

УДК 539.3/.6

ЖЁСТКОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СКРУЧИВАЕМЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза.*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Середнев Александр Анатольевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

студент.

Аннотация

Рассматривается неоднородный многослойный сплошной упругий и упругопластический стержень, находящийся в условиях кручения. Определяются напряжения и углы закручивания для двух случаев деформирования. В первом случае все слои стержня работают в соответствии с законом Гука. Во втором случае часть слоёв работает в упругой стадии, а другая часть в пластической – в соответствии с диаграммой Прандтля. Показано, что в первом случае угол закручивания неоднородного многослойного упругого стержня прямо пропорционален внешнему крутящему моменту и обратно пропорционален сумме жёсткостей на кручение всех слоёв стержня. Во втором случае угол закручивания неоднородного многослойного упругопластического стержня прямо пропорционален приведённому внешнему крутящему моменту и обратно пропорционален сумме жёсткостей на кручение всех упругих слоёв стержня. Отмечено, что использование пластических слоёв, материал которых работает в соответствии с диаграммой Прандтля, в многослойном неоднородном стержне позволяет регулировать как жёсткость, так и прочность стержня при заданных габаритных размерах и углах поворота поперечных сечений.

Ключевые слова: стержень, неоднородность, упругость, пластичность, кручение, углы закручивания.

STIFFNESS OF MULTILAYER INHOMOGENEOUS TWISTED ELASTOPLASTIC RODS

Bakushev Sergey Vasilevish

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Serednev Alexander Anatolyevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

A heterogeneous multilayer solid elastic and elastoplastic rod under torsional conditions is considered. Stresses and torsion angles are determined for the two deformation cases. In the first case, all the layers of the rod work in accordance with Hooke's law. In the second case, some of the layers work in the elastic stage, and the other part in the plastic stage – in accordance with the Prandtl diagram. It is shown that in the first case, the angle of twisting of an inhomogeneous multilayer elastic rod is directly proportional to the external torque and inversely proportional to the sum of torsional stiffnesses of all layers of the rod. In the second case, the angle of twisting of an inhomogeneous multilayer elastoplastic rod is directly proportional to the reduced external torque and inversely proportional to the sum of torsional stiffnesses of all elastic layers of the member. It is noted that the use of plastic layers, the material of which works in accordance with the Prandtl diagram, in a multilayer inhomogeneous rod makes it possible to adjust both the stiffness and strength of the rod at the given overall dimensions and angles of rotation of cross-sections.

Keywords: rod, heterogeneity, elasticity, plasticity, torsion, twisting angles.

Введение

Вопросам кручения однородных и неоднородных, упругих и упругопластических стержней круглого и произвольного поперечных сечений посвящены многие работы отечественных и зарубежных учёных. Следует отметить монографии, посвящённые вопросам кручения [1 - 4], а также статьи [5 - 14].

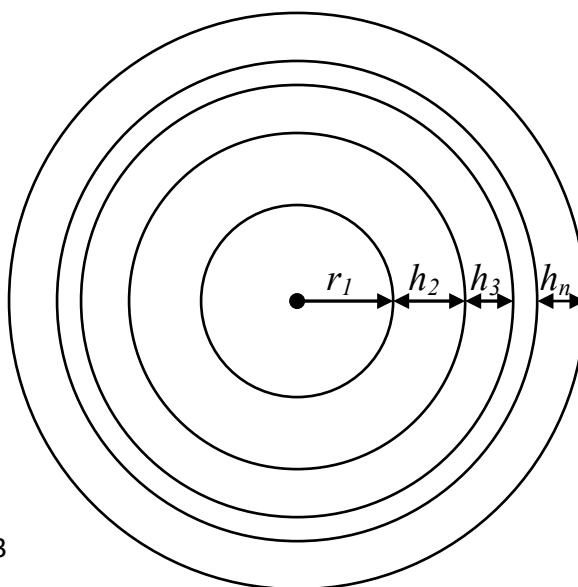
При исследовании кручения многослойных неоднородных упругопластических стержней круглого или кольцевого поперечного сечения будем придерживаться следующих гипотез, справедливых при кручении однородных упругопластических стержней [15]: сечения, плоские до закручивания, остаются плоскими и после закручивания; радиусы, проведённые мысленно в любом поперечном сечении, в процессе кручения не искривляются.

Далее будем полагать, что слои стержня не проскальзывают одно относительно другого. Деформации считаются малыми. Стержень находится под воздействием только крутящих моментов, действующих в нормальных поперечных сечениях стержня.

В силу введённых выше гипотез, угол сдвига γ_ρ произвольного волокна, отстоящего от центра стержня на расстоянии ρ , определяется как для однородных однослойных, так и неоднородных многослойных упругопластических стержней равенством:

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (1)$$

Рассмотрим стержень со сплошным круглым поперечным сечением (рис. 1), состоящим из n — слоёв: внутренний (первый от центра круга) слой радиусом r_1 , изготовлен из материала с модулем сдвига G_1 ;



внутренний (второй от центра круга) слой толщиной h_2 , изготовлен из материала с модулем сдвига G_2 ; внешний n — ый слой толщиной h_n , изготовлен из материала с модулем сдвига G_n .

Упругая деформация стержня.

Для многослойного сплошного стержня (рис. 1), все слои которого деформируются в соответствии с законом Гука, касательные напряжения в каждом слое будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \gamma_\rho G_1 = \rho_1 \frac{d\varphi}{dz} G_1, \quad 0 \leq \rho_1 \leq r_1; \\ \tau_2 &= \gamma_\rho G_2 = \rho_2 \frac{d\varphi}{dz} G_2, \quad r_1 \leq \rho_2 \leq r_1 + h_2; \\ &\dots \\ \tau_n &= \gamma_\rho G_n = \rho_n \frac{d\varphi}{dz} G_n, \\ &r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1} \leq \rho_n \leq r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь n — количество слоёв в разнородном многослойном сплошном скручиваемом стержне.

Найдём суммарный внутренний крутящий момент M_z , равный внешнему крутящему моменту $M_{кр}$, скручивающему стержень:

$$\begin{aligned}M_z &= \int_{A_1} \tau_1 \rho_1 dA + \int_{A_2} \tau_2 \rho_2 dA + \dots + \int_{A_n} \tau_n \rho_n dA = \\ &= \int_{A_1} \rho_1 \frac{d\varphi}{dz} G_1 \rho_1 dA + \int_{A_2} \rho_2 \frac{d\varphi}{dz} G_2 \rho_2 dA + \dots + \int_{A_n} \rho_n \frac{d\varphi}{dz} G_n \rho_n dA = \\ &= \frac{d\varphi}{dz} G_1 \int_{A_1} \rho_1^2 dA + \frac{d\varphi}{dz} G_2 \int_{A_2} \rho_2^2 dA + \dots + \frac{d\varphi}{dz} G_n \int_{A_n} \rho_n^2 dA = \\ &= \frac{d\varphi}{dz} (G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь $I_{1\rho} = \frac{\pi r_1^4}{2}$ — полярный момент инерции первого (от центра круга) слоя;

$I_{2\rho} = \frac{\pi}{2} \left[(r_1 + h_2)^4 - r_1^4 \right]$ — полярный момент инерции второго (от центра круга) слоя;

$I_{n\rho} = \frac{\pi}{2} \left[(r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n)^4 - (r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1})^4 \right]$ — полярный момент инерции внешнего слоя.

Из формулы (3) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}}. \quad (4)$$

Подставляя найденное значение $\frac{d\varphi}{dz}$ в формулы (2), найдём касательные

напряжения в каждом слое скручиваемого многослойного сплошного упругого стержня:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{M_z G_1 \rho_1}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}}, \quad 0 \leq \rho_1 \leq r_1; \\ \tau_2 &= \frac{M_z G_2 \rho_2}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}}, \quad r_1 \leq \rho_2 \leq r_1 + h_2; \\ &\dots \\ \tau_n &= \frac{M_z G_n \rho_n}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}}, \\ &\quad r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1} \leq \rho_n \leq r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Пример 1.

Рассмотрим упругий консольный стержень, длиной $l = 2\text{ м}$, сплошного поперечного пятислойного сечения, нагруженный на конце консоли крутящим моментом $M_{кр} = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Требуется определить угол закручивания конца консоли.

Исходные данные:

$G_1 = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ (сталь углеродистая);

$G_2 = 4,9 \cdot 10^4$ МПа (медь холодноотянутая);

$G_3 = 4,2 \cdot 10^4$ МПа (алюминевая бронза);

$G_4 = 2,7 \cdot 10^4$ МПа (дюралюмин катаный); $G_5 = 0,7 \cdot 10^4$ МПа (свинец).

$r_1 = 2,5$ см; $h_2 = 1$ см; $h_3 = 3$ см; $h_4 = 2$ см; $h_5 = 1,5$ см.

Из соотношения (4) получаем:

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_0^l \frac{M_z dz}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho} + G_4 I_{4\rho} + G_5 I_{5\rho}} = \\ &= \frac{M_z l}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho} + G_4 I_{4\rho} + G_5 I_{5\rho}} = 0,04043 \text{ рад.} = 2,316^\circ\end{aligned}$$

Консольный стержень, длиной $l = 2$ м, диаметром $d = 20$ см, выполненный из стали углеродистой $G = 8,1 \cdot 10^4$ МПа и нагруженный на конце консоли моментом $M_{кр} = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}$, закрутится на угол

$$\varphi = \frac{M_z l}{G I_\rho} = 0,01572 \text{ рад.} = 0,901^\circ.$$

Консольный стержень, длиной $l = 2$ м, диаметром $d = 20$ см, выполненный из дюралюмина катанного $G = 2,7 \cdot 10^4$ МПа и нагруженный на конце консоли моментом $M_{кр} = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}$, закрутится на угол

$$\varphi = \frac{M_z l}{G I_\rho} = 0,04716 \text{ рад.} = 2,702^\circ.$$

Упругопластическая деформация стержня.

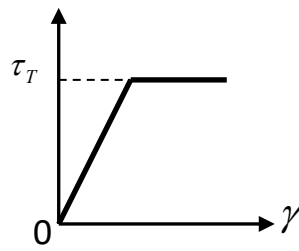
Рассмотрим случай, когда m внутренних слоёв находятся в стадии упругого деформирования (рис. 2, б), а все остальные $n - m$ внешних слоёв деформируются в соответствии с диаграммой Прандтля (рис. 2, а).

Внутренний крутящий момент при этом будет определяться следующим образом:

$$M_z = \int_{A_1} \tau_1 \rho_1 dA + \int_{A_2} \tau_2 \rho_2 dA + \dots + \int_{A_m} \tau_m \rho_m dA +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{A_{m+1}} \tau_T^{(m+1)} \rho_{m+1} dA + \dots + \int_{A_n} \tau_T^{(n)} \rho_n dA = \\
& = \int_{A_1} G_1 \rho_1 \frac{d\varphi}{dz} \rho_1 dA + \int_{A_2} G_2 \rho_2 \frac{d\varphi}{dz} \rho_2 dA + \dots + \int_{A_m} G_m \rho_m \frac{d\varphi}{dz} \rho_m dA + \\
& + \int_{A_{m+1}} \tau_T^{(m+1)} \rho_{m+1} dA + \dots + \int_{A_n} \tau_T^{(n)} \rho_n dA = \\
& = G_1 \frac{d\varphi}{dz} \int_{A_1} \rho_1^2 dA + G_2 \frac{d\varphi}{dz} \int_{A_2} \rho_2^2 dA + \dots + G_m \frac{d\varphi}{dz} \int_{A_m} \rho_m^2 dA + \\
& + \int_{A_{m+1}} \tau_T^{(m+1)} \rho_{m+1} dA + \dots + \int_{A_n} \tau_T^{(n)} \rho_n dA = \\
& = G_1 \frac{d\varphi}{dz} I_{1\rho} + G_2 \frac{d\varphi}{dz} I_{2\rho} + \dots + G_m \frac{d\varphi}{dz} I_{m\rho} + \\
& + \frac{2}{3} \pi \left[(r_1 + h_2 + \dots + h_{m+1})^3 - (r_1 + h_2 + \dots + h_m)^3 \right] \tau_T^{(m+1)} + \dots + \\
& + \frac{2}{3} \pi \left[(r_1 + h_2 + \dots + h_n)^3 - (r_1 + h_2 + \dots + h_{n-1})^3 \right] \tau_T^{(n)}. \quad (6)
\end{aligned}$$

а.



б.

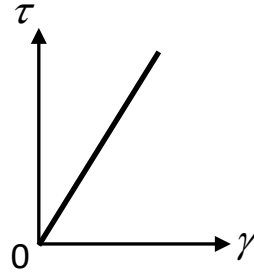


Рисунок 2 - Графики

Здесь

$\tau_T^{(m+1)}, \dots, \tau_T^{(n)}$ – пределы текучести материалов слоёв с $(m + 1)$ – ого по n – ый.

$$I_{1\rho} = \int_{A_1} \rho_1^2 dA = \frac{\pi r_1^4}{2} - \text{полярный момент инерции первого (от центра круга)}$$

слоя стержня;

$$I_{2\rho} = \int_{A_2} \rho_2^2 dA = \frac{\pi}{2} \left[(r_1 + h_2)^4 - r_1^4 \right] - \text{полярный момент инерции второго (от}$$

центра круга) слоя стержня;

$$I_{m\rho} = \int_{A_m} \rho_m^2 dA = \frac{\pi}{2} \left[(r_1 + h_2 + \dots + h_m)^4 - (r_1 + h_2 + \dots + h_{m-1})^4 \right] - \text{полярный}$$

момент инерции m -ого (от центра круга) слоя стержня.

Из соотношения (6) находим:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{np}}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_m I_{m\rho}}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} M_{np} = & M_x - \frac{2}{3} \pi \left[(r_1 + h_2 + \dots + h_{m+1})^3 - (r_1 + h_2 + \dots + h_m)^3 \right] \tau_T^{(m+1)} - \dots \\ & \dots - \frac{2}{3} \pi \left[(r_1 + h_2 + \dots + h_n)^3 - (r_1 + h_2 + \dots + h_{n-1})^3 \right] \tau_T^{(n)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя найденное значение $\frac{d\varphi}{dz}$ в формулы (2), найдём касательные

напряжения в каждом упругом слое многослойного сплошного упругопластического стержня:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{M_{np} G_1 \rho_1}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_{n-1} I_{m\rho}}, \quad 0 \leq \rho_1 \leq r_1; \\ \tau_2 &= \frac{M_{np} G_2 \rho_2}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_{n-1} I_{m\rho}}, \quad r_1 \leq \rho_2 \leq r_1 + h_2; \end{aligned} \quad (9)$$

...

$$\tau_m = \frac{M_{np} G_m \rho_m}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_{n-1} I_{m\rho}},$$

$$r_1 + h_2 + \dots + h_{m-1} \leq \rho_m \leq r_1 + h_2 + \dots + h_m.$$

В остальных $(n-m)$ слоях скручиваемого стержня касательные напряжения равны пределам текучести материалов этих слоёв:

$$\tau_{m+1} = \tau_T^{(m+1)}; \quad \tau_{m+2} = \tau_T^{(m+2)}; \quad \dots; \quad \tau_n = \tau_T^{(n)} \quad (10)$$

Следует отметить, что всё вышесказанное для упругопластического деформирования неоднородного многослойного скручиваемого стержня остаётся справедливым, если слои, находящиеся в пластическом деформировании и работающие в соответствии с диаграммой Прандтля, находятся в разных местах поперечного сечения, например, занимают третий и пятый слои.

Пример 2.

Рассмотрим упругопластический консольный стержень, длиной $l=2\text{ м}$, сплошного поперечного пятислойного сечения, нагруженный на конце консоли крутящим моментом $M_{кр}=100\text{ кН}\cdot\text{м}$. Требуется определить угол закручивания конца консоли.

Исходные данные:

$$G_1 = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа (сталь углеродистая);}$$

$$G_2 = 4,9 \cdot 10^4 \text{ МПа (медь холодноотянутая);}$$

$$G_3 = 4,2 \cdot 10^4 \text{ МПа (алюминевая бронза);}$$

$$\tau_T^{(4)} = 70 \text{ МПа (алюминий);} \quad \tau_T^{(5)} = 10 \text{ МПа (свинец).}$$

$$r_1 = 2,5 \text{ см; } h_2 = 1 \text{ см; } h_3 = 3 \text{ см; } h_4 = 2 \text{ см; } h_5 = 1,5 \text{ см.}$$

На основании соотношений (8) и (7) получаем:

$$\begin{aligned} M_{np} &= M_x - \frac{2}{3} \pi \left[(r_1 + h_2 + h_3 + h_4)^3 - (r_1 + h_2 + h_3)^3 \right] \tau_T^{(4)} - \\ &\quad - \frac{2}{3} \pi \left[(r_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)^3 - (r_1 + h_2 + h_3 + h_4)^3 \right] \tau_T^{(5)} = \\ &= 4214,666 \text{ кН}\cdot\text{см;} \end{aligned}$$

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{np} dz}{G_1 I_{1p} + G_2 I_{2p} + G_3 I_{3p}} = \frac{M_{np} l}{G_1 I_{1p} + G_2 I_{2p} + G_3 I_{3p}} =$$

$$= 0,07233 \text{ рад.} = 4,145^\circ.$$

Если поменять пластический четвёртый и упругий третий слои стержня местами, то упругими слоями в стержне будут первый, второй и четвёртый, а пластическими - третий и пятый. В этом случае решение данной задачи будет следующим:

$$G_1 = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа (сталь углеродистая);}$$

$$G_2 = 4,9 \cdot 10^4 \text{ МПа (медь холодноотянутая);}$$

$$\tau_T^{(3)} = 70 \text{ МПа (алюминий);}$$

$$G_4 = 4,2 \cdot 10^4 \text{ МПа (алюминевая бронза); } \tau_T^{(5)} = 10 \text{ МПа (свинец).}$$

$$r_1 = 2,5 \text{ см; } h_2 = 1 \text{ см; } h_3 = 2 \text{ см; } h_4 = 3 \text{ см; } h_5 = 1,5 \text{ см.}$$

$$M_{np} = M_x - \frac{2}{3} \pi \left[(r_1 + h_2 + h_3)^3 - (r_1 + h_2)^3 \right] \tau_T^{(3)} -$$

$$- \frac{2}{3} \pi \left[(r_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)^3 - (r_1 + h_2 + h_3 + h_4)^3 \right] \tau_T^{(5)} =$$

$$= 7381,298 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{np} dz}{G_1 I_{1p} + G_2 I_{2p} + G_4 I_{4p}} = \frac{M_{np} l}{G_1 I_{1p} + G_2 I_{2p} + G_4 I_{4p}} =$$

$$= 0,05044 \text{ рад.} = 2,890^\circ.$$

Выводы.

1. Жёсткость, то есть угол закручивания неоднородного многослойного упругого стержня прямо пропорциональна внешнему крутящему моменту и обратно пропорциональна сумме жёсткостей на кручение всех слоёв стержня.
2. Жёсткость, то есть угол закручивания неоднородного многослойного упругопластического стержня прямо пропорциональна приведённому

внешнему крутящему моменту и обратно пропорциональна сумме жёсткостей на кручение всех упругих слоёв стержня.

Заключение.

Использование пластических слоёв, материал которых работает в соответствии с диаграммой Прандтля, в многослойном неоднородном стержне позволяет регулировать как жёсткость, так и прочность стержня при заданных габаритных размерах и углах поворота поперечных сечений.

Библиографический список:

1. *Болотин В.* Механика многослойных конструкций / М.: Машиностроение, - 1980. - 375 с.
2. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. - 240 С.
3. *Чудаев Я.Ф.* Приближенный метод расчета призматических стержней на кручение.- Новокузнецк: -1971.- 244 С.
4. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.- 636 С.
5. *Сперроу, Ю.* Кручение упругих составных стержней произвольного сечения //Конструирование и технология машиностроения. М.: Мир, 1968. - № 3. - С. 10-17.
6. *Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б.* К вопросу кручения неоднородных стержней, находящихся под действием внешнего давления. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 42-46.
7. *Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б.* Кручение неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала при линеаризованном условии пластичности. // Вестник Чувашского государственного

- педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 3-10.
8. *Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б.* Кручение неоднородного цилиндрического стержня с эллиптическим сечением. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3 (37). С. 173-177.
 9. *Миронов Б.Г.* О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3 (33). С. 96-101.
 10. *Балашникова А.В., Миронов Б.Г.* О кручении неоднородных цилиндрических и призматических стержней. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 144-148.
 11. *Долгова Т.Г., Миронов Б.Г.* К вопросу о кручении неоднородных стержней. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 169-175.
 12. *Деревянных Е.А., Миронов Б.Г.* Кручение кусочно-неоднородных цилиндрических стержней. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 157-165.
 13. *Деревянных Е.А., Миронов Б.Г.* К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 105-111.
 14. *Миронов Б.Г.* К теории кручения неоднородных стержней. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 236-240.

15. Сопротивление материалов. Под ред. А.Ф. Смирнова. Учебник для вузов.
Изд. 3-е, перераб и доп. М., «Высш. школа», 1975. 480 с.