УДК 624.042.8

ОБЩИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ФЕРМЫ

Евсеев Александр Евгеньевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,

г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика»,

Евсеев Илья Александрович,

ООО «СФ ТЦС»,

г.Москва,

инженер-конструктор.

Баев Максим Викторович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,

г. Пенза,

инженер.

Аннотация

В настоящей статье рассматривается алгоритм явного интегрирования уравнений движения системы тел в общем виде, связанных между собой стержням пространственной фермы. При этом форма этих уравнений настолько проста что позволяет организовать вычислительный процесс без решения системы уравнений на каждом шаге.

Прямолинейность и простота алгоритма динамического расчета позволяет распространить его на решение задач статики и устойчивости конструкций, а также на определение их надежности.

Ключевые слова: строительная механика, колебания, динамика, статика, устойчивость, надежность, деформации.

A GENERAL APPROACH TO SOLVING PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS AND RELIABILITY OF STRUCTURES CONSISTING OF TRUSS ELEMENTS

Evseev Alexander Evgenievich,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza
Candidate of Sciences, Associate Professor of the Department of "Mechanics".
Evseev Ilya Aleksandrovich,
BF HCS LLC, Moscow,
Engineer.
Baev Maxim Viktorovich,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Engineer.

Abstract

This article discusses an algorithm for explicitly integrating the equations of motion for a general system of bodies interconnected by the members of a spatial truss. The form of these equations is so simple that it allows for the computational process to be organized without solving the system of equations at each step.

The straightforwardness and simplicity of the dynamic calculation algorithm allows it to be extended to solving problems of statics and structural stability, as well as determining their reliability.

Keywords: structural mechanics, vibrations, dynamics, statics, stability, reliability, deformations.

Современные инженерные задачи требуют высокоточного прогнозирования поведения конструкций под действием разнообразных нагрузок. Ключевую роль в решении этой проблемы играют вычислительные методы механики деформируемого твёрдого тела. В данной работе ограничимся рассмотрением лишь стержневого элемента с цилиндрическими (для плоской системы) или шаровыми (для пространственной системы) шарнирами по концам, так называемый одномерный симплекс на прямой. Однако надо полагать что все сказанное ниже для стержневого элемента безусловно будет относиться и к симплексам большей размерности (2-мерный – треугольник и 3-мерный - тетраэдр).

Учитывая вышесказанное, будем рассматривать произвольную систему, которую можно собрать из стержней, работающих на растяжение и сжатие шарнирно прикрепленных к узлам конструкции. Первоначально стержни будем полагать упругими подчиняющимися закону Гука.

Ключевой этап шагового численного решения динамической задачи заключается в определении вектора состояния системы в момент времени $t+\Delta t$ при условии задания её состояния в начальный момент t. Данный процесс составляет основу итерационной процедуры моделирования динамики системы. Когда мы говорим о «состоянии системы», мы имеем в виду полный набор данных, позволяющий однозначно определить её конфигурацию и динамику в конкретный момент времени. В рассматриваемой задаче это координаты каждой узловой точки (где она находится в пространстве) и скорости каждой узловой точки (как и в каком направлении она движется). Без этих данных невозможно предсказать эволюцию системы во времени.

В рамках рассматриваемой задачи классификация системы как статически определимой, статически неопределимой или геометрически изменяемой не играет роли. Существенно лишь то, что система образована невесомыми стержнями и узловыми точками, в которых сосредоточены массы.

Пусть для каждого стержня известна его первоначальная длина l_0 (длина, которую имеет стержень при отсутствии растягивающего усилия и нагрева). Каждый стержень имеет площадь поперечного сечения A и модуль упругости материала E, их произведение называют «осевой жесткостью» или «жесткостью при растяжении и сжатии». Пусть продольная сила в стержне определяется в соответствии с законом Гука

$$N=\frac{\Delta l}{l_0}EA=\frac{l-l_0}{l_0}EA. \qquad (1)$$

Пусть для каждого подвижного узла задана величина сосредоточенной в нём массы. Координаты закреплённых узлов являются известными параметрами. Координаты и составляющие скоростей подвижных узлов по координатным осям берутся из результатов предыдущего временного шага.

Пусть известны величины внешних сосредоточенных в узлах сил. Они могут быть постоянными и переменными, а также стохастическими. Если сила не постоянная, нам нужно знать, как именно её вычислять для любого момента времени. Например, для переменной силы это может быть формула, а для стохастической — правило генерации случайных значений с заданными параметрами.

Чтобы описать движение нашей системы, мы используем второй закон Ньютона — он даёт нам основные уравнения. Дальше нужно понять, какие усилия возникают в каждом стержне. Для этого мы применяем точные геометрические формулы. Вот как это работает на примере стержня между узлами «1» и «2». В любой момент времени длина стержня — это просто расстояние между этими двумя узлами. Это расстояние мы можем посчитать, если знаем координаты обоих узлов.

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Вычитая из текущей длины первоначальную, получаем удлинение $\Delta l=l-l_0$. Далее по формуле (1) найдем N. Представленный подход к расчёту продольной силы не зависит от конкретного стержня — он применим к любому элементу конструкции. Для каждого стержня идентифицируются соединяемые узлы, используются их текущие координаты, через геометрическое расстояние между узлами определяется длина стержня и, далее, продольная сила. Это обеспечивает единообразный расчёт всех продольных сил в системе.

По отношению к точечной массе узла «1» усилие в стержне есть внешняя сила. Её направляющие косинусы определяются через координаты углов

с осью X: $\cos\alpha=(x_2-x_1)/l;$

с осью Y: $\cos\beta=(y_2-y_1)/l;$

с осью Z: $\cos\gamma=(z_2-z_1)/l$.

Определим ускорение точки «1». По второму закону Ньютона ускорение, например, вдоль оси X определяется из выражения.

$$a_x=\frac{F_x}{m_1}. \qquad (2)$$

где F_x – сумма проекций на ось X усилий во всех примыкающих к узлу «1» с добавлением составляющей внешней силы P_x, приложенной в этом узле;

m_1 – узловая масса в первой точке.

Выражение (2) приведено для одной степени свободы. Однако для полного описания поведения системы необходимо составить аналогичные уравнения для всех её степеней свободы. В совокупности эти уравнения и образуют систему разрешающих уравнений, решение которой позволяет определить состояние системы в любой момент времени.

Нашей целью является получение состояния системы через достаточно малый промежуток времени Δt. В первом приближении можно предположить, что каждая составляющая ускорения остается постоянной в течении Δt. Применив формулы для равноускоренного движения, получим для выбранной точки:

$\Delta v_x=a_x\,\Delta t$ – приращение составляющей скорости

$\Delta x=v_{x0}\Delta t+v_x\dfrac{\Delta t^2}{2}$ - приращение смещения вдоль оси X.

Добавим к координатам и скоростям точек найденные приращения и получаем состояние системы в момент времени $t+\Delta t$, что завершает шаг. В дальнейшем шаг повторяется необходимое количество раз.

Разработанная вычислительная модель позволяет формализовать переход от одномерных аппроксимаций к двумерным (треугольным) и трёхмерным (тетраэдрическим) симплексам. Сохраняя при этом инвариантные свойства базисных функций при повышении размерности пространства и обеспечивая согласованность граничных условий на смежных элементах при сборке глобальной системы уравнений.

Данная функциональность критически важна для методов конечных элементов (МКЭ), где иерархическая структура симплексов определяет точность аппроксимации полей перемещений, напряжений и деформаций. Таким образом в будущем предполагается использовать МКЭ для дальнейшего углубленного рассмотрения данной темы.

Также предполагается возможность расчёта симплекс-элементов по критериям динамики, статики и устойчивости

Модель интегрирует алгоритмы для:

- динамического анализа: вычисление собственных частот и форм колебаний, моделирование переходных процессов с учётом инерционных членов;
- статического анализа: определение равновесных конфигураций при квазистатическом нагружении, расчёт распределённых и сосредоточенных нагрузок;
- анализа устойчивости: оценка критических нагрузок потери устойчивости (бифуркационных точек), анализ посткритического поведения конструкций.

Кроме того, возможен учёт нелинейностей в усложнённых постановках. Модель поддерживает моделирование следующих типов нелинейностей:

- геометрические нелинейности:
  - большие перемещения и повороты;
  - конечные деформации (использование мер деформации Грина-Лагранжа);
  - учёт изменения геометрии в процессе нагружения (update of tangent stiffness matrix).
- физические нелинейности:
  - пластичность (модели Прандтля-Рейсса, нелинейное изотропное упрочнение);
  - вязкоупругость (интегро-дифференциальные операторы);
  - нелинейная упругость (потенциалы Муни-Ривлина, Огдена).

- контактные нелинейности:
    - алгоритмы активного набора (active set strategy) для условий одностороннего контакта;
    - методы штрафных функций и множителей Лагранжа для обеспечения непроникания;
    - моделирование трения по закону Кулона с адаптивным определением зоны скольжения.

Предложенная модель обладает определённой методологической ценностью поскольку обеспечивает преемственность между классическими линейными постановками и современными нелинейными задачами, позволяет проводить мультимасштабный анализ (от микро- до макроуровня) за счёт масштабируемости симплекс-элементов, создаёт базу для интеграции с методами редукции моделей (POD, ROM) для снижения вычислительной сложности.

Таким образом, модель выступает не только как инструмент для решения узкоспециализированных задач, но и как универсальная платформа для развития теории и практики численного моделирования в механике деформируемого твёрдого тела.

Библиографический список:

1. Зылев В.Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. -М.: НИЦ «Инженер», 1999. -144 с.