

К ВОПРОСУ О РАВНОПРОЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация.

Рассматривается цилиндрический многослойный неоднородный упругий стержень, находящийся в условиях кручения под воздействием только крутящих моментов, действующих в нормальных поперечных сечениях стержня. Каждый слой обладает своим модулем сдвига и своим расчётным сопротивлением материала по касательным напряжениям. Слои стержня не проскальзывают одно относительно другого. Деформации считаются малыми. Определяются условия равнопрочности, заключающиеся в том, чтобы во всех слоях скручиваемого стержня предельное состояние наступало одновременно. Показано, что равнопрочность скручиваемого многослойного сплошного упругого цилиндрического стержня не зависит от действующей внешней нагрузки, а определяется лишь механическими характеристиками материалов и геометрическими размерами слоёв. Кроме того, численно показано, что выполнение условий равнопрочности скручиваемого цилиндрического многослойного неоднородного упругого стержня является труднодостижимым.

Ключевые слова: стержень, неоднородность, упругость, кручение, равнопрочность.

ON THE QUESTION OF EQUISTRENGTH OF INHOMOGENEOUS ELASTIC MEMBERS UNDER TORSION

Bakushev Sergey Vasilevish

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Abstract

A cylindrical multilayer inhomogeneous elastic rod is considered, which is under torsion conditions under the influence of only torques acting in the normal cross-sections of the member. Each layer has its own shear modulus and its own calculated shear resistance of the material. The layers of the rod do not slip relative to one another. Deformities are considered small. The conditions of equilibrium strength are determined, which consists in the fact that in all layers of the twisted rod the limit state occurs simultaneously. It is shown that the equistrength of a twisted multilayer solid elastic cylindrical rod does not depend on the acting external load, but is determined only by the mechanical characteristics of the materials and the geometric dimensions of the layers. In addition, it has been shown numerically that the fulfillment of the conditions of equilibrium strength of a twisted cylindrical multilayer inhomogeneous elastic rod is difficult to achieve.

Keywords: rod, heterogeneity, elasticity, torsion, equal strength.

Введение.

При исследовании кручения многослойных неоднородных упругих стержней круглого или кольцевого поперечного сечения будем придерживаться следующих гипотез, справедливых при кручении однородных стержней [1]: сечения, плоские до закручивания, остаются плоскими и после закручивания; радиусы, проведённые мысленно в любом поперечном сечении, в процессе кручения не искривляются.

Далее будем полагать, что слои стержня не проскальзывают одно относительно другого. Деформации считаются малыми. Стержень находится

под воздействием только крутящих моментов, действующих в нормальных поперечных сечениях стержня.

Одной из наиболее полных монографий, описывающих кручение упругих тел, является монография [2]. Вопросы механики многослойных конструкций рассматривались в работе [3]. Кручение анизотропных и неоднородных стержней исследовалось в монографии [4]. В последние годы вопросы кручения неоднородных и анизотропных упругопластических стержней исследовались в работах [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Стержень со сплошным круглым поперечным сечением.

Пусть стержень со сплошным круглым поперечным сечением (рис. 1) состоит из трёх слоёв: внутренний слой радиусом r_1 , изготовлен из материала с модулем сдвига G_1 и расчётным сопротивлением материала слоя по касательным напряжениям $R_\tau^{(1)}$; средний слой толщиной h_2 , изготовлен из материала с модулем сдвига G_2 и расчётным сопротивлением материала слоя по касательным напряжениям $R_\tau^{(2)}$; внешний слой толщиной h_3 , изготовлен из материала с модулем сдвига G_3 и расчётным сопротивлением материала слоя по касательным напряжениям $R_\tau^{(3)}$.

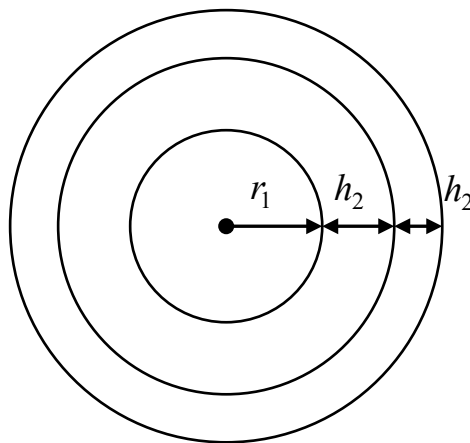


Рисунок 1 – сечение стержня

В силу введённых ранее гипотез, угол сдвига произвольного волокна, отстоящего от центра стержня на расстоянии ρ , определяется равенством:

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (1)$$

Тогда, в соответствии с законом Гука, касательные напряжения в слоях стержня будут определяться равенствами:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \gamma_\rho G_1 = \rho_1 \frac{d\varphi}{dz} G_1, \quad 0 \leq \rho_1 \leq r_1; \\
\tau_2 &= \gamma_\rho G_2 = \rho_2 \frac{d\varphi}{dz} G_2, \quad r_1 \leq \rho_2 \leq r_1 + h_2; \\
\tau_3 &= \gamma_\rho G_3 = \rho_3 \frac{d\varphi}{dz} G_3, \quad r_1 + h_2 \leq \rho_3 \leq r_1 + h_2 + h_3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Зная напряжения, действующие в слоях скручиваемого стержня, найдём суммарный внутренний крутящий момент M_z , равный внешнему крутящему моменту $M_{кр}$, скручивающему стержень:

$$\begin{aligned}
M_z &= \int_{A_1} \tau_1 \rho_1 dA + \int_{A_2} \tau_2 \rho_2 dA + \int_{A_3} \tau_3 \rho_3 dA = \int_{A_1} \rho_1 \frac{d\varphi}{dz} G_1 \rho_1 dA + \int_{A_2} \rho_2 \frac{d\varphi}{dz} G_2 \rho_2 dA + \\
&+ \int_{A_3} \rho_3 \frac{d\varphi}{dz} G_3 \rho_3 dA = \frac{d\varphi}{dz} G_1 \int_{A_1} \rho_1^2 dA + \frac{d\varphi}{dz} G_2 \int_{A_2} \rho_2^2 dA + \frac{d\varphi}{dz} G_3 \int_{A_3} \rho_3^2 dA = \\
&= \frac{d\varphi}{dz} G_1 I_{1\rho} + \frac{d\varphi}{dz} G_2 I_{2\rho} + \frac{d\varphi}{dz} G_3 I_{3\rho} = \frac{d\varphi}{dz} (G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $I_{1\rho} = \frac{\pi r_1^4}{2}$ – полярный момент инерции внутреннего слоя;

$I_{2\rho} = \frac{\pi}{2} [(r_1 + h_2)^4 - r_1^4]$ – полярный момент инерции среднего слоя;

$I_{3\rho} = \frac{\pi}{2} [(r_1 + h_2 + h_3)^4 - (r_1 + h_2)^4]$ – полярный момент инерции внешнего слоя.

Из формулы (3) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}}. \tag{4}$$

Подставляя найденное значение $\frac{d\varphi}{dz}$ в формулы (2), найдём касательные

напряжения в каждом слое скручиваемого многослойного стержня:

$$\tau_1 = \frac{M_z G_1 \rho_1}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}}, \quad 0 \leq \rho_1 \leq r_1;$$

$$\tau_2 = \frac{M_z G_2 \rho_2}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}}, \quad r_1 \leq \rho_2 \leq r_1 + h_2; \quad (5)$$

$$\tau_3 = \frac{M_z G_3 \rho_3}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}}, \quad r_1 + h_2 \leq \rho_3 \leq r_1 + h_2 + h_3.$$

В каждом слое по его толщине касательное напряжение, как следует из формул (5), изменяется по линейному закону, причём наибольшее значение касательное напряжение достигает на внешней границе слоя, то есть $\tau_1 = \tau_1^{\max}$ для $\rho_1 = r_1$; $\tau_2 = \tau_2^{\max}$ для $\rho_1 = r_1 + h_2$; $\tau_3 = \tau_3^{\max}$ для $\rho_1 = r_1 + h_2 + h_3$.

Условие равнопрочности заключается в том, чтобы во всех слоях скручиваемого стержня предельное состояние наступило одновременно, то есть:

$$\begin{aligned} \tau_1^{\max} &= \frac{M_z G_1 r_1}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}} = R_\tau^{(1)}; \\ \tau_2^{\max} &= \frac{M_z G_2 (r_2 + h_2)}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}} = R_\tau^{(2)}; \\ \tau_3^{\max} &= \frac{M_z G_3 (r_3 + h_2 + h_3)}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}} = R_\tau^{(3)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношения (6) приводятся к виду:

$$\frac{G_1 r_1}{R_\tau^{(1)}} = \frac{G_2 (r_1 + h_2)}{R_\tau^{(2)}} = \frac{G_3 (r_1 + h_2 + h_3)}{R_\tau^{(3)}}, \quad (7)$$

либо к виду:
$$\frac{G_1 R_\tau^{(2)}}{G_2 R_\tau^{(1)}} = \frac{r_1 + h_2}{r_1}; \quad \frac{G_2 R_\tau^{(3)}}{G_3 R_\tau^{(2)}} = \frac{r_1 + h_2 + h_3}{r_1 + h_2}. \quad (8)$$

Стержень с кольцевым поперечным сечением.

В стержне с кольцевым поперечным сечением касательные напряжения в каждом слое скручиваемого упругого стержня будут определяться соотношениями:

$$\tau_1 = \frac{M_z G_1 \rho_1}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}}, \quad r_0 \leq \rho_1 \leq r_0 + h_1;$$

$$\tau_2 = \frac{M_z G_2 \rho_2}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}}, \quad r_0 + h_1 \leq \rho_2 \leq r_0 + h_1 + h_2; \quad (9)$$

$$\tau_3 = \frac{M_z G_3 \rho_3}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}}, \quad r_0 + h_1 + h_2 \leq \rho_3 \leq r_0 + h_1 + h_2 + h_3.$$

Здесь r_0 – радиус полости;

h_1, h_2, h_3 – толщины первого, второго и третьего слоёв.

Полярные моменты инерции слоёв определяются формулами:

$$I_{1\rho} = \frac{\pi}{2} \left[(r_0 + h_1)^4 - r_0^4 \right] - \text{полярный момент инерции внутреннего слоя;}$$

$$I_{2\rho} = \frac{\pi}{2} \left[(r_0 + h_1 + h_2)^4 - (r_0 + h_1)^4 \right] - \text{полярный момент инерции среднего слоя;}$$

$$I_{3\rho} = \frac{\pi}{2} \left[(r_0 + h_1 + h_2 + h_3)^4 - (r_0 + h_1 + h_2)^4 \right] - \text{полярный момент инерции внешнего слоя.}$$

Максимальные касательные напряжения в каждом слое в момент наступления предельного равновесия будут определяться зависимостями:

$$\begin{aligned} \tau_1^{\max} &= \frac{M_z G_1 (r_0 + h_1)}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}} = R_\tau^{(1)}; \\ \tau_2^{\max} &= \frac{M_z G_2 (r_0 + h_1 + h_2)}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}} = R_\tau^{(2)}; \\ \tau_3^{\max} &= \frac{M_z G_3 (r_0 + h_1 + h_2 + h_3)}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + G_3 I_{3\rho}} = R_\tau^{(3)}. \end{aligned} \quad (10)$$

На основании соотношений (10) запишем условия равнопрочности для трёхслойного неоднородного упругого стержня с кольцевым поперечным сечением:

$$\frac{G_1 (r_0 + h_1)}{R_\tau^{(1)}} = \frac{G_2 (r_0 + h_1 + h_2)}{R_\tau^{(2)}} = \frac{G_3 (r_0 + h_1 + h_2 + h_3)}{R_\tau^{(3)}}, \quad (11)$$

либо:

$$\frac{G_1 R_\tau^{(2)}}{G_2 R_\tau^{(1)}} = \frac{r_0 + h_1 + h_2}{r_0 + h_1}; \quad \frac{G_2 R_\tau^{(3)}}{G_3 R_\tau^{(2)}} = \frac{r_0 + h_1 + h_2 + h_3}{r_0 + h_1 + h_2}. \quad (12)$$

Из формул (7) и (8), а также (11) и (12) следует, что равнопрочность скручиваемого многослойного сплошного упругого цилиндрического стержня не зависит от действующей внешней нагрузки, а определяется лишь механическими характеристиками материалов слоёв стержня и геометрическими размерами слоёв.

Пример.

В качестве примера рассмотрим трёхслойный стержень с кольцевым поперечным сечением, у которого

$$G_1 = 4,8 \cdot 10^4 \text{ МПа} ; - \text{ медь.}$$

$$G_2 = 8,0 \cdot 10^4 \text{ МПа} ; - \text{ сталь;}$$

$$G_3 = 2,7 \cdot 10^4 \text{ МПа} ; - \text{ алюминий.}$$

$$R_\tau^{(1)} = 70 \text{ МПа} ; R_\tau^{(2)} = 130 \text{ МПа} ; R_\tau^{(3)} = 50 \text{ МПа} ;$$

$$h_1 = 5 \text{ см} , h_2 = 3 \text{ см} , h_3 = 4 \text{ см}.$$

Из формул (12) найдём величину радиуса полости (r_0) для заданных исходных данных:

$$\text{Из (12}_1\text{), } r_0 = \frac{h_1 + h_2 - h_1 \frac{G_1 R_\tau^{(2)}}{G_2 R_\tau^{(1)}}}{\frac{G_1 R_\tau^{(2)}}{G_2 R_\tau^{(1)}} - 1} = 21,25 \text{ см} ;$$

$$\text{Из (12}_2\text{), } r_0 = \frac{h_1 + h_2 + h_3 - (h_1 + h_2) \frac{G_2 R_\tau^{(3)}}{G_3 R_\tau^{(2)}}}{\frac{G_2 R_\tau^{(3)}}{G_3 R_\tau^{(2)}} - 1} = 20,65 \text{ см} ;$$

Таким образом, если в скручиваемом цилиндрическом стержне исходные данные соответствуют заданным, то стержень будет находиться в равнопрочном состоянии, если цилиндрическая полость будет иметь радиус в пределах от 20,65 см до 21,25 см.

Обобщения на стержень, состоящий из n разнородных слоёв

Пусть стержень с кольцевым поперечным сечением состоит из n разнородных слоёв. Каждый i – й слой характеризуется толщиной h_i , модулем сдвига материала слоя G_i и расчётным сопротивлением материала по касательным напряжениям $R_\tau^{(i)}$.

Касательные напряжения в i –м слое будут равны:

$$\tau_i = \frac{M_z G_i \rho_i}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}}, \quad r_0 + \sum_{j=0}^{i-1} h_j \leq \rho_i \leq r_0 + \sum_{j=0}^i h_j; \quad (13)$$

Здесь $I_{1\rho} = \frac{\pi}{2} [(r_0 + h_1)^4 - r_0^4];$

$$I_{2\rho} = \frac{\pi}{2} [(r_0 + h_1 + h_2)^4 - (r_0 + h_1)^4]; \dots;$$

$$I_{n\rho} = \frac{\pi}{2} [(r_0 + h_1 + \dots + h_n)^4 - (r_0 + h_1 + \dots + h_{n-1})^4]; \dots;$$

Максимальные касательные напряжения в каждом слое в момент наступления предельного равновесия будут определяться соотношениями:

$$\tau_i^{\max} = \frac{M_z G_i \left(r_0 + \sum_{j=0}^i h_j \right)}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}} = R_\tau^{(i)}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Условия равнопрочности для n –слойного неоднородного упругого стержня с кольцевым поперечном сечением запишутся в следующей форме:

$$\frac{G_1 (r_0 + h_1)}{R_\tau^{(1)}} = \frac{G_2 (r_0 + h_1 + h_2)}{R_\tau^{(2)}} = \dots = \frac{G_n \left(r_0 + \sum_{j=0}^n h_j \right)}{R_\tau^{(n)}}, \quad (15)$$

либо:

$$\frac{G_1 R_\tau^{(2)}}{G_2 R_\tau^{(1)}} = \frac{r_0 + h_1 + h_2}{r_0 + h_1}; \quad \frac{G_2 R_\tau^{(3)}}{G_3 R_\tau^{(2)}} = \frac{r_0 + h_1 + h_2 + h_3}{r_0 + h_1 + h_2}; \dots; \quad \frac{G_{n-1} R_\tau^{(n)}}{G_n R_\tau^{(n-1)}} = \frac{r_0 + \sum_{j=0}^n h_j}{r_0 + \sum_{j=0}^{n-1} h_j}. \quad (16)$$

Чтобы записать условия равнопрочности для стержня со сплошным поперечным сечением нужно в формулах (15) и (16) принять $r_0 = 0$ и $h_1 = r_1$, где r_1 – радиус внутреннего слоя.

Выводы.

1. Равнопрочность скручиваемого многослойного сплошного упругого цилиндрического стержня не зависит от действующей внешней нагрузки, а определяется лишь механическими характеристиками материалов и геометрическими размерами слоёв.
2. На основании теоретических и численных исследований показано, что выполнение условий равнопрочности скручиваемого цилиндрического многослойного неоднородного упругого стержня является труднодостижимым и, вообще говоря, может быть использовано лишь для оценки равнопрочности стержня.

Библиографический список:

1. Сопротивление материалов. Под ред. А.Ф. Смирнова. Учебник для вузов. Изд. 3-е, перераб и доп. М., «Высш. школа», 1975. 480 с.
2. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М., «Физматгиз», 1963. 636 с.
3. Болотин В. Механика многослойных конструкций / М., «Машиностроение», 1980. 375 с.
4. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., «Наука», 1971. 240 с.
5. Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б. К вопросу кручения неоднородных стержней, находящихся под действием внешнего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 42-46. DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.005

6. *Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б.* К вопросу о кручении неоднородных цилиндрических стержней из идеального жесткопластического материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4 (42). С. 77-83. DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.011
7. *Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б.* Кручение неоднородных цилиндрических и призматических стержней из идеально пластического материала при линеаризованном условии пластичности // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 6. С. 65-72. DOI: 10.31857/S0572329920060100
8. *Деревянных Е.А., Митрофанова Т.В.* О кручении кусочно-неоднородных цилиндрических стержней // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 8-3 (19-3). С. 251-255. DOI: 10.12737/15635
9. *Нуримбетов А.У.* Кручение многослойного призматического анизотропного стержня, составленного из ортотропных материалов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2009. № 4. С. 63-75.
10. *Нуримбетов А.У.* Решение задачи кручение слоистых композиционных стержней произвольного сечения методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. № 4 (225). С. 24-30.