

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВИБРОЗАЩИТЫ  
ОБОРУДОВАНИЯ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА**

*Евсеев Александр Евгеньевич,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика»,*

*Евсеев Илья Александрович,*

*инженер-конструктор, ООО «СФ ТЦС»,*

*г. Москва.*

*Баев Максим Викторович,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*директор центра обеспечения информатизации.*

**Аннотация**

Статья посвящена исследованию колебательного движения грунтового массива и вопросам защиты от колебаний. В частности, на основании общих дифференциальных уравнений движения идеально упругого тела разработана методика расчета оптимальных параметров виброзащитных экранов, расположенных на пути движения волн вибрации.

Полученная методика апробирована в реальном проекте. Результаты апробации позволяют говорить о достоверности полученных результатов и эффективности созданной методики.

**Ключевые слова:** механика грунтов, колебания, деформации, дифференциальные уравнения.

**DETERMINATION OF VIBRATION PROTECTION PARAMETERS  
OF EQUIPMENT  
USING DIFFERENTIAL EQUATIONS OF BODY MOVEMENT**

***Evseev Alexander Evgenievich,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the department  
“Mechanics”,*

***Evseev Ilya Aleksandrovich,***

*Design Engineer, SF TCS LLC, Moscow.*

***Baev Maksim Viktorovich,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Director of the Center for Informatization Support,*

**Abstract**

The article is devoted to the study of the oscillatory motion of the soil mass and issues of protection against vibrations. In particular, based on the general differential equations of motion of an ideally elastic body, a method for calculating the optimal parameters of vibration protection screens located on the path of vibration waves has been developed.

The resulting method has been tested in a real project. The results of testing allow us to speak about the reliability of the results obtained and the effectiveness of the created method.

**Keywords:** soil mechanics, vibrations, deformations, differential equations.

В развитии машиностроения наблюдается устойчивая тенденция к повышению рабочих параметров машин и увеличению единичной мощности машинных агрегатов, что обусловлено стремлением к оптимизации производственных процессов и повышению энергоэффективности. Эти процессы, в свою очередь, сопровождаются ростом виброактивности оборудования, что является неизбежным следствием увеличения его рабочих

характеристик и снижения удельной металлоемкости. Вибрационное состояние машин играет ключевую роль в обеспечении их надежности и долговечности эксплуатации, поскольку повышенная вибрация приводит к интенсификации динамических нагрузок на конструктивные элементы, ускоренному износу и повреждению оборудования и поддерживающих конструкций, а также может негативно сказываться на качественных показателях производимой продукции.

Исследования вибрационных процессов в машиностроении направлены на выявление и анализ основных причинно-следственных связей, что позволяет повысить эффективность и безопасность эксплуатации оборудования. Эта цель достигается посредством комплексного подхода к проектированию, изготовлению и эксплуатации машин и механизмов, включающего разработку и внедрение методов и средств виброзащиты.

Виброзащита представляет собой систему мероприятий и технических решений, направленных на снижение уровня вибрации, воспринимаемой защищаемыми объектами. Уменьшение вибрации может быть достигнуто путем снижения значений различных параметров, характеризующих вибрационный процесс. Объектами виброзащиты в данном контексте являются составные части машин и оборудования, поддерживающие конструкции, а также оборудование, расположенное в непосредственной близости от источников вибрации.

Одним из эффективных методов виброзащиты является виброизоляция, которая заключается в снижении передачи вибрации от источника к защищаемому объекту с помощью специальных устройств, размещаемых между ними. В качестве виброизоляторов используются различные конструктивные элементы, такие как винтовые пружины, рессоры, резиновые и резинометаллические конструкции, полимерные материалы, пневматические и гидропневматические системы, металлические конструкции, торсионы, пакеты пластин и другие. Кроме того, к виброизоляторам относятся экраны, установленные на пути распространения вибрационных волн, которые обладают существенно меньшей эффективностью передачи вибраций по

сравнению с исходными конструкциями (например, элементы с нелинейной жесткостью или воздушные прослойки).

Для определения параметров воздушной прослойки, необходимой для снижения колебаний до приемлемого уровня, рассмотрим применение теории колебаний и волновых процессов в упругих средах. Условно предполагая, что грунт обладает свойствами идеального, изотропного и однородного тела, можно воспользоваться общими дифференциальными уравнениями движения идеально упругого тела. Эти уравнения описывают поведение среды под воздействием внешних возмущений и позволяют определить оптимальные параметры воздушной прослойки для эффективного снижения вибраций. Условно предполагая грунт удовлетворяющим условиям идеального, изотропного и однородного тела, применим общие дифференциальные уравнения движения идеально упругого тела [1]. Эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $u, v, w$  – составляющие упругого перемещения по координатным осям;

$\Delta$  - относительное изменение объема, равно:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

$\nabla^2$  - оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$\rho$  – плотность грунта;

$X, Y, Z$  – составляющие массовых сил;

$\lambda, \mu$  – коэффициенты Лямэ, связанные с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\sigma$  зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} E \\ \mu &= \frac{\sigma}{2(1+\sigma)} E \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

Влияние массовых сил, вследствие их относительной малости, может быть пренебрежимо малым в контексте рассматриваемой задачи.

При допущении, что грунт представляет собой твердую упругую среду с бесконечным распространением в любом направлении, от источника колебаний будут независимо распространяться два типа волн. Смещение в любой точке данной среды может быть представлено как суперпозиция смещений, вызванных каждой из этих волн в отдельности. Таким образом, результирующее смещение в любой точке грунта будет являться суммой смещений, вызванных каждым типом волн, т.е.

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2, \\ v &= v_1 + v_2, \\ w &= w_1 + w_2. \end{aligned}$$

При этом составляющие смещений  $u_1, v_1, w_1$  удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

Которые будут выполнены, если  $u_1, v_1, w_1$  имеют потенциал, следовательно

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

Составляющие смещений  $u_2, v_2, w_2$  удовлетворяют условиям

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = 0., \quad (5)$$

Таким образом, составляющие полного смещения грунта равны:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_2,$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_2,$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w_2$$

Подставив эти значения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в (1), получим следующие уравнения, которым должны удовлетворять  $\varphi$  и  $u$ ,  $v$ ,  $w$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \varphi, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 u_2, \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 v_2, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 w_2 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

Здесь

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (8)$$

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения (6) и (7) характеризуются идентичной структурой, различаясь лишь значениями коэффициентов при соответствующих переменных.

Выражения (3), в свою очередь, представляют собой компоненты вектора вращения, что позволяет сделать вывод о том, что волна, распространяющаяся в грунтовой среде и описываемая уравнением (6), не порождает деформаций сдвига. Деформации, обусловленные данной волной, характеризуются исключительно относительным изменением объема грунта, которое может быть представлено следующим образом:

$$\Delta_1 = \nabla^2 \varphi.$$

Таким образом, волновой процесс, описываемый дифференциальным уравнением (6), представляет собой волну сжатия и расширения. Напротив, условие (5) демонстрирует, что для волн, компоненты которых подчиняются уравнениям (7), изменение объема не происходит. В процессе распространения этих волн элементы грунтовой среды испытывают исключительно относительные сдвиги, характеризующиеся равными составляющими.

$$2\omega_x = \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z},$$

$$2\omega_y = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0,$$

$$2\omega_z = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0.$$

В результате проведенного анализа можно констатировать, что волны, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (7), представляют собой волны сдвига. В контексте распространения волн сжатия и расширения смещения грунта происходят параллельно направлению распространения волны, что позволяет классифицировать их как продольные волны.

Волны сдвига, в свою очередь, характеризуются как поперечные волны, поскольку их механизм действия обусловлен исключительно смещениями частиц грунта, перпендикулярными направлению распространения волнового фронта.

Интегрирование дифференциального волнового уравнения типа (6) или (7), как отмечено в работе [4], осуществляется следующим образом:

$$\frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

где  $r$  – радиус-вектор рассматриваемой точки;

$F$  – произвольная функции, удовлетворяющая начальным и граничным условиям задачи;

$c$  – скорость распространения волны (для продольных волн  $c=a$ , а для поперечных волн  $c=b$ ).

Воспользовавшись формулами (2), можно выражения (8) и (9) для скоростей волн сжатия и сдвига привести к виду

$$a = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{E}{\rho}}, \quad (10)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{E}{\rho}}, \quad (11)$$

В качестве успешного примера применения теоретических и экспериментальных зависимостей, полученных в рамках проведенных исследований, авторами был разработан инновационный проект устройства для виброзащиты фундаментов турбогенераторов. Целью данного проекта было минимизация негативного воздействия колебаний, возникающих при работе сырьевой мельницы. Проект был реализован по заказу дирекции ОАО «Мордовцемент» в контексте наблюдаемого увеличения амплитуды колебаний турбогенератора. Это увеличение, в свою очередь, было связано с завершением процесса помола сырья в мельнице и привело к превышению предельно допустимых значений вибраций, зафиксированных на вибрационных датчиках устройства.

Согласно техническому отчету об инженерно-геологических изысканиях, выполненному ГУП РМ «Мордовский институт инженерных изысканий и проектирования» (арх.№ 8199), фундаменты как мельницы, так и турбогенераторов были возведены на основании, состоящем из мягкопластичной глины. Этот факт имеет критическое значение для анализа причин возникновения колебаний и разработки соответствующих мер по их демпфированию. ( $E=5$  МПа,  $\sigma=0.4$ ,  $\rho=18$ кН/м<sup>3</sup>). Тогда для скоростей распространения волн будем иметь

$$a = \sqrt{\frac{1-0,4}{(1+0,4)(1-2 \cdot 0,45)} \frac{5 \cdot 10^6}{18}} = 771 \text{ м/сек},$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2(1+0,4)} \frac{5 \cdot 10^6}{18}} = 315 \text{ м/сек}.$$

Учитывая, что частота колебаний главного привода  $42 \text{ сек}^{-1}$ .

Длина волн

$$\text{– продольной – } h_1 = \frac{a}{\omega_1} = \frac{771}{42} = 18,4 \text{ м};$$

– поперечной –  $h_2 = \frac{b}{\omega_2} = \frac{315}{42} = 7,5 \text{ м.}$

Определим амплитуды вертикальной составляющей колебаний грунта, вызванных сотрясениями фундамента мельницы. Для этого используем методику предложенную гл.VII §4 монографии [1].

Площадь фундамента под мельницу  $F_m = 36 \times 26 = 936 \text{ м}^2$ .

Коэффициент упругого равномерного сжатия грунта [1]  $C_z = 5 \text{ кг/см}^3$ .

Амплитуда вертикальных колебаний фундамента  $A_z = 1,5 \text{ мм.}$

Частота собственных вертикальных колебаний  $\omega = 42 \text{ сек}^{-1}$ .

Скорость распространения поперечных волн  $b = 315 \text{ м/сек.}$

Модуль сдвига для грунта  $\mu = 1,8 \text{ МПа.}$

Определяем радиус эквивалентного круга

$$R = \sqrt{\frac{F_i}{\pi}} = \sqrt{\frac{936}{3,14}} = 17,26 \text{ м.}$$

Находим коэффициент  $\chi$

$$\chi = \frac{\omega}{b} = \frac{42}{315} = 0,133.$$

Следовательно

$$\chi R = 0,133 \cdot 17,26 = 2,295.$$

По таблицам находим функцию Бесселя первого рода

$$J_1(\chi R) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\chi R}} \sin(\chi R - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3,14 \cdot 0,133 \cdot 17,26}} \sin(0,133 \cdot 17,26 - \frac{3,14}{4}) = -0,015$$

Динамическое давление на грунт будет

$$p = C_z A_z = 5 \cdot 0,15 = 0,75 \text{ кг/см}^2.$$

Значение коэффициента  $K_0$  примем по таблице 26 [1]

$$K_0 = 0,108 + \frac{0,183 - 0,108}{0,5 - 0,25} (0,4 - 0,25) = 0,153.$$

Подставив полученные значения в (4.9) [1], получим

$$A_w = \frac{\pi p R K_0}{\mu} J_1(\chi R) \sqrt{\frac{2}{\pi \chi x}} = \frac{3,14 \cdot 7,5 \cdot 17,26 \cdot 0,153}{1,8 \cdot 10^3} \cdot 0,015 \sqrt{\frac{2}{3,14 \cdot 0,133 x}} = 0,36 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

На расстоянии 20 м от источника колебаний получим амплитуду вертикальной составляющей колебаний грунта, равную 0,08 мм. Примем коэффициент поглощения энергии волн грунтом равным 0,04 м<sup>-1</sup>. Тогда амплитуда на расстоянии большем 8-и метров от центра фундамента будет определяться из выражения

$$A_r = \frac{0,36}{\sqrt{r}} e^{-0,04(r-20)}$$

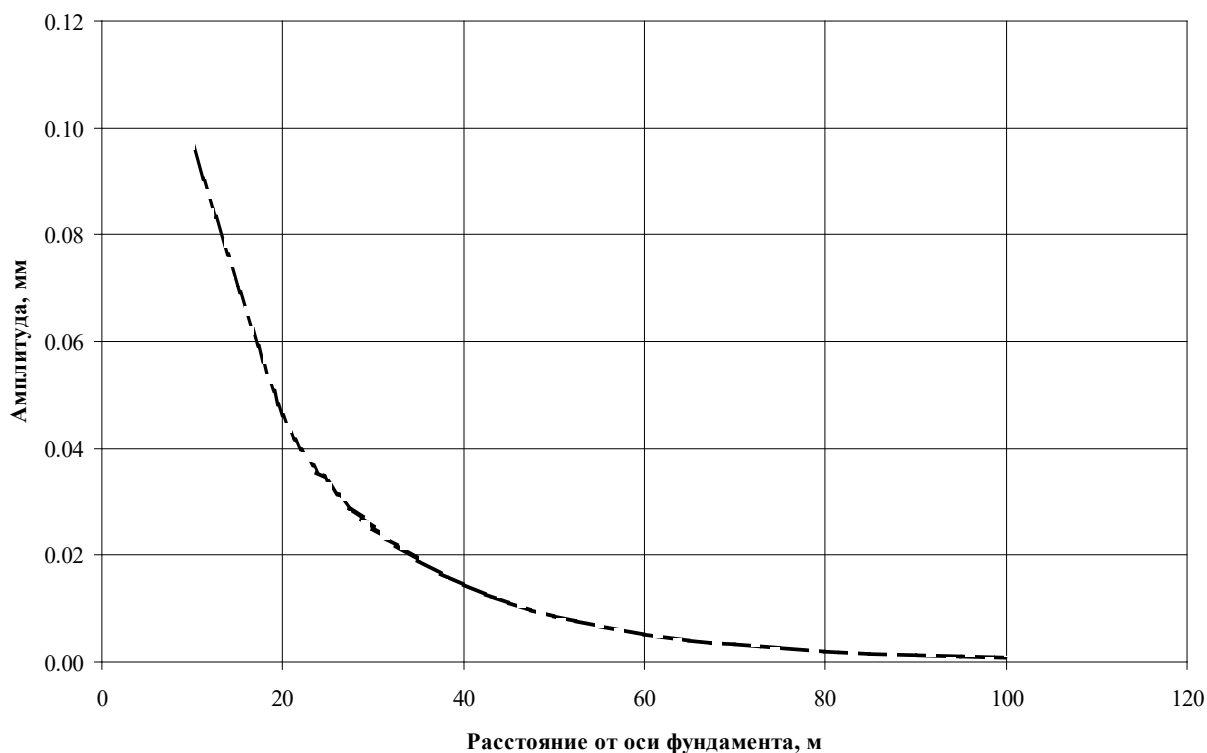


Рисунок 1 – График изменения амплитуд с расстоянием

Согласно результатам многолетних исследований, проведенных как зарубежными, так и отечественными специалистами в сфере виброзащиты зданий и сооружений, оптимальная глубина виброзащитного экрана определяется как длина волны воздействующих колебаний [3].

При этом установлено, что при глубине экрана, равной длине волны, амплитуда колебаний снижается на 80%. При уменьшении глубины до 0,8 длины волны наблюдается снижение амплитуды на 70%, до 0,6 длины волны – на 60%, и так далее (рис.2). Важно отметить, что ширина экрана не оказывает существенного влияния на параметры колебаний.

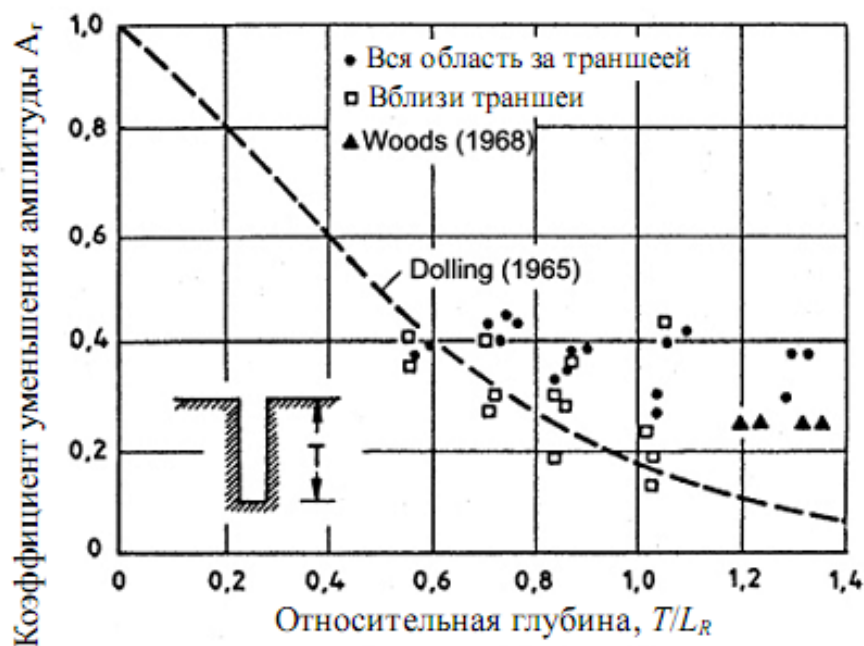


Рисунок 2 – Результаты опытов по виброизоляции на моделях открытых траншей (Наурт, 1981). Результаты исследований Вудса (Woods, 1968) и спрямление кривой по прогнозу Долинга (Dolling, 1965).

В данном случае причиной наблюдаемых аномалий в амплитудах колебаний турбогенератора, по всей видимости, является поперечная волновая мода с длиной волны  $h_2 = 7,5$  м, что подтверждается анализом спектрального состава вибрационных процессов.

На основе проведенных комплексных расчетов и моделирования динамических характеристик системы было рекомендовано установить виброзащитный экран с высотой 6 метров. По нашим оценкам, данное техническое решение позволит значительно снизить амплитуду дополнительных колебаний, а именно уменьшить их на 70%, что существенно улучшит эксплуатационные характеристики турбогенераторной установки.

Учитывая, что фундамент турбогенератора подвержен вибрационным нагрузкам не только от фундамента мельницы, но и от других источников, находящихся в непосредственной близости, мы настоятельно рекомендуем провести детальные контрольные замеры вибрационных параметров обоих

фундаментов. Это позволит провести сравнительный анализ и выявить возможные источники дополнительных колебаний, а также разработать более эффективные меры по их минимизации.

#### **Библиографический список:**

1. Баркан Д.Д. Динамика оснований и фундаментов. Стройвоенмориздат, 1948.
2. Справочник по динамике сооружений. Под ред. Б.Г.Коренева. Стройиздат. 1972.
3. Massarsch K.R. Boden vibrations abschirmung mittels Gasmatten. Deutsche Baugrurung, Hamburg, pp. 161-192.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. /Под ред. Г.Гроше и В.Циглера. Пер. с немецкого. -Лейпциг: Изд-во "Тойбнер", -М.: Наука, Физматгиз, 1981. -718 с.