УДК 539.3/.6

К ВОПРОСУ О РАВНОПРОЧНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ.

Бакушев Сергей Васильевич

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Мирзаханов Магомед Рамисович

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

студент.

Аннотация

Рассматривается трёхслойный неоднородный упругий стержень, находящийся в условиях плоского поперечного изгиба. Каждый слой обладает своими модулем упругости, расчётным сопротивлением и площадью поперечного сечения. Определяются условия, обеспечивающие наступление предельного равновесия во всех слоях стержня одновременно. Разработан итерационный алгоритм для установления размеров поперечного сечения из условия равнопрочности. Рассмотрен числовой пример. Выполнены обобщения на многослойную балку. Показано, что выполнение условия равнопрочности является труднодостижимым и, вообще говоря, может быть использовано лишь для оценки равнопрочности стержня.

Ключевые слова: стержень, неоднородность, упругость, плоский поперечный изгиб, равнопрочность.

ON THE ISSUE OF EQUISTRENGTH OF BENDING INHOMOGENEOUS MEMBERS

Bakushev Sergey Vasilevish

Penza State University of Architecture and Construction, Penza, *Doctor of Sciences, Professor, Associate Professor of the department "Mechanics".*

Mirzakhanov Magomed Ramisovich

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

A three-layer inhomogeneous elastic rod under conditions of plane transverse bending is considered. Each layer has its own modulus of elasticity, design resistance, and cross-sectional area. The conditions that ensure the onset of the ultimate equilibrium in all layers of the rod at the same time are determined. An iterative algorithm has been developed to determine the dimensions of the cross-section from the condition of equal strength. A numerical example is considered. Generalizations on a multilayer beam have been made. It is shown that the fulfillment of the condition of equal strength is difficult to achieve and, generally speaking, can be used only to assess the equistrength of the member.

Keywords: rod, heterogeneity, elasticity, flat transverse bending, equal strength.

Введение.

Под многослойным неоднородным упругим стержнем, находящимся в условиях плоского поперечного изгиба, будем понимать стержень, состоящий из нескольких слоёв, простирающихся на всю длину стержня. Поперечное сечение каждого слоя по длине стержня не изменяется. Слои не могут сдвигаться одно относительно другого. Каждый слой характеризуется своим модулем упругости и своим расчётным сопротивлением материала.

В работе [1] показано, что эпюра нормальных напряжений по высоте поперечного сечения многослойного неоднородного упругого стержня является разрывной (ступенчатой). Вопросы механики многослойных конструкций рассмотрены в работе Болотина В. [2]. Вопросами расчёта многослойных неоднородных упругих стержней занимались инженеры Старовойтов Э.И. [3];

Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А. [4]; Мищенко А.В. [5]; Кравчук А.С., Кочик Е.В., Тарасюк И.А. [6]; и другие.

В данной работе определяются условия, обеспечивающие наступление предельного равновесия во всех слоях неоднородного упругого изгибаемого стержня одновременно.

Определение нормальных напряжений.

Рассмотрим упругий неоднородный трёхслойный стержень, находящейся в условиях плоского поперечного изгиба, у которого средняя часть толщиной $h_1 = h_1^{(+)} + h_1^{(-)}$ и площадью поперечного сечения $A_1 = A_1^{(+)} + A_1^{(-)}$ изготовлена из материала с модулем упругости E_1 и расчётным сопротивлением R_1; нижняя часть толщиной h_2 и площадью поперечного сечения A_2 изготовлена из материала с модулем упругости E_2 и расчётным сопротивлением R_2; наконец верхняя часть толщиной h_3 и площадью поперечного сечения A_3 изготовлена из материала с модулем упругости E_3 и расчётным сопротивлением R_3. Рассматривается стержень, материал всех трёх слоёв которого имеет модуль упругости при растяжении равным модулю упругости при сжатии, а расчётное сопротивление при растяжении равным расчётному сопротивлению при сжатии.

Поперечное сечения стержня имеет вертикальную ось симметрии – ось Y (рис. 1). При этом предполагается, что нейтральная линия делит среднюю часть поперечного сечения на две части.

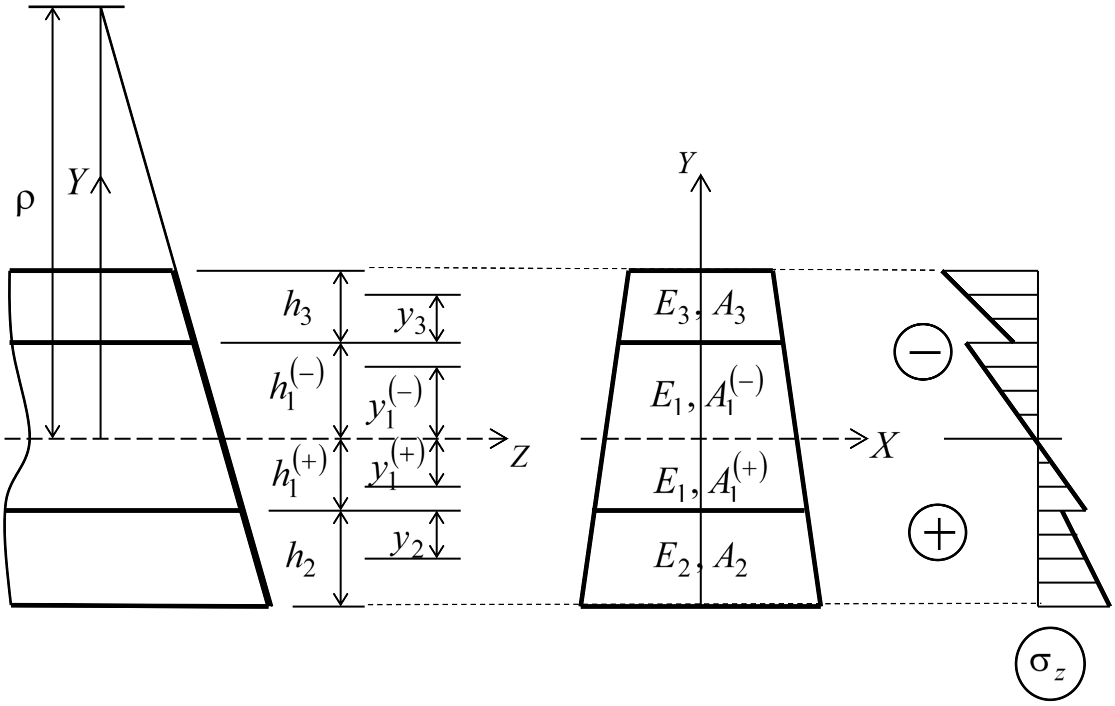

Рисунок 1 - Неоднородный стержень, его поперечное сечение, эпюра нормальных напряжений.

В соответствии с гипотезой плоских сечений и гипотезой о ненадавливании продольных волокон друг на друга нормальные напряжения в слоях стержня будут равны [7]:

$$\sigma_3 = E_3 \frac{h_1^{(-)} + y_3}{\rho};\ \sigma_1^{(-)} = E_1 \frac{y_1^{(-)}}{\rho};\ \ \sigma_1^{(+)} = E_1 \frac{y_1^{(+)}}{\rho};\ \sigma_2 = E_2 \frac{h_1^{(+)} + y_2}{\rho}. \quad (1)$$

Положение нейтральной линии (оси X) найдём из условия равенства нулю продольной силы:

$$N = -\int\limits_{A_3} \sigma_3 dA - \int\limits_{A_1^{(-)}} \sigma_1^{(-)} dA + \int\limits_{A_1^{(+)}} \sigma_1^{(+)} dA + \int\limits_{A_2} \sigma_2 dA =$$

$$= \int\limits_{A_3} E_3 \frac{h_1^{(-)} + y_3}{\rho} dA - \int\limits_{A_1^{(-)}} E_1 \frac{y_1^{(-)}}{\rho} dA + \int\limits_{A_1^{(+)}} E_1 \frac{y_1^{(+)}}{\rho} dA +$$

$$+ \int\limits_{A_2} E_2 \frac{h_1^{(+)} + y_2}{\rho} dA = -\frac{E_3}{\rho} S_x^{(3)} - \frac{E_1}{\rho} S_x^{(1)(-)} + \frac{E_1}{\rho} S_x^{(1)(+)} + \frac{E_2}{\rho} S_x^{(2)} = 0.$$

Отсюда

$$-E_3 S_x^{(3)} - E_1\left(S_x^{(1)(-)} - S_x^{(1)(+)}\right) + E_2 S_x^{(2)} = 0 \qquad (2)$$

В формуле (2) обозначено:

$S_x^{(3)} = \int\limits_{A_3}\left(h_1^{(-)} + y_3\right)dA -$ статический момент верхней части поперечного сечения относительно нейтральной оси X ;

$S_x^{(2)} = \int\limits_{A_2}\left(h_1^{(+)} + y_2\right)dA -$ статический момент нижней части поперечного сечения относительно нейтральной оси X ;

$S_x^{(1)(-)} = \int\limits_{A_1^{(-)}} y_1^{(-)} dA -$ статический момент сжатой зоны средней части поперечного сечения относительно нейтральной оси X ;

$S_x^{(1)(+)} = \int\limits_{A_1^{(+)}} y_1^{(+)} dA -$ статический момент растянутой зоны средней части поперечного сечения относительно нейтральной оси X .

Соотношение (2) позволяет найти положение нейтральной линии (оси X) поперечного сечения.

Запишем величину внутреннего изгибающего момента относительно нейтральной оси (оси X):

$$M_x = \int\limits_{A_3}\sigma_3\left(h_1^{(-)} + y_3\right)dA + \int\limits_{A_1^{(-)}}\sigma_1^{(-)} y_1^{(-)} dA + \int\limits_{A_1^{(+)}}\sigma_1^{(+)} y_1^{(+)} dA +$$

$$+ \int\limits_{A_2}\sigma_2\left(h_1^{(+)} + y_2\right)dA = \int\limits_{A_3} E_3\frac{h_1^{(-)} + y_3}{\rho}\left(h_1^{(-)} + y_3\right)dA +$$

$$+ \int\limits_{A_1^{(-)}} E_1\frac{y_1^{(-)}}{\rho} y_1^{(-)} dA + \int\limits_{A_1^{(+)}} E_1\frac{y_1^{(+)}}{\rho} y_1^{(+)} dA +$$

$$+ \int\limits_{A_2} E_2\frac{h_1^{(+)} + y_2}{\rho}\left(h_1^{(+)} + y_2\right)dA = \frac{E_3}{\rho}\int\limits_{A_3}\left(h_1^{(-)} + y_3\right)^2 dA +$$

$$\frac{E_1}{\rho}\int\limits_{A_1^{(-)}}\left(y_1^{(-)}\right)^2 dA + \frac{E_1}{\rho}\int\limits_{A_1^{(+)}}\left(y_1^{(+)}\right)^2 dA + \frac{E_2}{\rho}\int\limits_{A_2}\left(h_1^{(+)} + y_2\right)^2 dA =$$

$$= \frac{E_3}{\rho} I_x^{(3)} + \frac{E_1}{\rho} I_x^{(1)(-)} + \frac{E_1}{\rho} I_x^{(1)(+)} + \frac{E_2}{\rho} I_x^{(2)} \qquad (3)$$

В формуле (3) обозначено:

$I_x^{(3)} = \int\limits_{A_3} \left(h_1^{(-)} + y_3 \right)^2 dA -$ осевой момент инерции верхней части сечения относительно оси X;

$I_x^{(2)} = \int\limits_{A_2} \left(h_1^{(+)} + y_2 \right)^2 dA -$ осевой момент инерции нижней части сечения относительно оси X;

$I_x^{(1)(-)} = \int\limits_{A_1^{(-)}} \left(y_1^{(-)} \right)^2 dA -$ осевой момент инерции сжатой средней части сечения относительно оси X;

$I_x^{(1)(+)} = \int\limits_{A_1^{(+)}} \left(y_1^{(+)} \right)^2 dA -$ осевой момент инерции растянутой средней части сечения относительно оси X.

Исключая кривизну из соотношений (1) и (3) найдём связь между напряжениями и изгибающим моментом в поперечном сечении стержня:

$$\sigma_3 = \frac{M_x E_3 \left(h_1^{(-)} + y_3 \right)}{E_3 I_x^{(3)} + E_1 I_x^{(1)(-)} + E_1 I_x^{(1)(+)} + E_2 I_x^{(2)}};$$

$$\sigma_1^{(-)} = \frac{M_x E_3 y_1^{(-)}}{E_3 I_x^{(3)} + E_1 I_x^{(1)(-)} + E_1 I_x^{(1)(+)} + E_2 I_x^{(2)}};$$

$$\sigma_1^{(+)} = \frac{M_x E_1 y_1^{(+)}}{E_3 I_x^{(3)} + E_1 I_x^{(1)(+)} + E_1 I_x^{(1)(+)} + E_2 I_x^{(2)}}; \qquad (4)$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x E_2 \left(h_1^{(+)} + y_2 \right)}{E_3 I_x^{(3)} + E_1 I_x^{(1)(-)} + E_1 I_x^{(1)(+)} + E_2 I_x^{(2)}}.$$

Условия равнопрочности.

Перейдём к условиям равнопрочности в сжатой и растянутой зонах поперечного сечения неоднородного трёхслойного упругого стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба. Условия равнопрочности для неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях осевого растяжения (сжатия) представлены в работе [8].

Условие равнопрочности в сжатой зоне поперечного сечения, то есть нормальное напряжение, равное расчётному сопротивлению материала третьей части, на верхней границе третьей части поперечного сечения должно быть равно нормальному напряжению, равному расчётному сопротивлению материала первой части, на верхней границе сжатой зоны первой части поперечного сечения, будет иметь вид:

$$\frac{E_3}{R_3}\frac{R_1}{E_1} = \frac{h_1^{(-)}}{h_1^{(-)} + h_3}. \tag{5}$$

Условие равнопрочности в растянутой зоне поперечного сечения, то есть нормальное напряжение, равное расчётному сопротивлению материала третьей части, на нижней границе второй части поперечного сечения должно быть равно нормальному напряжению, равному расчётному сопротивлению материала первой части, на нижней границе растянутой зоны первой части поперечного сечения, будет иметь вид:

$$\frac{E_2}{R_2}\frac{R_1}{E_1} = \frac{h_1^{(+)}}{h_1^{(+)} + h_2}. \tag{6}$$

Используя соотношения (5) и (6) можно для заданных модулей упругости E_1, E_2, E_3 и расчётных сопротивлений R_1, R_2, R_3, а также известных размеров $h_1^{(-)}$ и $h_1^{(+)}$ рассчитать размеры поперечных сечений верхней h_3 и нижней h_2 частей балки из условия равнопрочности. Размеры сжатой $h_1^{(-)}$ и растянутой $h_1^{(+)}$ зон средней части поперечного сечения определяются на основании соотношения (2).

Поскольку в соотношение (2) входят размеры h_2 и h_3, то процедура установления размеров поперечного сечения из условий равнопрочности будет представляться итерационным процессом и содержать следующие пункты:

1. Задаёмся размерами h_1, h_2 и h_3, а также площадями неоднородных частей A_1, A_2 и A_3 поперечного сечения балки.
2. Из соотношения (2) определяем размеры сжатой $h_1^{(-)}$ и растянутой $h_1^{(+)}$ зон средней части поперечного сечения:
   a. Проведём нейтральную линию в пределах размера h_1. Тем самым определимся с размерами $h_1^{(+)}$ и $h_1^{(-)} = h_1 - h_1^{(+)}$.
   b. Вычисляем статические моменты сжатой $S_x^{(1)(-)}$ и растянутой $S_x^{(1)(+)}$ зон средней части поперечного сечения, а также статические моменты второй $S_x^{(2)}$ и третьей $S_x^{(3)}$ частей поперечного сечения.
   c. Решая уравнение (2) находим значение размера $h_1^{(+)}$.
3. Из соотношений (5) и (6) определяем размеры поперечных сечений верхней h_3 и нижней h_2 частей балки и сопоставляем их с заданными в пункте 1. алгоритма.
4. Если заданные размеры h_2 и h_3 не совпадают с вычисленными по формулам (5) и (6), то, изменив размеры h_2 и h_3 переходим к пункту 1. алгоритма. Иначе расчёт заканчиваем.

Пример.

Рассмотрим трёхслойную балку. Сечение каждого слоя – прямоугольник размерами $b_1 \times h_1, b_2 \times h_2, b_3 \times h_3$.

Пусть механические характеристики материала слоёв балки будут следующими: $E_1 = 200000$ МПа (*сталь*), $E_2 = 70000$ МПа (*алюминий*), $E_3 = 55000$ МПа (*олово*), $R_1 = 200$ МПа, $R_2 = 120$ МПа, $R_3 = 8$ МПа.

Задаёмся размерами поперечных сечений слоёв балки: $h_1 = 10$ см, $h_2 = 3{,}5$ см, $h_3 = 2{,}5$ см; $b_1 = 5$ см, $b_2 = 5$ см, $b_3 = 5$ см.

Тогда

$$S_x^{(1)(+)} = b_1 h_1^{(+)} \frac{h_1^{(+)}}{2} = \frac{b_1 \left(h_1^{(+)}\right)^2}{2};$$

$$S_x^{(1)(-)} = b_1 \left(h_1 - h_1^{(+)}\right) \frac{\left(h_1 - h_1^{(+)}\right)}{2} = \frac{b_1 \left(h_1 - h_1^{(+)}\right)^2}{2};$$

$$S_x^{(2)} = b_2 h_2 \left(h_1^{(+)} + \frac{h_2}{2} \right) = -\left(b_2 h_2 h_1^{(+)} + \frac{b_2 h_2^2}{2} \right);$$

$$S_x^{(3)} = b_3 h_3 \left(h_1^{(-)} + \frac{h_3}{2} \right) = b_3 h_3 \left(h_1 - h_1^{(+)} + \frac{h_3}{2} \right).$$

Уравнение (2) при этом получает вид:

$$- E_3 \left[- b_3 h_3 h_1^{(+)} + b_3 h_3 \left(h_1 + \frac{h_3}{2} \right) \right] - E_1 \left(\frac{b_1 \left(h_1 - h_1^{(+)}\right)^2}{2} - \frac{b_1 \left(h_1^{(+)}\right)^2}{2} \right) +$$

$$+ E_2 \left(b_2 h_2 h_1^{(+)} + \frac{b_2 h_2^2}{2} \right) = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем:

$$h_1^{(+)} = \frac{E_1 \dfrac{b_1 h_1^2}{2} - E_2 \dfrac{b_2 h_2^2}{2} + E_3 b_3 h_3 \left(h_1 + \dfrac{h_3}{2} \right)}{E_1 b_1 h_1 + E_2 b_2 h_2 + E_3 b_3 h_3}.$$

Для заданных исходных данных $h_1^{(+)} = 4{,}667$ см.

Тогда $h_1^{(-)} = h_1 - h_1^{(+)} = 10 - 4{,}667 = 5{,}333$ см.

Следовательно, толщины нижней и верхней слоёв рассматриваемой балки, полученные из условия равнопрочности, будут равны:

$$h_2 = h_1^{(+)} \left(\frac{R_2}{E_2} \frac{E_1}{R_1} - 1 \right) = 3{,}33 \text{ см}; \quad h_3 = h_1^{(-)} \left(\frac{R_3}{E_3} \frac{E_1}{R_1} - 1 \right) = 2{,}42 \text{ см}.$$

Следовательно, рассматриваемая балка соответствует условию равнопрочности.

Обобщения на многослойную балку.

Рассмотрим обобщения вышеприведённых рассуждений на многослойную балку, содержащую $n-$ разнородных слоёв, из которых $k-$ слоёв находятся в сжатой зоне, а $m-$ слоёв находятся в растянутой зоне поперечного сечения, так что $k+m+1=n$ (предполагается, что один из средних слой с номером ноль делится нейтральной линией на две части). Каждый $i-$ й слой характеризуется своими значениями модуля упругости E_i и расчётного сопротивления материала R_i.

В соответствии с гипотезой плоских сечений нормальные напряжения в слоях стержня будут равны:

$$\sigma_i^{(-)} = E_i^{(-)} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(-)} + y_i}{\rho}, i=1,2,...,k;\ \sigma_0^{(-)} = E_0 \frac{y_0^{(-)}}{\rho};$$

$$\sigma_0^{(+)} = E_0 \frac{y_0^{(+)}}{\rho};\ \sigma_i^{(+)} = E_i^{(+)} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(+)} + y_i}{\rho}, i=1,2,...,m. \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем $E_i^{(-)}$ −означает модуль упругости материала слоя балки, расположенного в сжатой зоне поперечного сечения; $E_i^{(+)}$ −означает модуль упругости материала слоя балки, расположенного в растянутой зоне поперечного сечения. Вообще говоря, $E_i^{(-)} \neq E_i^{(+)}$.

Положение нейтральной линии (оси X) найдём из условия равенства нулю продольной силы:

$$N = -\int\limits_{A_k^{(-)}} \sigma_k^{(-)} dA - \int\limits_{A_{k-1}^{(-)}} \sigma_{k-1}^{(-)} dA - ... - \int\limits_{A_1^{(-)}} \sigma_1^{(-)} dA - \int\limits_{A_0^{(-)}} \sigma_0^{(-)} dA +$$

$$+ \int\limits_{A_0^{(+)}} \sigma_0^{(+)} dA + \int\limits_{A_1^{(+)}} \sigma_1^{(+)} dA + \int\limits_{A_2^{(+)}} \sigma_2^{(+)} dA + ... + \int\limits_{A_m^{(+)}} \sigma_m^{(+)} dA =$$

$$= -\frac{E_k^{(-)}}{\rho} S_x^{(k)(-)} - \frac{E_{k-1}^{(-)}}{\rho} S_x^{(k-1)(-)} - ... - \frac{E_1^{(-)}}{\rho} S_x^{(1)(-)} + \frac{E_0^{(-)}}{\rho} S_x^{(0)(-)} +$$

$$+ \frac{E_0}{\rho} S_x^{(0)(+)} + \frac{E_1^{(+)}}{\rho} S_x^{(1)(+)} + \frac{E_2^{(+)}}{\rho} S_x^{(2)(+)} + ... + \frac{E_m^{(+)}}{\rho} S_x^{(m)(+)} = 0. \tag{8}$$

Величина внутреннего изгибающего момента относительно нейтральной оси (оси X) определяется соотношением:

$$M_x = \int\limits_{A_k^{(-)}} \sigma_k^{(-)} \left(\sum_{j=1}^{k-1} h_j^{(-)} + y_k^{(-)} \right) dA + \int\limits_{A_{k-1}^{(-)}} \sigma_{k-1}^{(-)} \left(\sum_{j=1}^{k-2} h_j^{(-)} + y_{k-1}^{(-)} \right) dA + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{A_1^{(-)}} \sigma_1^{(-)} \left(h_0^{(-)} + y_1^{(-)} \right) dA + \int\limits_{A_0^{(-)}} \sigma_0^{(-)} y_0^{(-)} dA + \int\limits_{A_0^{(+)}} \sigma_0^{(+)} y_0^{(+)} dA +$$

$$+ \int\limits_{A_1^{(+)}} \sigma_1^{(+)} \left(h_0^{(+)} + y_1^{(+)} \right) dA + \int\limits_{A_2^{(+)}} \sigma_2^{(+)} \left(h_0^{(+)} + h_1^{(+)} + y_1^{(+)} \right) dA + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{A_m^{(+)}} \sigma_m^{(+)} \left(\sum_{j=1}^{m-1} h_j^{(+)} + y_m^{(+)} \right) dA =$$

$$= \frac{E_k^{(-)}}{\rho} I_x^{(k)(-)} + \frac{E_{k-1}^{(-)}}{\rho} I_x^{(k-1)(-)} + \ldots + \frac{E_1^{(-)}}{\rho} I_x^{(1)(-)} + \frac{E_0^{(-)}}{\rho} I_x^{(0)(-)} +$$

$$+ \frac{E_0}{\rho} I_x^{(0)(+)} + \frac{E_1^{(+)}}{\rho} I_x^{(1)(+)} + \frac{E_2^{(+)}}{\rho} I_x^{(2)(+)} + \ldots + \frac{E_m^{(+)}}{\rho} I_x^{(m)(+)}; \qquad (9)$$

Из соотношения (9) определяем кривизну изогнутой оси балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI}. \qquad (10)$$

Здесь $EI = E_k^{(-)} I_x^{(k)(-)} + E_{k-1}^{(-)} I_x^{(k-1)(-)} + \ldots + E_1^{(-)} I_x^{(1)(-)} + E_0 I_x^{(0)(-)} +$

$$+ E_0 I_x^{(0)(+)} + E_1^{(+)} I_x^{(1)(+)} + E_2^{(2)} I_x^{(2)(+)} + \ldots E_m^{(+)} I_x^{(m)(+)}. \qquad (11)$$

Связь между нормальными напряжениями и изгибающим моментом в произвольном сечении каждого слоя многослойной балки будет описываться зависимостями:

$$\sigma_i^{(-)} = M_x E_i^{(-)} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(-)} + y_i}{EI}, i = 1, 2, \ldots, k;$$

$$\sigma_0^{(-)} = M_x E_0 \frac{y_0^{(-)}}{EI}; \; \sigma_0^{(+)} = M_x E_0 \frac{y_0^{(+)}}{EI}; \qquad (12)$$

$$\sigma_i^{(+)} = M_x E_i^{(+)} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(+)} + y_i}{EI}, i = 1, 2, \ldots, m.$$

Условие равнопрочности в сжатой зоне поперечного сечения имеет вид:

$$\frac{E_k^{(-)}}{R_k^{(-)}}\left(\sum_{j=1}^{k-1} h_j^{(-)} + h_k^{(-)}\right) = \frac{E_k^{(-)}}{R_k^{(-)}}\left(\sum_{j=1}^{k-2} h_j^{(-)} + h_{k-1}^{(-)}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{E_1^{(-)}}{R_1^{(-)}}\left(h_1^{(-)} + h_0^{(-)}\right) = \frac{E_0}{R_0} h_0^{(-)}; \qquad (13)$$

Условие равнопрочности в растянутой зоне поперечного сечения имеет вид:

$$\frac{E_0}{R_0} h_0^{(+)} = \frac{E_1^{(+)}}{R_1^{(+)}}\left(h_1^{(+)} + h_0^{(+)}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{E_{m-1}^{(+)}}{R_{m-1}^{(+)}}\left(\sum_{j=1}^{m-2} h_j^{(+)} + h_{m-1}^{(+)}\right) = \frac{E_m^{(+)}}{R_m^{(+)}}\left(\sum_{j=1}^{m-1} h_j^{(+)} + h_m^{(+)}\right). \qquad (14)$$

Для многослойной балки условия (13) и (14) скорее всего можно использовать лишь для оценки равнопрочности.

Выводы.

На основании теоретических и численных исследований показано, что выполнение условий равнопрочности изгибаемого стержня по сжатым и растянутым зонам поперечного сечения является труднодостижимым и, вообще говоря, может быть использовано лишь для оценки равнопрочности стержня.

Библиографический список:

1. *Александров А.В.* Сопротивление материалов: Учеб для вузов/А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. Под ред. А.В. Александрова. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2008. – 560 с.: ил.
2. Болотин В. Механика многослойных конструкций / М.: Машиностроение, - 1980. - 375 с.
3. Старовойтов Э.И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней. / М.: Изд-во МАИ, - 2016. - 184 с.
4. Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А. Современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных

стержней // Проблемы вычислительной и прикладной математики., - 2022. - № 4(42). - С. 54-78.

5. *Мищенко А.В.* Оценка прочности структурно-неоднородных балок при термосиловом воздействии. // Моделирование и механика конструкций. 2020. № 11. С. 30-43.

6. *Кравчук А.С., Кочик Е.В., Тарасюк И.А.* Чистый изгиб слоистых и композиционных призматических брусьев из упругопластических материалов. // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2016. № 2. С. 8.

7. *Бакушев С.В.* Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: учеб. пособие по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» / С.В. Бакушев. – Пенза: ПГУАС, 2023. – 176 с.

8. *Бакушев С.В.* К вопросу о равнопрочности неоднородных упругих стержней [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2021. №13.