

УДК 539.3/.6

ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Бакушев Сергей Васильевич

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Лабашина Дарья Михайловна

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

студент.

Аннотация.

Рассматривается неоднородный упругий стержень, находящийся в условиях осевого растяжения-сжатия. Показано, что в неоднородном упругом стержне, с учётом гипотезы плоских сечений, равнодействующая продольных сил, действующих в каждой однородной части поперечного сечения стержня, не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного поперечного сечения. При этом координаты точки приложения равнодействующей не зависят от величины действующей внешней нагрузки на стержень. Кроме того, в неоднородном упругом стержне на стыке участков возникает внутренний кривой, вообще говоря, изгиб. Показано, что неоднородный упругий стержень под действием осевых нагрузок будет находиться в условиях внецентренного растяжения-сжатия и испытывать кривой изгиб на стыке неоднородных участков.

Ключевые слова: стержень, неоднородность, упругость, осевое растяжение-сжатие.

AXIAL TENSION-COMPRESSION OF INHOMOGENEOUS ELASTIC MEMBERS

Bakushev Sergey Vasilevish,

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Doctor of Sciences, Professor, Associate Professor of the department "Mechanics".*

Labashina Daria Mikhailovna

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
student.*

Abstract

An inhomogeneous elastic rod under conditions of axial tension-compression is considered. It is shown that in an inhomogeneous elastic member, taking into account the hypothesis of plane sections, the resultant of the longitudinal forces acting in each homogeneous part of the cross-section of the member does not coincide, generally speaking, with the center of gravity of the inhomogeneous cross-section. At the same time, the coordinates of the point of application of the resultant do not depend on the value of the effective external load on the member. In addition, in an inhomogeneous elastic rod at the junction of the sections, an internal oblique, generally speaking, bend occurs. It is shown that an inhomogeneous elastic rod under the influence of axial loads will be in conditions of eccentric tension-compression and will experience oblique bending at the junction of heterogeneous areas.

Keywords: rod, heterogeneity, elasticity, axial tension-compression.

Введение.

Под неоднородным упругим стержнем будем понимать такой стержень, различные части которого составляющие единое целое, имеют различные механические характеристики и геометрические размеры, и под действием нагрузки работают упруго. Для неоднородного упругого стержня остается справедливой гипотеза плоских сечений [1]. Вопросам расчёта неоднородных стержней из условия прочности и жёсткости посвящены многие работы, в частности работы [2, 3, 4].

Теоретические основы.

Рассмотрим упругий стержень с неоднородностью II-го типа [5], находящийся в условиях осевого растяжения-сжатия. Пусть стержень длиной l_1 состоит из трёх частей, две из которых имеют длины l_2 и l_3 соответственно, причём $l_1 = l_2 + l_3$ (рис. 1). Механические характеристики первой части обозначим E_1, A_1 , второй части E_2, A_2 и третьей - E_3, A_3 . Здесь E_1, E_2, E_3 - модули упругости, A_1, A_2, A_3 - площади поперечного сечения соответствующих частей стержня.

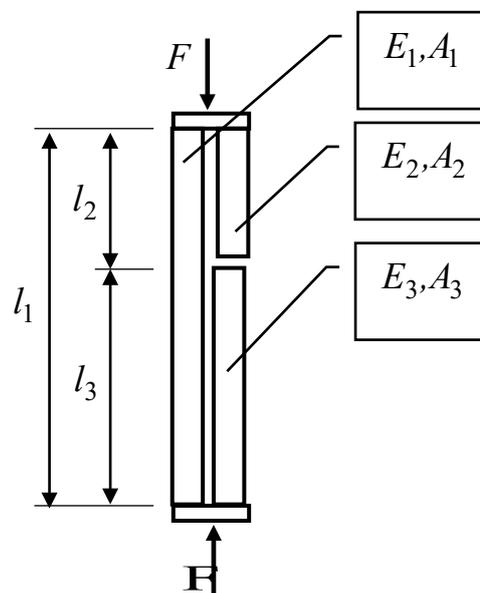


Рисунок 1 - Неоднородный упругий стержень, состоящий из трёх

Следует отметить, что распределение неоднородностей по длине стержня может быть самым разнообразным: неоднородности длинами l_2 и l_3 могут располагаться в разных частях стержня. Поперечное сечение неоднородностей также может быть совершенно произвольным.

В соответствии с гипотезой плоских сечений внутренние продольные силы в каждой однородной части поперечного сечения будут определяться по формулам [5]:

$$N_1 = \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right)} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right) \frac{E_1 A_1}{l_1};$$

$$N_2 = N_3 = \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right)}. \quad (1)$$

Продольные силы в каждой однородной части поперечного сечения связаны с нормальными напряжениями соотношениями:

$$N_1 = \sigma_{1z} A_1; \quad N_2 = \sigma_{2z} A_2; \quad N_3 = \sigma_{3z} A_3. \quad (2)$$

Будем считать, что на каждом неоднородном участке, то есть в пределах длин l_2 и l_3 , стержень сохраняет прямолинейную форму. В силу того, что стержень находится в условиях осевого растяжения (сжатия), прямолинейная форма стержня должна сохраняться на всей длине l_1 . Покажем, что это условие не выполняется. Для этого найдём точку приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_2 на участке длиной l_2 (рис. 2), а затем найдём точку приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_3 на участке длиной l_3 (рис. 3).

Точка приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_2 на участке длиной l_2 определяется из условия, что внутренние изгибающие моменты от продольных сил N_1 и N_2 относительно осей X_2, Y_2 , проходящих через точку приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_2 , равны нулю:

$$M_x = \int_{A_1} \sigma_{1z} y dA + \int_{A_2} \sigma_{2z} y dA = \sigma_{1z} \int_{A_1} y dA + \sigma_{2z} \int_{A_2} y dA =$$

$$= \sigma_{1z} \cdot S_{1x_2} + \sigma_{2z} \cdot S_{2x_2} = 0;$$

$$M_y = \int_{A_1} \sigma_{1z} x dA + \int_{A_2} \sigma_{2z} x dA = \sigma_{1z} \int_{A_1} x dA + \sigma_{2z} \int_{A_2} x dA =$$

$$= \sigma_{1z} \cdot S_{1y_2} + \sigma_{2z} \cdot S_{2y_2} = 0.$$

Учитывая соотношения (1), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{1z} \cdot S_{1x_2} + \sigma_{2z} \cdot S_{2x_2} &= \frac{1}{A_1} \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right)} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right) \times \\ &\times \frac{E_1 A_1}{l_1} S_{1x_2} + \frac{1}{A_2} \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right)} S_{2x_2} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1z} \cdot S_{1y_2} + \sigma_{2z} \cdot S_{2y_2} &= \frac{1}{A_1} \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right)} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right) \times \\ &\times \frac{E_1 A_1}{l_1} S_{1y_2} + \frac{1}{A_2} \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right)} S_{2y_2} = 0. \end{aligned}$$

В системе (3), в соответствии с рис. 2

$$\begin{aligned} S_{1x_2} &= A_1 \cdot y_{2N}^I; \quad S_{2x_2} = -A_2 \cdot y_{2N}^II; \\ S_{1y_2} &= -A_1 \cdot x_{2N}^I; \quad S_{2y_2} = A_2 \cdot x_{2N}^II. \end{aligned} \quad (4)$$

В соотношениях (4)

x_{2N}^I, x_{2N}^II – расстояния вдоль оси X_2 от центров тяжести первой и второй частей плоской фигуры до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 , то есть до оси Y_2 ;

y_{2N}^I, y_{2N}^II – расстояния вдоль оси Y_2 от центров тяжести первой и второй частей плоской фигуры до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 , то есть до оси X_2 .

При этом предполагается, что начало координат системы X_2, Y_2, Z_2 совпадает с точкой приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 , причём оси X_2, Y_2 располагаются между центрами тяжести первой и второй частями поперечного сечения стержня (рис. 2).

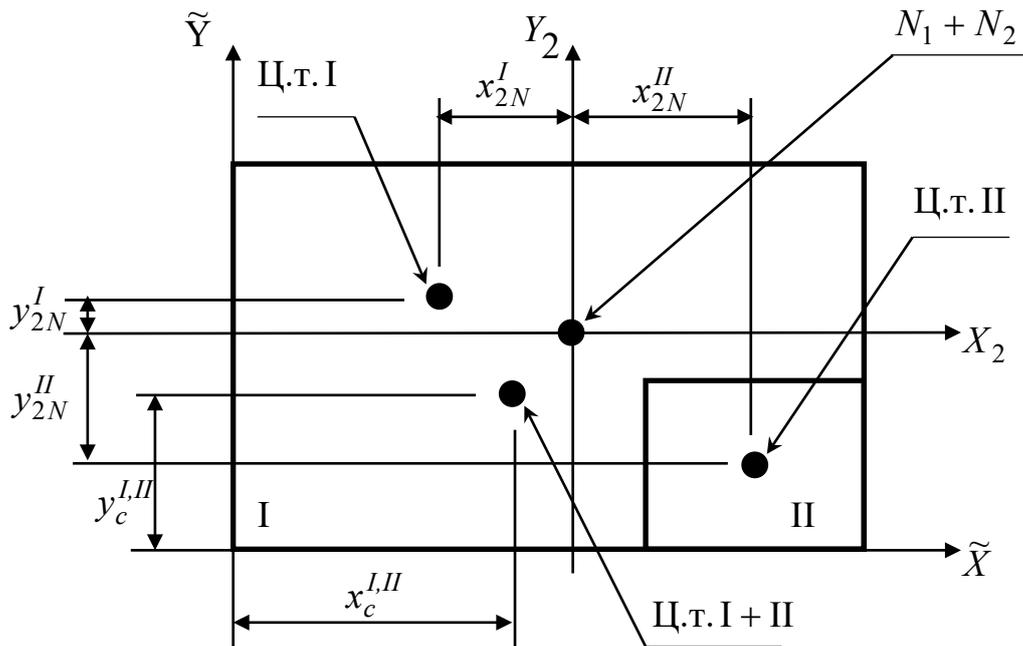


Рисунок 2 - Поперечное сечение на уровне второй

Рассматривая геометрию поперечного сечения неоднородного стержня на участке l_2 , можно найти соотношение между величинами x_{2N}^I, x_{2N}^{II} , а также между величинами y_{2N}^I, y_{2N}^{II} :

$$x_{2N}^I = f_1(x_{2N}^{II}); \quad y_{2N}^I = f_2(y_{2N}^{II}). \quad (5)$$

Из уравнений (3), с учётом соотношений (4) и (5) можно найти координаты точки приложенной равнодействующей продольных сил N_1 и N_2 в поперечном сечении стержня на участке l_2 :

$$\frac{\left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right) \frac{E_1 A_1}{l_1} \cdot f_2(y_{2N}^{II})}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} - \frac{y_{2N}^{II}}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} = 0; \quad (6)$$

$$-\frac{\left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} \frac{E_1 A_1}{l_1} \cdot f_1(x_{2N}^{II}) - \frac{x_{2N}^{II}}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} = 0.$$

Точка приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_3 на участке длиной l_3 определяется из условия, что внутренние изгибающие моменты от продольных сил N_1 и N_3 относительно осей X_3, Y_3 , проходящих через точку приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_3 , равны нулю:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{A_1} \sigma_{1z} y dA + \int_{A_3} \sigma_{3z} y dA = \sigma_{1z} \int_{A_1} y dA + \sigma_{3z} \int_{A_3} y dA = \\ &= \sigma_{1z} \cdot S_{1x_3} + \sigma_{3z} \cdot S_{2x_3} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{A_1} \sigma_{1z} x dA + \int_{A_3} \sigma_{3z} x dA = \sigma_{1z} \int_{A_1} x dA + \sigma_{3z} \int_{A_3} x dA = \\ &= \sigma_{1z} \cdot S_{1y_3} + \sigma_{3z} \cdot S_{3y_3} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (1), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{1z} \cdot S_{1x_3} + \sigma_{3z} \cdot S_{3x_3} &= \frac{1}{A_1} \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right) \times \\ &\times \frac{E_1 A_1}{l_1} S_{1x_3} + \frac{1}{A_3} \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} S_{3x_3} = 0; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1z} \cdot S_{1y_3} + \sigma_{3z} \cdot S_{3y_3} &= \frac{1}{A_1} \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right) \times \\ &\times \frac{E_1 A_1}{l_1} S_{1y_3} + \frac{1}{A_3} \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} S_{3y_3} = 0. \end{aligned}$$

В системе (7) в соответствии с рис. 3

$$S_{1x_3} = -A_1 \cdot y_{3N}^I; \quad S_{3x_3} = A_3 \cdot y_{3N}^{III};$$

$$S_{1y_3} = -A_1 \cdot x_{3N}^I; \quad S_{3y_3} = A_3 \cdot x_{3N}^{III}. \quad (8)$$

В соотношениях (8)

x_{3N}^I, x_{3N}^{III} – расстояния вдоль оси X_3 от центров тяжести первой и третьей частей плоской фигуры до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_3 , то есть до оси Y_3 ;

y_{3N}^I, y_{3N}^{III} – расстояния вдоль оси Y_3 от центров тяжести первой и третьей частей плоской фигуры до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_3 , то есть до оси X_3 .

При этом предполагается, что начало координат системы X_3, Y_3, Z_3 совпадает с точкой приложения равнодействующей сил N_1 и N_3 , причём оси X_3, Y_3 располагаются между центрами тяжести первой и третьей частями поперечного сечения стержня (рис. 3).

Рассматривая геометрию поперечного сечения неоднородного стержня на участке l_3 , можно найти соотношение между величинами x_{3N}^I, x_{3N}^{III} , а также между величинами y_{3N}^I, y_{3N}^{III} :

$$x_{3N}^I = f_3(x_{3N}^{III}); \quad y_{3N}^I = f_4(y_{3N}^{III}). \quad (9)$$

Из уравнений (7), с учётом соотношений (8) и (9) можно найти координаты точки приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_3 в поперечном сечении стержня на участке l_3 :

$$-\frac{\left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} \frac{E_1 A_1}{l_1} \cdot f_4(y_{3N}^{III}) - \frac{y_{3N}^{III}}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} = 0; \quad (10)$$

$$-\frac{\left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} \frac{E_1 A_1}{l_1} \cdot f_3(x_{3N}^{III}) - \frac{x_{3N}^{III}}{1 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}\right)} = 0.$$

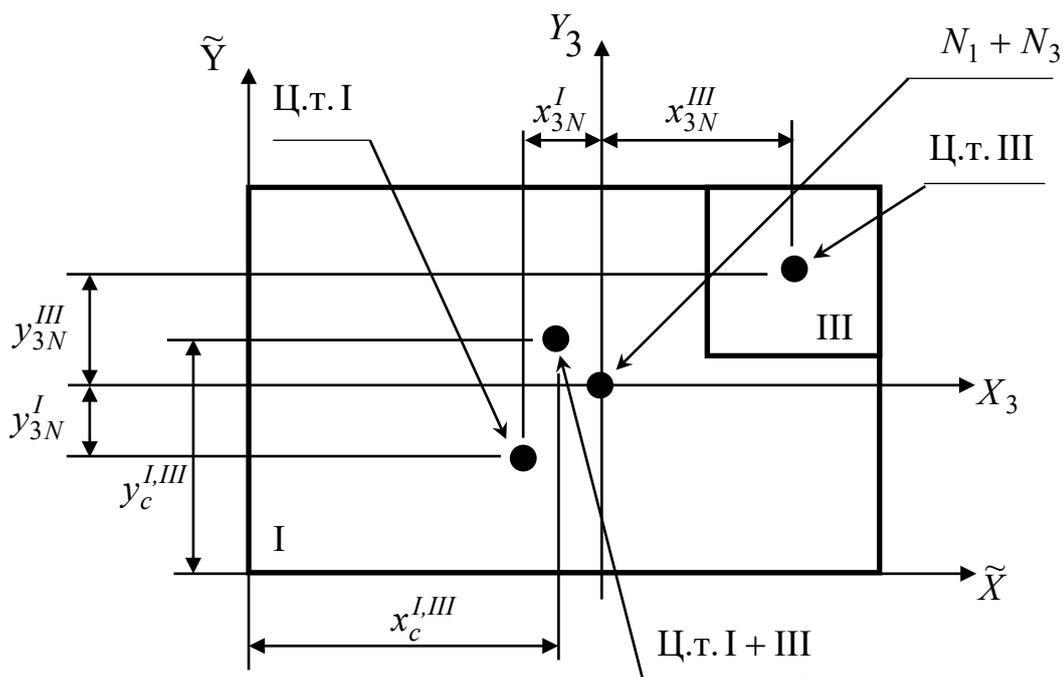


Рисунок 3 - Поперечное сечение на уровне третьей

Центр тяжести.

Для неоднородной плоской фигуры единичной толщины, расположенной перпендикулярно к оси \tilde{Z} , направленной к центру земли, центр тяжести в некоторой вспомогательной системе координат \tilde{X}, \tilde{Y} определяется формулами [6]:

$$x_c = \frac{\int_A x \cdot \gamma_s(x,y) \cdot dA}{\int_A \gamma_s(x,y) \cdot dA} ; y_c = \frac{\int_A y \cdot \gamma_s(x,y) \cdot dA}{\int_A \gamma_s(x,y) \cdot dA} . \quad (11)$$

Здесь $\gamma_s(x,y)$ – вес единицы площади плоской фигуры;

$\int_A \gamma_s(x,y) \cdot dA$ – вес всей плоской фигуры.

Центр тяжести плоской фигуры, состоящей из двух частей с разными объёмными весами, будет определяться в системе вспомогательных координат \tilde{X}, \tilde{Y} , (рис. 2), в соответствии с формулами (11), на участке l_2 соотношениями

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{\int_{A_1} x \cdot \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} x \cdot \gamma_2 \cdot dA}{\int_{A_1} \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} \gamma_2 \cdot dA} = \frac{\gamma_1 \int_{A_1} x \cdot dA + \gamma_2 \int_{A_2} x \cdot dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2} = \frac{\gamma_1 S_{1y} + \gamma_2 S_{2y}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}; \\
y_c &= \frac{\int_{A_1} y \cdot \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} y \cdot \gamma_2 \cdot dA}{\int_{A_1} \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} \gamma_2 \cdot dA} = \frac{\gamma_1 \int_{A_1} y \cdot dA + \gamma_2 \int_{A_2} y \cdot dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2} = \frac{\gamma_1 S_{1x} + \gamma_2 S_{2x}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}.
\end{aligned} \tag{12}$$

На участке l_3 координаты центра тяжести плоской фигуры в тех же вспомогательных координатах \tilde{X}, \tilde{Y} (рис. 3) будут определяться так:

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{\int_{A_1} x \cdot \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_3} x \cdot \gamma_3 \cdot dA}{\int_{A_1} \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_3} \gamma_3 \cdot dA} = \frac{\gamma_1 \int_{A_1} x \cdot dA + \gamma_3 \int_{A_3} x \cdot dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_3 A_3} = \frac{\gamma_1 S_{1y} + \gamma_3 S_{3y}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_3 A_3}; \\
y_c &= \frac{\int_{A_1} y \cdot \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_3} y \cdot \gamma_3 \cdot dA}{\int_{A_1} \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_3} \gamma_3 \cdot dA} = \frac{\gamma_1 \int_{A_1} y \cdot dA + \gamma_3 \int_{A_3} y \cdot dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_3 A_3} = \frac{\gamma_1 S_{1x} + \gamma_3 S_{3x}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_3 A_3}.
\end{aligned} \tag{13}$$

В формулах (12) и (13) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - объёмные веса первой, второй и третьей частей неоднородного стержня.

Следует отметить, что координаты центров тяжести поперечного сечения стержня на участках l_2 и l_3 в системе вспомогательных координат \tilde{X}, \tilde{Y} , вообще говоря, не совпадают.

Анализ результатов.

Сопоставляя формулы (6) и (12), а также формулы (10) и (13) можно утверждать, что точка приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_2 на участке l_2 и точка приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_2 на участке l_3 не совпадают, вообще говоря, с центрами тяжести неоднородного плоского поперечного сечения стержня на участках l_2 и l_3 . Кроме того, сопоставляя формулы (6) и (10) видим, что точка приложения равнодействующей R_{12} продольных сил N_1 и N_2 на участке l_2 и точка

приложения равнодействующей R_{13} продольных сил N_1 и N_2 на участке l_3 также не совпадают.

Следовательно, продольные силы R_{12} и R_{13} создают относительно друг друга внутренний момент M_R в сечении на стыке участков l_2 и l_3 . Плоскость действия этого момента зависит в самом общем случае от геометрии рассматриваемого неоднородного стержня, а также его механических характеристик.

Таким образом, рассматриваемый неоднородный стержень на стыке участков l_2 и l_3 будет испытывать, вообще говоря, кривой изгиб. Кроме того, для обеспечения напряжённо-деформированного состояния неоднородного стержня соответствующего, вообще говоря, условиям осевого растяжения-сжатия, внешнюю сосредоточенную силу F следует прикладывать в точке поперечного сечения, координаты которой соответствуют точке приложения равнодействующей сил R_{12} и R_{13} . Но поскольку силы R_{12} и R_{13} действуют на разных участках стержня, то в этом случае внешняя сила F и на участке длиной l_2 , и на участке длиной l_3 будет приложена вне точек приложения равнодействующих сил R_{12} и R_{13} .

Таким образом, неоднородный стержень будет находиться в условиях внецентренного растяжения-сжатия и испытывать кривой изгиб на стыке второго и третьего участков.

Пример.

Рассмотрим неоднородный стержень с прямоугольным поперечным сечением размерами $a \times b$. Стержень состоит из трёх частей, выполненных из материала с разными объёмными весами γ_1, γ_2 и γ_3 . На рис. 4 показано поперечное сечение стержня на участке l_2 , на рис. 5 показано поперечное сечение стержня на участке l_3 .

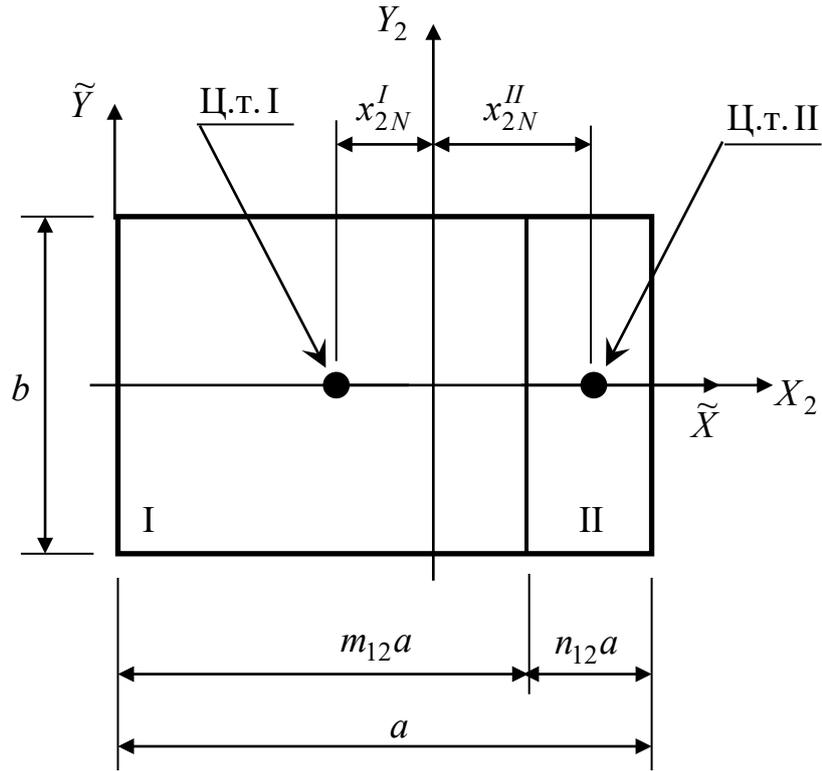


Рисунок 4 - Поперечное сечение

В соответствии с рис. 4 и рис. 5 имеем $m_{12} + n_{12} = 1$ и $m_{13} + n_{13} = 1$ и, кроме того, $A_1 = m_{12}ab = m_{13}ab$, то $m_{12} = m_{13}$. Следовательно, $n_{13} = 1 - m_{12}$.

Далее (см. рис. 4)

$$S_{1x_2} = 0; S_{2x_2} = 0; S_{1y_2} = -A_1 \cdot x_{2N}^I; S_{2y_2} = A_2 \cdot x_{2N}^{II}.$$

Здесь $A_1 = m_{12}ab$; $A_2 = n_{12}ab$.

Кроме того, $\frac{1}{2}m_{12}a + x_{2N}^I + x_{2N}^{II} + \frac{1}{2}n_{12}a = a$, то есть $x_{2N}^I = \frac{1}{2}a - x_{2N}^{II}$.

Следовательно, $S_{1y_2} = -m_{12}ab \left(\frac{1}{2}a - x_{2N}^{II} \right)$; $S_{2y_2} = n_{12}ab \cdot x_{2N}^{II}$.

Таким образом, система (6) сводится к одному уравнению:

$$-\left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right) \frac{1}{2}a + \left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right) x_{2N}^{II} = 0,$$

$$\text{откуда } x_{2N}^{II} = \frac{\left(\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right) \frac{1}{2} a}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3}}.$$

По полученному значению x_{2N}^{II} уточняется положение оси Y_2 .

Найдём положение центра тяжести плоской фигуры (рис. 4) во вспомогательной системе координат. Имеем:

$$x_{у.м.}^I = \frac{1}{2} m_{12} a; \quad y_{у.м.}^I = 0; \quad A_1 = m_{12} ab.$$

$$x_{у.м.}^{II} = m_{12} a + \frac{1}{2} n_{12} a; \quad y_{у.м.}^{II} = 0; \quad A_2 = n_{12} ab.$$

$$\text{Следовательно, } y_{c12} = 0; \quad x_{c12} = \frac{\gamma_1 A_1 x_{у.м.}^I + \gamma_2 A_2 x_{у.м.}^{II}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}.$$

В соответствии с рис. 5, получаем:

$$S_{1x_3} = -A_1 \cdot y_{3N}^I; \quad S_{3x_3} = A_3 \cdot y_{3N}^{III}; \quad S_{1y_3} = 0; \quad S_{3y_3} = 0.$$

Здесь $A_1 = m_{13} ab$; $A_3 = n_{13} ab$.

Кроме того, $\frac{1}{2} m_{13} b + y_{3N}^I + y_{3N}^{III} + \frac{1}{2} n_{13} b = b$, то есть $y_{3N}^I = \frac{1}{2} b - y_{3N}^{III}$.

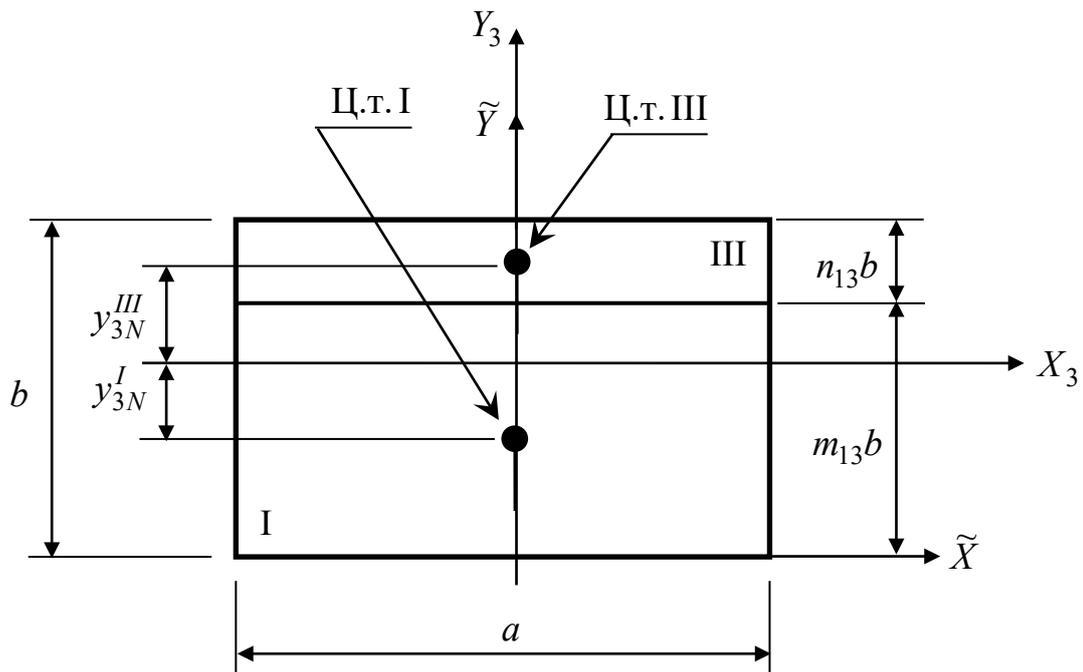


Рисунок 5 - Поперечное сечение

Следовательно, $S_{1x_3} = -m_{13}ab\left(\frac{1}{2}b - y_{3N}^{III}\right)$; $S_{3y_3} = n_{13}ab \cdot y_{3N}^{III}$.

Таким образом, система (7) сводится к одному уравнению:

$$-\left(\frac{l_2}{E_2A_2} + \frac{l_3}{E_3A_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}b - y_{3N}^{III}\right) + \frac{l_1}{E_1A_1} y_{3N}^{III} = 0,$$

откуда
$$y_{3N}^{III} = \frac{\left(\frac{l_2}{E_2A_2} + \frac{l_3}{E_3A_3}\right) \frac{1}{2}b}{\frac{l_1}{E_1A_1} + \frac{l_2}{E_2A_2} + \frac{l_3}{E_3A_3}}.$$

По полученному значению y_{3N}^{III} уточняется положение оси X_3 .

Найдём положение центра тяжести плоской фигуры (рис. 5) во вспомогательной системе координат \tilde{X}, \tilde{Y} . Имеем:

$$x_{ц.т.}^I = 0; y_{ц.т.}^I = \frac{1}{2}m_{13}b; A_1 = m_{13}ab.$$

$$x_{ц.т.}^{II} = 0; y_{ц.т.}^{II} = m_{13}b + \frac{1}{2}n_{13}b; A_2 = n_{13}ab.$$

Следовательно, $x_{c13} = 0; y_{c13} = \frac{\gamma_1 A_1 y_{ц.т.}^I + \gamma_2 A_2 y_{ц.т.}^{II}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_3 A_3}.$

Исходные данные:

Первая часть стержня выполнена из бетона с объёмным весом $\gamma_1 = 2400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; вторая часть выполнена из материала с объёмным весом

$\gamma_2 = 5100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; третья часть стержня – это сталь с объёмным весом $\gamma_3 = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Модуль упругости бетона $E_1 = 20000$ МПа; модуль упругости стали $E_3 = 200000$ МПа; модуль упругости материала второй части $E_2 = 100000$ МПа.

Размеры поперечного сечения: $a = 0,6$ м; $b = 0,4$ м. Длины частей стержня:

$l_1 = 9$ м, $l_2 = 3$ м, $l_3 = 6$ м.

Коэффициенты: $m_{12} = 0,6$; $n_{12} = 0,4$; $m_{13} = 0,6$; $n_{13} = 0,4$.

Результаты вычислений представлены ниже:

$$A_1 = 1440 \text{ см}^2; A_2 = 960 \text{ см}^2; A_3 = 960 \text{ см}^2.$$

$$x_{2N}^I = 25 \text{ см}; y_{2N}^I = 0 \text{ см}; x_{2N}^{II} = 5 \text{ см}; y_{2N}^{II} = 0 \text{ см}; y_{c12} = 0 \text{ см}; x_{c12} = 35,6 \text{ см}.$$

Расстояние от левой стороны площади до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 : 43 см.

Расстояние между центром тяжести и точкой приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 : 7,4 см.

$$x_{2N}^I = 0 \text{ см}; y_{2N}^I = 16,67 \text{ см}; x_{2N}^{II} = 0 \text{ см}; y_{2N}^{III} = 3,33 \text{ см};$$

$$y_{c13} = 25,7 \text{ см}; x_{c13} = 0 \text{ см}.$$

Расстояние от нижней стороны площади до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 : 28,67 см.

Расстояние между центром тяжести и точкой приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 : 2,98 см.

Выводы.

1. Точки приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне в рассматриваемых сечениях не совпадают, вообще говоря, с центрами тяжести рассматриваемых неоднородных поперечных сечений стержня.
2. Положения точек приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне не зависят от действующей внешней нагрузки на стержень.
3. Точка приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне может совпасть с центром тяжести неоднородного поперечного сечения стержня либо на участке l_2 , либо на участке l_3 при определённых условиях.

4. Для обеспечения напряжённо-деформированного состояния неоднородного стержня соответствующего, вообще говоря, условиям осевого растяжения-сжатия, внешнюю сосредоточенную силу F следует прикладывать в точке поперечного сечения, координаты которой соответствуют точке приложения равнодействующей сил R_{12} и R_{13} .
5. В неоднородном упругом стержне на стыке участков возникает внутренний кривой, вообще говоря, изгиб.
6. Неоднородный стержень под действием осевых нагрузок будет находиться в условиях внецентренного растяжения-сжатия и испытывать кривой изгиб на стыке второго и третьего участков.

Библиографический список:

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учеб для вузов/А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. Под ред. А.В. Александрова. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2008. – 560 с.: ил.
2. Горбачев В.И. Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов. // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2016. № 6 (69). С. 56-72.
3. Мищенко А.В., Ромадинов И.В. Оценка прочности гибкого слоисто-неоднородного стержня при термосиловом воздействии. // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. 2020. № 2 (53). С. 78-85.
4. Труфанов А.Н., Лесникова Ю.И., Труфанов Н.А., Сметанников О.Ю. Выбор критерия конструкционной прочности неоднородного кварцевого стержня на основе натуральных и вычислительных экспериментов. // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 1. С. 97-108.

5. *Бакушев С.В.* К вопросу о равнопрочности неоднородных упругих стержней [Электронный ресурс]//Моделирование и механика конструкций. 2021. №13.

6. *Бутенин Н.В., Луиц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. В двух томах. Т. 1. Статика и кинематика. – 3-е изд., стереотип. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 272 с.