

ПРОГИБЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛКАХ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Ахмедханов Хаким Рагимханович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

студент.

Аннотация

Рассматривается неоднородный упругий стержень, находящийся в условиях плоского поперечного изгиба. Методом интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси многослойной неоднородной консольной упругой балки определяются перемещения точек её изогнутой оси. При этом предполагается, что гипотеза плоских сечений и гипотеза о ненадавливании продольных волокон остаётся справедливой. Перемещения считаются малыми. Сдвиг между слоями балки отсутствует. В качестве примера определяются перемещения конца консоли пятислойной упругой балки и сравниваются с перемещениями конца консоли однородной балки с таким же поперечным сечением. Показано, что прогибы неоднородной многослойной консольной балки больше чем прогибы однородной консольной балки, выполненной из материала с модулем упругости, соответствующем наибольшему из модулей упругости слоёв неоднородной балки и меньше, чем прогибы однородной консольной балки, выполненной из материала с модулем упругости, соответствующем наименьшему из модулей упругости слоёв неоднородной балки. Кроме того, прогибы неоднородной многослойной консольной балки значительно меньше прогибов соответствующей (имеющей ту же высоту поперечного сечения) балки, выполненной из двутавра.

Результаты данной работы могут найти применение при оптимизации многослойных неоднородных балок из условия жёсткости.

Ключевые слова: стержень, неоднородность, упругость, плоский поперечный изгиб, прогибы.

DEFLECTIONS IN MULTILAYER BEAMS

Bakushev Sergey Vasilevish,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Technical Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Akhmedkhanov Khakim Ragimkhanovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

An inhomogeneous elastic rod under conditions of plane transverse bending is considered. By integrating the differential equation of the curved axis of a multilayer inhomogeneous cantilever elastic beam, the displacements of the points of its curved axis are determined. At the same time, it is assumed that the hypothesis of plane sections and the hypothesis of non-pressure of longitudinal fibers remain valid. Movements are considered small. There is no offset between the beam layers. As an example, the displacements of the cantilever end of a five-layer elastic beam are determined and compared with the displacements of the cantilever end of a homogeneous beam with the same cross-section. It is shown that the deflections of an inhomogeneous multilayer cantilever beam are greater than the deflections of a homogeneous cantilever beam made of a material with an elastic modulus corresponding to the largest of the elastic moduli of the layers of an inhomogeneous beam and smaller than the deflections of a homogeneous cantilever beam made of a material with an elastic modulus corresponding to the smallest of the elastic modulus of the layers of an inhomogeneous beam. In addition, the deflections of a heterogeneous multilayer cantilever beam are much smaller than the deflections of

the corresponding (having the same cross-sectional height) beam made of I-beam. The results of this work can be used in the optimization of multilayer heterogeneous beams from stiffness conditions.

Keywords: rod, heterogeneity, elasticity, flat transverse bending, deflections.

Введение.

Неоднородные упругие балки, в силу особенностей распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения, обладают некоторыми преимуществами перед однородными балками. В частности, при использовании неоднородных балок можно повысить жёсткостные и прочностные характеристики балки с тем же поперечным сечением, что и у однородной балки [1]. Вопросами расчёта неоднородных многослойных балок как из условия прочности, так и из условия жёсткости занимались многие отечественные и зарубежные исследователи. Вопросы определения положения нейтральной линии и оценки несущей способности многослойной балки рассматривались в статье [2]. В работе [3] даётся общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье. В статьях [4] и [5] приводится решение и даётся анализ напряжённо-деформированного состояния многослойной балки при поперечном изгибе. В работе [6] проанализирован опыт российских и зарубежных исследователей при оценке прочности нормального сечения изгибаемых многослойных элементов. В статье [7] приводится методика расчета многослойных балок методом конечных элементов в сочетании с методом контактного слоя. В работе [8] рассмотрены вопросы работы многослойных стеклянных конструкций на центральное, внецентренное сжатие и изгиб. В статье [9] даётся вывод математической модели деформирования трёхслойных стержней при учете вариаций кинетической и потенциальной энергий, а также работы внешних объемных и поверхностных сил.

В данной работе методом интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси многослойной неоднородной консольной упругой балки

определяются перемещения точек её изогнутой оси. При этом предполагается, что гипотеза плоских сечений и гипотеза о ненадавливании продольных волокон остаётся справедливой. Перемещения также считаются малыми. Сдвиги между слоями балки отсутствуют.

Теоретические основы.

Для многослойной неоднородной упругой балки, содержащей n – разнородных слоёв, из которых k – слоёв находятся в сжатой зоне, а m – слоёв находятся в растянутой зоне поперечного сечения, так что $k + m + 1 = n$ (предполагается, что один из средних слоёв с номером ноль делится нейтральной линией на две части), у которой каждый i – й слой характеризуется своими значениями модуля упругости E_i и расчётного сопротивления материала R_i нормальные напряжения в поперечных сечениях будут определяться зависимостями:

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(-)} &= E_i^{(-)} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(-)} + y_i}{\rho}, i = 1, 2, \dots, k; \quad \sigma_0^{(-)} = E_0 \frac{y_0^{(-)}}{\rho}; \\ \sigma_0^{(+)} &= E_0 \frac{y_0^{(+)}}{\rho}; \quad \sigma_i^{(+)} = E_i^{(+)} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(+)} + y_i}{\rho}, i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем $E_i^{(-)}$ - означает модуль упругости материала слоя балки, расположенного в сжатой зоне поперечного сечения; $E_i^{(+)}$ – означает модуль упругости материала слоя балки, расположенного в растянутой зоне поперечного сечения; E_0 – означает модуль упругости материала слоя балки с нейтральной осью. Вообще говоря, $E_i^{(-)} \neq E_i^{(+)}$.

Положение нейтральной линии (оси X) можно найти из условия равенства нулю продольной силы:

$$\begin{aligned}
N &= - \int_{A_k^{(-)}} \sigma_k^{(-)} dA - \int_{A_{k-1}^{(-)}} \sigma_{k-1}^{(-)} dA - \dots - \int_{A_1^{(-)}} \sigma_1^{(-)} dA - \int_{A_0^{(-)}} \sigma_0^{(-)} dA + \\
&+ \int_{A_0^{(+)}} \sigma_0^{(+)} dA + \int_{A_1^{(+)}} \sigma_1^{(+)} dA + \int_{A_2^{(+)}} \sigma_2^{(+)} dA + \dots + \int_{A_m^{(+)}} \sigma_m^{(+)} dA = \\
&= - \frac{E_k^{(-)}}{\rho} S_x^{(k)(-)} - \frac{E_{k-1}^{(-)}}{\rho} S_x^{(k-1)(-)} - \dots - \frac{E_1^{(-)}}{\rho} S_x^{(1)(-)} - \\
&- \frac{E_0^{(-)}}{\rho} S_x^{(0)(-)} + \frac{E_0^{(+)}}{\rho} S_x^{(0)(+)} + \frac{E_1^{(+)}}{\rho} S_x^{(1)(+)} + \frac{E_2^{(+)}}{\rho} S_x^{(2)(+)} + \\
&+ \dots + \frac{E_m^{(+)}}{\rho} S_x^{(m)(+)} = 0.
\end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned}
&- E_k^{(-)} S_x^{(k)(-)} - E_{k-1}^{(-)} S_x^{(k-1)(-)} - \dots - E_1^{(-)} S_x^{(1)(-)} - \\
&- E_0^{(-)} S_x^{(0)(-)} + E_0^{(+)} S_x^{(0)(+)} + E_1^{(+)} S_x^{(1)(+)} + \\
&+ E_2^{(+)} S_x^{(2)(+)} + \dots + E_m^{(+)} S_x^{(m)(+)} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Величина внутреннего изгибающего момента относительно нейтральной оси (оси X) определяется соотношением:

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{A_k^{(-)}} \sigma_k^{(-)} (\sum_{j=1}^{k-1} h_j^{(-)} + y_k^{(-)}) dA + \int_{A_{k-1}^{(-)}} \sigma_{k-1}^{(-)} (\sum_{j=1}^{k-2} h_j^{(-)} + y_{k-1}^{(-)}) dA + \dots \\
&+ \int_{A_1^{(-)}} \sigma_1^{(-)} (h_0^{(-)} + y_1^{(-)}) dA + \int_{A_0^{(-)}} \sigma_0^{(-)} y_0^{(-)} dA + \int_{A_0^{(+)}} \sigma_0^{(+)} y_0^{(+)} dA + \dots \\
&+ \int_{A_1^{(+)}} \sigma_1^{(+)} (h_0^{(+)} + y_1^{(+)}) dA + \int_{A_2^{(+)}} \sigma_2^{(+)} (h_0^{(+)} + h_1^{(+)} + y_1^{(+)}) dA + \dots \\
&+ \int_{A_m^{(+)}} \sigma_m^{(+)} (\sum_{j=1}^{m-1} h_j^{(+)} + y_m^{(+)}) dA = \frac{E_k^{(-)}}{\rho} I_x^{(k)(-)} + \frac{E_{k-1}^{(-)}}{\rho} I_x^{(k-1)(-)} + \dots \\
&+ \frac{E_1^{(-)}}{\rho} I_x^{(1)(-)} + \frac{E_0^{(-)}}{\rho} I_x^{(0)(-)} + \frac{E_0^{(+)}}{\rho} I_x^{(0)(+)} + \frac{E_1^{(+)}}{\rho} I_x^{(1)(+)} + \frac{E_2^{(+)}}{\rho} I_x^{(2)(+)} + \dots \\
&+ \frac{E_m^{(+)}}{\rho} I_x^{(m)(+)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Из соотношения (3) определяем кривизну изогнутой оси балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI}. \tag{4}$$

Здесь

$$EI = E_k^{(-)} I_x^{(k)(-)} + E_{k-1}^{(-)} I_x^{(k-1)(-)} + \dots + E_1^{(-)} I_x^{(1)(-)} + E_0^{(-)} I_x^{(0)(-)} + \\ + E_0^{(+)} I_x^{(0)(+)} + E_1^{(+)} I_x^{(1)(+)} + E_2^{(+)} I_x^{(2)(+)} + \dots + E_m^{(+)} I_m^{(1)(+)}. \quad (5)$$

Учитывая равенство (4), а также принимая малость перемещений оси балки, запишем дифференциальное уравнение её изогнутой оси:

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EI}. \quad (6)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (6) совместно с краевыми (граничными) условиями, можно найти уравнение изогнутой оси многослойной неоднородной упругой балки.

Пример.

В качестве примера рассмотрим упругую консольную балку, содержащую пять разнородных слоёв (рис. 1).

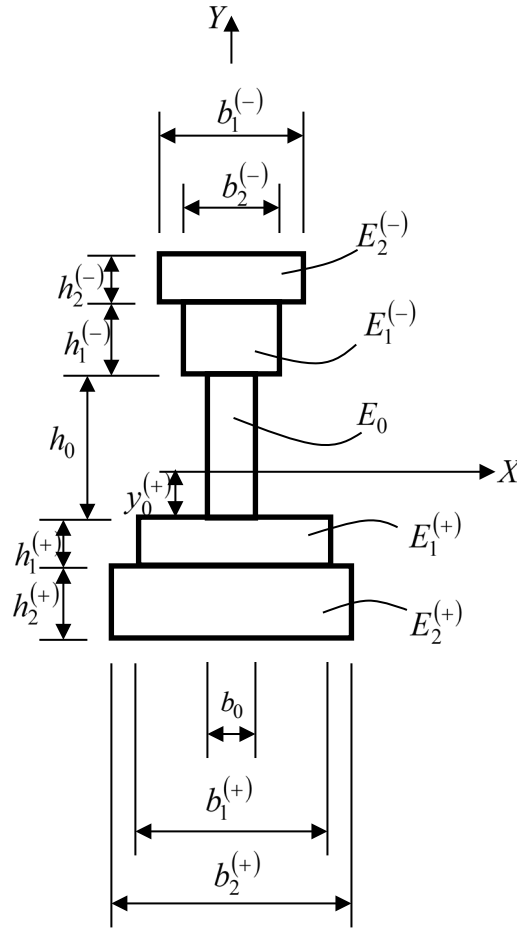


Рисунок 1- Консольная балка

Условие (2) при этом получает вид:

$$\begin{aligned}
 & -E_2^{(-)}S_x^{(2)(-)} - E_1^{(-)}S_x^{(1)(-)} - E_0^{(-)}S_x^{(0)(-)} + E_0^{(+)}S_x^{(0)(+)} + \\
 & + E_2^{(+)}S_x^{(1)(+)} - E_2^{(+)}S_x^{(2)(+)} = 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$S_x^{(0)(+)} = b_0 y_0^{(+)} \frac{y_0^{(+)}}{2}; \quad S_x^{(1)(+)} = b_1^{(+)} h_1^{(+)} \left(y_0^{(+)} \frac{h_1^{(+)}}{2} \right);$$

$$S_x^{(2)(+)} = b_2^{(+)} h_2^{(+)} \left(y_0^{(+)} + h_1^{(+)} \frac{h_2^{(+)}}{2} \right);$$

$$S_x^{(0)(-)} = b_0 \frac{(h_0 - y_0^{(+)})^2}{2}; \quad (8) \quad S_x^{(1)(-)} = b_1^{(-)} h_1^{(-)} \left[(h_0 - y_0^{(+)}) + \frac{h_1^{(-)}}{2} \right];$$

$$S_x^{(2)(-)} = b_2^{(-)} h_2^{(-)} \left[(h_0 - y_0^{(+)}) + h_2^{(-)} + \frac{h_2^{(-)}}{2} \right].$$

При этом уравнение (7) получает вид:

$$\begin{aligned} & -E_2^{(-)} b_2^{(-)} h_2^{(-)} \left[(h_0 - y_0^{(+)}) + h_1^{(-)} + \frac{h_2^{(-)}}{2} \right] - E_1^{(-)} b_1^{(-)} h_1^{(-)} \times \\ & \times \left[(h_0 - y_0^{(+)}) + \frac{h_1^{(-)}}{2} \right] - E_0 b_0 \frac{(h_0 - y_0^{(+)})^2}{2} + E_0 b_0 y_0^{(+)} \frac{y_0^{(+)}}{2} + \\ & + E_1^{(+)} b_1^{(+)} h_1^{(+)} (y_0^{(+)} + \frac{h_1^{(+)}}{2}) + E_2^{(+)} b_2^{(+)} h_2^{(+)} (y_0^{(+)} + h_1^{(+)} + \frac{h_2^{(+)}}{2}) = 0. \end{aligned}$$

Решая это уравнение, получаем искомую величину $y_0^{(+)}$, что определяет положение нейтральной линии (линии X):

$$Y_0^{(+)} = \frac{S_{np}}{A_{np}}. \quad (9)$$

Здесь

$$A_{np} = E_2^{(-)} b_2^{(-)} h_2^{(-)} + E_1^{(-)} b_1^{(-)} h_1^{(-)} + E_0 b_0 h_0 + E_1^{(+)} b_1^{(+)} h_1^{(+)} + E_2^{(+)} b_2^{(+)} h_2^{(+)};$$

$$\begin{aligned} S_{np} = & E_2^{(-)} b_2^{(-)} h_2^{(-)} h_0 + E_2^{(-)} b_2^{(-)} h_2^{(-)} \left(h_1^{(-)} + \frac{h_2^{(-)}}{2} \right) + E_1^{(+)} b_1^{(+)} h_1^{(+)} h_0 + \\ & + E_1^{(-)} \frac{b_1^{(-)} (h_1^{(-)})^2}{2} + E_0 \frac{b_0 h_0^2}{2} - E_1^{(+)} \frac{b_1^{(+)} (h_1^{(+)})^2}{2} - E_2^{(+)} b_2^{(+)} h_2^{(+)} \left(h_1^{(+)} + \frac{h_2^{(+)}}{2} \right). \end{aligned}$$

Вычисляем моменты инерции в формуле (5), которая получает вид:

$$EI = E_2^{(-)} I_x^{(2)(-)} + E_1^{(-)} I_x^{(1)(-)} + E_0^{(-)} I_x^{(0)(-)} + E_0^{(+)} I_x^{(0)(+)} + E_1^{(+)} I_x^{(1)(+)} + E_2^{(+)} I_x^{(2)(+)}.$$

Здесь

$$I_x^{(2)(-)} = \frac{b_2^{(-)} [h_2^{(-)}]^3}{12} + b_2^{(-)} h_2^{(-)} \left[h_0 - y_2^{(-)} + h_1^{(-)} + \frac{h_2^{(-)}}{2} \right]^2;$$

$$I_x^{(1)(-)} = \frac{b_1^{(-)} [h_1^{(-)}]^3}{12} + b_1^{(-)} h_1^{(-)} \left[h_0 - y_0^{(-)} + \frac{h_1^{(-)}}{2} \right]^2;$$

$$I_x^{(0)(-)} = \frac{b_0 [h_0 - y_0^{(+)}]^3}{12} + b_0 (h_0 - y_0^{(+)}) \left[\frac{h_0 - y_0^{(+)}}{2} \right]^2;$$

$$I_x^{(0)(+)} = \frac{b_0 [y_0^{(+)}]^3}{12} + b_0 y_0^{(+)} \left[\frac{y_0^{(+)}}{2} \right]^2;$$

$$I_x^{(1)(+)} = \frac{b_1^{(+)} [h_1^{(+)}]^3}{12} + b_1^{(+)} h_1^{(+)} \left[y_0^{(+)} \frac{h_1^{(+)}}{2} \right]^2;$$

$$I_x^{(2)(+)} = \frac{b_2^{(+)} [h_2^{(+)}]^3}{12} + b_2^{(+)} h_2^{(+)} \left[y_0^{(+)} + h_1^{(+)} \frac{h_2^{(+)}}{2} \right]^2.$$

Если балка с поперечным сечением, показанным на рис. 1, будет выполнена из однородного материала с модулем упругости E , то положение нейтральной линии будет определяться из уравнения:

$$-S_x^{(2)(-)} - S_x^{(1)(-)} - S_x^{(0)(-)} + S_x^{(0)(+)} + S_x^{(1)(+)} + S_x^{(2)(+)} = 0. \quad (11)$$

Тогда

$$y_0^{(+)} = \frac{S}{A}. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= b_2^{(-)} h_2^{(-)} + b_1^{(-)} h_1^{(-)} + b_0 h_0 + b_1^{(+)} h_1^{(+)} + b_2^{(+)} h_2^{(+)}; \\ S &= b_2^{(-)} h_2^{(-)} h_0 + b_2^{(-)} h_2^{(-)} \left(h_1^{(-)} + \frac{h_2^{(-)}}{2} \right) + b_1^{(-)} h_1^{(-)} h_0 + \\ &+ b_1^{(-)} h_1^{(-)} \frac{h_1^{(-)}}{2} + b_0 \frac{h_0^2}{2} - b_1^{(+)} h_1^{(+)} \frac{h_1^{(+)}}{2} - b_2^{(+)} h_2^{(+)} \left(h_1^{(+)} \frac{h_2^{(+)}}{2} \right). \end{aligned}$$

Далее вычисляем величину EI (формула (5)):

$$EI = E \left(I_x^{(2)(-)} + I_x^{(1)(-)} + I_x^{(0)(-)} + I_x^{(0)(+)} + I_x^{(1)(+)} + I_x^{(2)(+)} \right) \quad (13)$$

Исходные данные для численных расчётов:

$$E_2^{(+)} = 100000 \text{ МПа}, E_1^{(+)} = 50000 \text{ МПа}, E_0 = 200000 \text{ МПа},$$

$$E_1^{(-)} = 25000 \text{ МПа}, E_2^{(-)} = 150000 \text{ МПа};$$

$$b_2^{(+)} = 20 \text{ см}, b_1^{(+)} = 16 \text{ см}, b_0 = 4 \text{ см}, b_1^{(-)} = 8 \text{ см}, b_2^{(-)} = 12 \text{ см};$$

$$h_2^{(+)} = 5 \text{ см}, h_1^{(+)} = 3 \text{ см}, h_0 = 12 \text{ см}, h_1^{(-)} = 6 \text{ см}, h_2^{(-)} = 4 \text{ см}.$$

Тогда, в соответствии с формулой (9)

$$y_0^{(+)} = \frac{S_{np}}{A_{np}} = 5,79 \text{ см};$$

и в соответствии с формулой (10)

$$EI = 31092701,75 \text{ кН} \cdot \text{см}^2;$$

в соответствии с формулой (12)

$$y_0^{(+)} = \frac{S}{A} = 4,71 \text{ см};$$

в соответствии с формулой (13)

$$\frac{EI}{E} = I_x^{(2)(-)} + I_x^{(1)(-)} + I_x^{(0)(-)} + I_x^{(0)(+)} + I_x^{(1)(+)} + I_x^{(2)(+)} = 30091,33 \text{ см}^4.$$

Случай I. Консольная балка длиной $l = 4 \text{ м}$ нагружена сосредоточенной силой $F = 25 \text{ кН}$ на конце консоли. Тогда $M_x(z) = -Fz$. Решение дифференциального уравнения (6), как известно, имеет вид:

$$v(z) = -\frac{Fz^3}{6EI} + \frac{Fl^2z}{2EI} - \frac{Fl^3}{3EI},$$

то есть $v(0) = -\frac{Fl^3}{3EI} = -1,72 \text{ см}.$

Если балку выполнить из однородного материала с модулем упругости $E = E^{\max} = E_0$, то в соответствии с формулой (13) $EI = 601826555,86 \text{ кН} \cdot \text{см}^2$ и,

следовательно, $v(0) = -\frac{Fl^3}{3EI} = -0,89 \text{ см}.$

Если балку выполнить из однородного материала с модулем упругости $E = E^{\min} = E_2^{(-)}$, то в соответствии с формулой (13) $EI = 75228319,48 \text{ кН} \cdot \text{см}^2$

и, следовательно, $v(0) = -\frac{Fl^3}{3EI} = -7,09 \text{ см}.$

Случай II. Консольная балка длиной $l = 4 \text{ м}$ нагружена сосредоточенной моментом $M = 5000 \text{ кН} \cdot \text{см}$ на конце консоли. Тогда $M_x(z) = -M$. Решение дифференциального уравнения (6), как известно, имеет вид:

$$v(z) = -\frac{Mz^2}{2EI} + \frac{Mz^2}{EI} \frac{Ml^2}{2EI},$$

то есть $v(0) = -\frac{Ml^2}{2EI} = -1,29 \text{ см.}$

Если балку выполнить из однородного материала с модулем упругости $E = E^{\max} = E_0$, то в соответствии с формулой (13) $EI = 601826555,86 \text{ кН} \cdot \text{см}^2$ и, следовательно, $v(0) = -\frac{Ml^2}{2EI} = -0,66 \text{ см.}$

Если балку выполнить из однородного материала с модулем упругости $E = E^{\min} = E_2^{(-)}$, то в соответствии с формулой (13) $EI = 75228319,48 \text{ кН} \cdot \text{см}^2$ и, следовательно, $v(0) = -\frac{Ml^2}{2EI} = -5,32 \text{ см.}$

Случай III. Консольная балка длиной $l = 4 \text{ м}$ нагружена равномерно распределённой нагрузкой $q = 0,15 \text{ кН} / \text{см}$ по всей длине. Тогда $M_x(z) = -q \frac{z^2}{2}$.

Решение дифференциального уравнения (6), как известно, имеет вид:

$$v(z) = -\frac{qz^4}{24EI} + \frac{qz^3}{6EI} \frac{ql^4}{8EI},$$

то есть $v(0) = -\frac{ql^4}{8EI} = -1,54 \text{ см.}$

Если балку выполнить из однородного материала с модулем упругости $E = E^{\max} = E_0$, то в соответствии с формулой (13) $EI = 601826555,86 \text{ кН} \cdot \text{см}^2$ и, следовательно, $v(0) = -\frac{ql^4}{8EI} = -0,80 \text{ см.}$

Если балку выполнить из однородного материала с модулем упругости $E = E^{\min} = E_2^{(-)}$, то в соответствии с формулой (13) $EI = 75228319,48 \text{ кН} \cdot \text{см}^2$ и, следовательно, $v(0) = -\frac{ql^4}{8EI} = -6,38 \text{ см}$.

Поперечное сечение балки (рис. 1) напоминает двутавр. Ввиду этого для двутавра №30 ($E = 200000 \text{ МПа}$) прогибы конца консоли будут равны:

- в случае I: $v(0) = -\frac{Fl^3}{3EI} = -3,77 \text{ см};$

- в случае II: $v(0) = -\frac{Ml^2}{2EI} = -2,82 \text{ см};$

- в случае III: $v(0) = -\frac{ql^4}{8EI} = -3,39 \text{ см}.$

Выводы.

1. Прогибы неоднородной многослойной консольной балки больше чем прогибы однородной консольной балки, выполненной из материала с модулем упругости, соответствующем наибольшему из модулей упругости слоёв неоднородной балки и меньше, чем прогибы однородной консольной балки, выполненной из материала с модулем упругости, соответствующем наименьшему из модулей упругости слоёв неоднородной балки.
2. Прогибы неоднородной многослойной консольной балки значительно меньше прогибов соответствующей (имеющей ту же высоту поперечного сечения) балки, выполненной из двутавра.
3. Результаты данной работы могут найти применение при оптимизации многослойных неоднородных балок из условия жёсткости.

Библиографический список:

1. *Александров А.В.* Сопротивление материалов: Учеб для вузов/А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. Под ред. А.В. Александрова. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2008. – 560 с.: ил.
2. *Мельникова Т.Е., Елесина Е.И.* Анализ несущей способности многослойной балки при изгибе // Прикладная математика, механика и процессы управления. 2015. Т. 1. С. 28-34.
3. *Турусов Р.А., Андреев В.И., Цыбин Н.Ю.* Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 4. С. 34-42.
4. *Горунович С.Б.* Анализ напряженно-деформированного состояния многослойной балки при поперечном изгибе // Механики XXI века. 2019. № 18. С. 291-296.
5. *Горунович С.Б.* Расчет на прочность многослойной балки при поперечном изгибе методами сопротивления материалов // Механики XXI века. 2020. № 19. С. 246-251.
6. *Ряжских Б.Е., Джавид М.М.* Анализ применяемых методик вычисления прочности нормального сечения многослойных изгибаемых элементов строительных конструкций // Инженерный вестник Дона. 2023. № 8 (104). С. 68-89.
7. *Чепурненко А.С., Тюрина В.С.* Применение метода конечных элементов в сочетании с методом контактного слоя для определения напряженно-деформированного состояния многослойных балок // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 4. С. 130-139
8. *Бубис А.А., Ведяков И.И., Кахновский А.М., Конин Д.В., Малкин А.В., Петросян А.И., Ртищева И.В.* Исследование работы конструкций из многослойного стекла на сжатие, сжатие с изгибом и чистый изгиб // Промышленное и гражданское строительство. 2019. № 1. С. 22-30.

9. Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А. Математическая модель деформации трёхслойных стержней при пространственных нагрузках // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2023. № 5 (52). С. 56-82.