяньюй Чэ.* Методы усиления железобетонных колонн с помощью углеродного волокна в Китае // Современные тенденции в строительстве, градостроительстве и планировке территорий. 2025. Т. 4. № 4. С. 69-77. DOI: 10.23947/2949-1835-2025-4-4-69-77

14. *Георгиев С.В., Маилян Д.Р., Соловьёва А.И., Меретуков З.А.* Влияние металло-композитного усиления на работу железобетонных колонн при различных эксцентриситетах внешней силы // Инженерный вестник Дона. 2025. № 11 (131). С. 710-728.

15. *Бакушев С.В.* Внецентренное сжатие массивного неоднородного стержня // Приволжский научный журнал. 2025. № 2 (74). С. 9-20

16. *Новожилова Н.С.* Исследование напряженного состояния кирпичных стен, усиленных двухсторонним бетонным наращиванием, при местном сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2021. № 6 (89). С. 34-41. DOI: 10.23968/1999-5571-2021-18-6-34-41.

17. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики // М.: «Высш. школа». 2002. 415 с.