

УДК 539.3/6

## ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

*Бакушев Сергей Васильевич*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г.Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

### **Аннотация**

Рассматривается неоднородный многослойный упругопластический стержень, находящийся в условиях осевого растяжения-сжатия. Показано, что в неоднородном упругопластическом стержне, с учётом гипотезы плоских сечений, равнодействующая продольных сил, действующих в каждом слое поперечного сечения стержня, не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного поперечного сечения. При этом, положение как точки приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругопластическом стержне, так и значение продольных сил в каждом слое стержня определяется не только механическими характеристиками материалов слоёв, но и соотношением площадей их поперечных сечений. Для соблюдения условий осевого растяжения-сжатия неоднородного многослойного стержня необходимо внешнюю силу прикладывать в точке приложения равнодействующей внутренних продольных сил. Оценку прочности неоднородного слоистого стержня при осевом растяжении-сжатии следует выполнять по максимальному нормальному напряжению в каждом слое. Оценку жёсткости неоднородного слоистого стержня при осевом растяжении-сжатии следует выполнять только по одному слою. Полученные в статье результаты могут быть использованы при проектировании неоднородных многослойных упругопластических стержней, работающих в условиях осевого растяжения-сжатия.

**Ключевые слова:** стержень, неоднородность, упругость, пластичность, осевое растяжение-сжатие.

## AXIAL TENSION-COMPRESSION OF INHOMOGENEOUS ELASTOPLASTIC RODS

*Bakushev Sergey Vasilevich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor, Associate Professor of the department "Mechanics".*

### **Abstract**

A heterogeneous multilayer elastoplastic rod under axial tension-compression conditions is considered. It is shown that in an inhomogeneous elastoplastic rod, taking into account the hypothesis of plane sections, the resultant of the longitudinal forces acting in each layer of the cross-section of the member does not coincide, generally speaking, with the center of gravity of the inhomogeneous cross-section. At the same time, the position of both the point of application of the resultant internal longitudinal forces in an inhomogeneous elastoplastic rod and the value of the longitudinal forces in each layer of the rod are determined not only by the mechanical characteristics of the materials of the layers, but also by the ratio of the areas of their cross-sectional sections. In order to comply with the axial tension-compression conditions of an inhomogeneous multilayer member, it is necessary to apply an external force at the point of application of the resultant internal longitudinal forces. The axial tension-compression strength of an inhomogeneous laminated member should be evaluated according to the maximum normal stress in each layer. Evaluation of the stiffness of an inhomogeneous layered member under axial tension-compression should be performed only one layer at a time. The results obtained in the article can be used in the design of heterogeneous multilayer elastoplastic rods operating under axial tension-compression conditions.

**Keywords:** rod, heterogeneity, elasticity, plasticity, axial tension-compression.

**Введение.**

Под неоднородным упругопластическим стержнем будем понимать такой стержень, различные части которого составляющие единое целое, выполнены из различных материалов и, следовательно, имеют различные механические характеристики, как то, объёмный вес, модуль упругости, предел текучести и так далее. Неоднородные элементы строительных и машиностроительных конструкций позволяют более качественно выполнять оптимизацию их поперечных сечений за счёт более гибкого изменения и распределения материала в пределах поперечного сечения стержня [1]. Кроме того, учёт пластической работы материала приводит к повышению его несущей способности, а, следовательно, к экономии материала.

Отечественные и зарубежные исследователи в последнее время уделяют пристальное внимание разработке теории расчёта неоднородных элементов строительных и машиностроительных конструкций с учётом пластической работы материала. Общие вопросы механики многослойных конструкций описаны в монографии [2]. Вопросы деформирования трёхслойных физически нелинейных стержней исследованы в монографии [3]. Подробное исследование современного состояния расчёта многослойных физически нелинейных конструкций дано в работе [4]. На основании принципа Остроградского-Гамильтона определены вариации кинетической и потенциальной энергии, а также работы внешних объёмных и поверхностных сил трёхслойного стержня в статье [5]. В статье [6] выполнен конечно-элементный анализ работы неоднородного шарнирно опертого стержня в статической и динамической постановках. В работе [7] исследован термосиловой изгиб несимметричного по толщине трёхслойного физически нелинейного стержня с жёстким сжимаемым нелинейно-упругим наполнителем, на упругом основании Винклера.

В данной работе рассматривается упругопластический неоднородный стержень, состоящий из жёстко связанных между собой неоднородных слоёв, часть из которых работают упруго, а часть – подчиняется диаграмме Прандтля с упрочнением. Все слои стержня одинаковой длины, но разных размеров

поперечных сечений, жёстко связаны друг с другом, так, что проскальзывание между слоями исключено. Справедлива гипотеза плоских сечений.

### Теоретические основы.

Рассмотрим неоднородный упругопластический стержень I-го типа [8]. Пусть стержень длиной  $l$  состоит из  $n$  – слоёв (рис. 1). Механические характеристики слоёв обозначим  $E_i, D_i, A_i, \sigma_{iT}, R_i, \sigma_{ipr}; i = 1, 2, \dots, n$ . Здесь  $E_i$  – модули упругости;  $D_i$  – модули упрочнения;  $\sigma_{iT}$  – пределы текучести;  $A_i$  – площади поперечных сечений слоёв поперечного сечения стержня;  $R_i$  – расчётное сопротивление материала при упругом деформировании,  $\sigma_{ipr}$  – предел прочности при пластическом деформировании.

Так как стержень многослойный и разнородный, то прочность стержня будет оцениваться по тому слою, в котором нормальное напряжение первым достигнет расчётного сопротивления при упругой работе, либо предела прочности при упругопластической работе. При этом следует руководствоваться тем, что упругая или упругопластическая работа стержня задаётся, вообще говоря, условиями его эксплуатации.

Таким образом, условие прочности многослойного разнородного стержня при осевом нагружении в пределах упругих деформаций будет иметь вид:

$$\sigma_{ei}^{\max} = \frac{N_i}{A_i} \leq R_i \gamma_d, \quad i = 1, 2, \dots, n.. \quad (1)$$

Условие прочности многослойного разнородного стержня при осевом нагружении за пределом упругих деформаций будет иметь вид:

$$\sigma_{pi}^{\max} = \frac{N_i}{A_i} \leq \sigma_{ipr} \gamma_d, \quad i = 1, 2, \dots, n.. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) обозначено:  $\gamma_d$  – коэффициент условий работы.

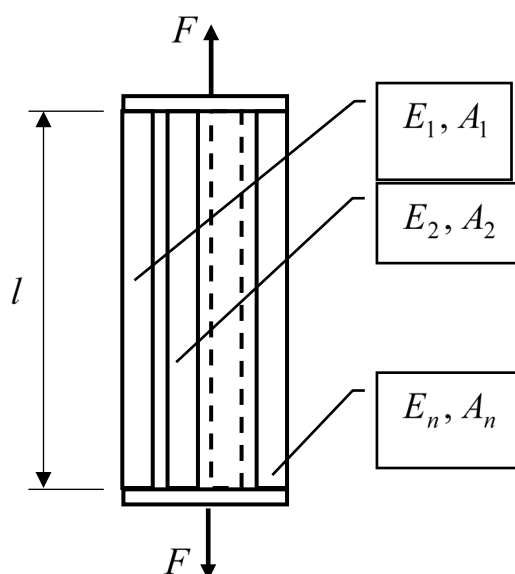


Рисунок 1 - Неоднородный стержень, состоящий из  $n$

Поскольку продольные деформации во всех слоях стержня одинаковы, то расчёт из условия жёсткости выполняется только по одному слою. Если расчётный  $k$  – й слой работает упруго, то условие жёсткости имеет вид:

$$\Delta l = \frac{N_{ek} l}{E_k A_k} \leq [\Delta l]. \quad (3)$$

Если напряжение в расчётном  $k$  – ом слое больше предела текучести, то условие жёсткости имеет вид:

$$\Delta l = \frac{N_k l}{D_k A_k} - \sigma_{kT} l \frac{E_k - D_k}{E_k D_k} \leq [\Delta l]. \quad (4)$$

При конструировании многослойного разнородного стержня и включения его в работу конструкции важно знать точку приложения внешней силовой нагрузки. Эта точка как правило не совпадает с центром тяжести поперечного сечения стержня. Методика определения её координат для упругого деформирования многослойного разнородного стержня изложена в статье [9]. Эта методика остаётся неизменной и при упругопластическом деформировании многослойного разнородного стержня.

Если во всех слоях нормальное напряжение не превышает свой предел текучести, то имеем следующую систему уравнений для определения продольных усилий в каждом слое стержня:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + \dots + N_n &= F; \\ \frac{N_1 l}{E_1 A_1} &= \frac{N_2 l}{E_2 A_2} = \dots = \frac{N_n l}{E_n A_n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решая систему уравнений (5), находим:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}}; \\ N_2 &= \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}; \\ N_3 &= \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1}; \dots; \\ N_n &= \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассматривая упругопластический неоднородный стержень, состоящий из  $n$  слоёв из которых нормальные напряжения в первых  $m$  слоях не превышают своих пределов текучести, а в следующих  $n - m$  слоях превышают свои пределы текучести, получим:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + \dots + N_n &= F; \\ \varepsilon_{1z} &= \varepsilon_{2z} = \dots = \varepsilon_{nz}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь для билинейной диаграммы растяжения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1z} &= \frac{\sigma_{1z}}{E_1}; \quad \varepsilon_{2z} = \frac{\sigma_{2z}}{E_2}; \dots; \quad \varepsilon_{mz} = \frac{\sigma_{mz}}{E_m}; \\ \varepsilon_{m+1,z} &= \frac{\sigma_{m+1,z} - \sigma_{m+1,\Gamma}}{D_{m+1}} + \varepsilon_{m+1,\Gamma} = \frac{\sigma_{m+1,z}}{D_{m+1}} - \sigma_{m+1,\Gamma} \frac{E_{m+1} - D_{m+1}}{E_{m+1} D_{m+1}}; \dots; \\ \varepsilon_{nz} &= \frac{\sigma_{nz} - \sigma_{n\Gamma}}{D_n} + \varepsilon_{n\Gamma} = \frac{\sigma_{nz}}{D_n} - \sigma_{n\Gamma} \frac{E_n - D_n}{E_n D_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решая систему уравнений (7) с учётом зависимостей (8), найдём продольную силу в каждом однородном слое поперечного сечения стержня:

$$N_1 = \frac{F - \sigma_{m+1,T} K_{m+1} A_{m+1} D_{m+1} - \sigma_{m+2,T} K_{m+2} A_{m+2} D_{m+2} - \dots - \sigma_{nT} K_n A_n D_n}{1 + \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1} + \frac{A_3 E_3}{A_1 E_1} + \dots + \frac{A_m E_m}{A_1 E_1} + \frac{A_{m+1} D_{m+1}}{A_1 E_1} + \frac{A_{m+2} D_{m+2}}{A_1 E_1} + \dots + \frac{A_n D_n}{A_1 E_1}};$$

$$N_2 = N_1 \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1}; \quad N_3 = N_1 \frac{A_3 E_3}{A_1 E_1}; \dots; \quad N_m = N_1 \frac{A_m E_m}{A_1 E_1};$$

$$N_{m+1} = N_1 \frac{A_{m+1} D_{m+1}}{A_1 E_1} + \sigma_{m+1,T} K_{m+1} A_{m+1} D_{m+1}; \quad (9)$$

$$N_{m+2} = N_1 \frac{A_{m+2} D_{m+2}}{A_1 E_1} + \sigma_{m+2,T} K_{m+2} A_{m+2} D_{m+2};$$

$$N_n = N_1 \frac{A_n D_n}{A_1 E_1} + \sigma_{nT} K_n A_n D_n.$$

$$\text{Здесь } K_{m+1} = \frac{E_{m+1} - D_{m+1}}{E_{m+1} D_{m+1}}; \quad K_{m+2} = \frac{E_{m+2} - D_{m+2}}{E_{m+2} D_{m+2}}; \dots; \quad K_n = \frac{E_n - D_n}{E_n D_n}.$$

Рассматривая упругопластический неоднородный стержень, состоящий из  $n$  слоёв, нормальные напряжения в котором в каждом слое превышает свой предел текучести, получим:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + \dots + N_n &= F; \\ \varepsilon_{1z} &= \varepsilon_{2z} = \dots = \varepsilon_{nz}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь для билинейной диаграммы растяжения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1z} &= \frac{\sigma_{1z} - \sigma_{1T}}{D_1} + \varepsilon_{1T} = \frac{\sigma_{1z}}{D_1} - \sigma_{1T} \frac{E_1 - D_1}{E_1 D_1}; \\ \varepsilon_{2z} &= \frac{\sigma_{2z} - \sigma_{2T}}{D_2} + \varepsilon_{2T} = \frac{\sigma_{2z}}{D_2} - \sigma_{2T} \frac{E_2 - D_2}{E_2 D_2}; \dots; \\ \varepsilon_{nz} &= \frac{\sigma_{nz} - \sigma_{nT}}{D_n} + \varepsilon_{nT} = \frac{\sigma_{nz}}{D_n} - \sigma_{nT} \frac{E_n - D_n}{E_n D_n}. \end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$K_1 = \frac{E_1 - D_1}{E_1 D_1}; \quad K_2 = \frac{E_2 - D_2}{E_2 D_2}; \dots; \quad K_n = \frac{E_n - D_n}{E_n D_n}.$$

Решая систему (10), найдём продольные силы в каждом слое стержня:

$$N_1 = \frac{F - A_2 D_2 Q_{21} - A_3 D_3 (Q_{21} + Q_{32}) - \dots - A_n D_n (Q_{21} + Q_{32} + \dots + Q_{n,n-1})}{1 + \frac{A_2 D_2}{A_1 E_1} + \frac{A_3 D_3}{A_1 E_1} + \dots + \frac{A_n D_n}{A_1 E_1}};$$

$$N_2 = N_1 \frac{A_2 D_2}{A_1 E_1} + A_2 D_2 Q_{21}; \quad N_3 = N_1 \frac{A_3 D_3}{A_1 E_1} + A_3 D_3 (Q_{21} + Q_{32}); \dots; \quad (11)$$

$$N_n = N_1 \frac{A_n D_n}{A_1 E_1} + A_n D_n (Q_{21} + Q_{32} + \dots + Q_{n,n-1})$$

Здесь

$$Q_{21} = \sigma_{2T} K_2 - \sigma_{1T} K_1; \quad Q_{32} = \sigma_{3T} K_3 - \sigma_{2T} K_2; \dots; \quad Q_{n,n-1} = \sigma_{nT} K_n - \sigma_{n-1,T} K_{n-1}.$$

Для нормальных напряжений, равномерно распределённых по площади поперечного сечения каждого слоя, имеем связь между продольными силами и нормальными напряжениями:

$$N_1 = \sigma_{1z} A_1; \quad N_2 = \sigma_{2z} A_2; \dots; \quad N_n = \sigma_{nz} A_n. \quad (12)$$

Так как стержень при осевом растяжении (сжатии, без потери устойчивости) сохраняет прямолинейную форму, то внутренние изгибающие моменты относительно осей координат  $X$  и  $Y$  (ось  $Z$  – направлена вдоль продольной оси стержня, но, возможно, не совпадает с ней) в поперечном сечении будут равны нулю:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{A_1} \sigma_{1z} y dA + \int_{A_2} \sigma_{2z} y dA + \dots + \int_{A_n} \sigma_{nz} y dA = \\ &= \sigma_{1z} \int_{A_1} y dA + \sigma_{2z} \int_{A_2} y dA + \dots + \sigma_{nz} \int_{A_n} y dA = \\ &= \sigma_{1z} \cdot S_{1x} + \sigma_{2z} \cdot S_{2x} + \dots + \sigma_{nz} \cdot S_{nx} = 0; \\ M_y &= \int_{A_1} \sigma_{1z} x dA + \int_{A_2} \sigma_{2z} x dA + \dots + \int_{A_n} \sigma_{nz} x dA = \\ &= \sigma_{1z} \int_{A_1} x dA + \sigma_{2z} \int_{A_2} x dA + \dots + \sigma_{nz} \int_{A_n} x dA = \\ &= \sigma_{1z} \cdot S_{1y} + \sigma_{2z} \cdot S_{2y} + \dots + \sigma_{nz} \cdot S_{ny} = 0; \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношения (12), получим:



$$\begin{aligned}\sigma_{1z} \cdot S_{1x} + \sigma_{2z} \cdot S_{2x} + \dots + \sigma_{nz} \cdot S_{nx} &= \frac{N_1}{A_1} S_{1x} + \frac{N_2}{A_2} S_{2x} + \dots + \frac{N_n}{A_n} S_{nx} = 0; \\ \sigma_{1z} \cdot S_{1y} + \sigma_{2z} \cdot S_{2y} + \dots + \sigma_{nz} \cdot S_{ny} &= \frac{N_1}{A_1} S_{1y} + \frac{N_2}{A_2} S_{2y} + \dots + \frac{N_n}{A_n} S_{ny} = 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь  $S_{ix}$  и  $S_{iy}$  - статические моменты площадей поперечных сечений  $i$ -х слоёв стержня относительно осей  $X, Y$  начало координат которых совпадает с точкой приложения равнодействующей внутренних усилий, действующих в каждом слое стержня.

Решая систему (13), находим координаты точки приложения равнодействующей внутренних усилий, действующих в каждом слое стержня.

Для неоднородной плоской фигуры единичной толщины, расположенной перпендикулярно к оси  $\tilde{Z}$ , направленной к центру земли, центр тяжести в некоторой вспомогательной системе координат  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  определяется формулами [10]

$$x_c = \frac{\int_A x \cdot \gamma_s(x,y) \cdot dA}{\int_A \gamma_s(x,y) \cdot dA} ; y_c = \frac{\int_A y \cdot \gamma_s(x,y) \cdot dA}{\int_A \gamma_s(x,y) \cdot dA} . \quad (14)$$

Здесь  $\gamma_s(x,y)$  – вес единицы площади плоской фигуры;

$\int_A \gamma_s(x,y) \cdot dA$  – вес всей плоской фигуры.

Центр тяжести плоской фигуры, состоящей из  $n$  частей с разными объёмными весами, в системе вспомогательных координат  $\tilde{X}, \tilde{Y}$ , будет определяться соотношениями:

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{\int_{A_1} x\gamma_1 dA + \int_{A_2} x\gamma_2 dA + \dots + \int_{A_n} x\gamma_n dA}{\int_{A_1} \gamma_1 dA + \int_{A_2} \gamma_2 dA + \dots + \int_{A_n} \gamma_n dA} = \\
&= \frac{\gamma_1 \int_{A_1} x dA + \gamma_2 \int_{A_2} x dA + \dots + \gamma_n \int_{A_n} x dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \dots + \gamma_n A_n} = \frac{\gamma_1 S_{1y} + \gamma_2 S_{2y} + \dots + \gamma_n S_{ny}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \dots + \gamma_n A_n}; \\
y_c &= \frac{\int_{A_1} y\gamma_1 dA + \int_{A_2} y\gamma_2 dA + \dots + \int_{A_n} y\gamma_n dA}{\int_{A_1} \gamma_1 dA + \int_{A_2} \gamma_2 dA + \dots + \int_{A_n} \gamma_n dA} = \\
&= \frac{\gamma_1 \int_{A_1} y dA + \gamma_2 \int_{A_2} y dA + \dots + \gamma_n \int_{A_n} y dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \dots + \gamma_n A_n} = \frac{\gamma_1 S_{1x} + \gamma_2 S_{2x} + \dots + \gamma_n S_{nx}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \dots + \gamma_n A_n}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  – объёмные веса материала первого, второго, ...,  $n$  – ого слоёв плоской фигуры.

Сопоставляя формулы (13) и (15) можно утверждать, то точка приложения равнодействующей продольных сил  $N_1, N_2, \dots, N_n$  не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного плоского поперечного сечения стержня. В силу этого обстоятельства внешнюю сосредоточенную силу следует прикладывать в точке приложения равнодействующей продольных сил  $N_1, N_2, \dots, N_n$  для обеспечения чистого осевого растяжения-сжатия стержня.

### Пример.

Рассмотрим неоднородный стержень с прямоугольным поперечным сечением размерами  $a \times b$  (рис. 2).

Стержень состоит из двух слоёв, выполненных из материала с разными объёмными весами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Ширина первой части поперечного сечения  $a_1$ , ширина второй части -  $a_2$ .

Введём систему декартовых координат  $X, Y$ . Ось  $X$  совместим с горизонтальной осью симметрии плоской фигуры, а ось  $Y$  проведём, например, между центрами тяжести первой и второй фигур.

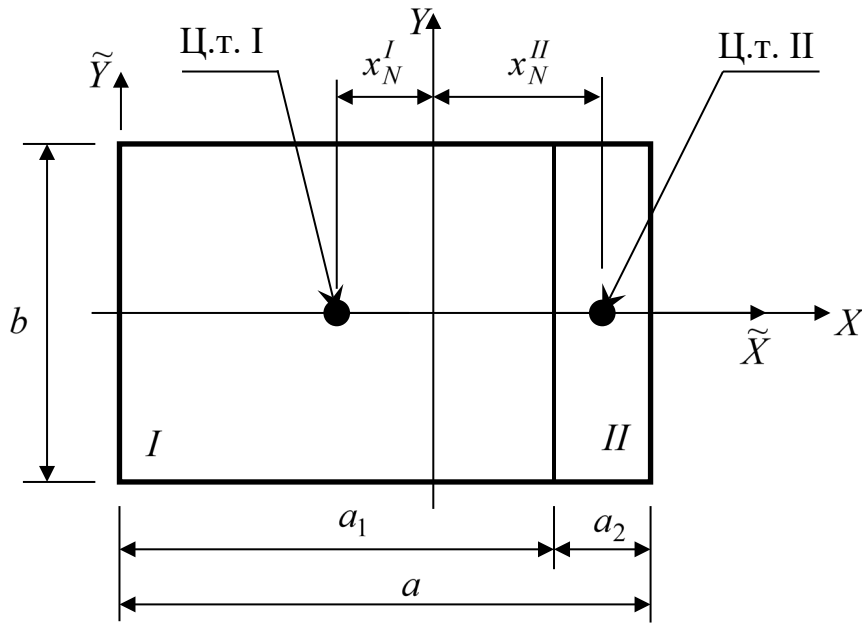


Рисунок 2 - К примеру

Тогда  $S_{1x} = 0$ ;  $S_{2x} = 0$ ;  $S_{1y} = -A_1 x_N^I$ ;  $S_{2y} = A_2 x_N^{II}$ .

Здесь  $A_1 = a_1 b$ ;  $A_2 = a_2 b$ .

Кроме того,  $\frac{1}{2}a_1 + x_N^I + x_N^{II} + \frac{1}{2}a_2 = 0$ , то есть

$$x_N^I = \frac{1}{2}a - x_N^{II}. \quad (16)$$

Следовательно,  $S_{1y} = -a_1 b \left( \frac{1}{2}a - x_N^{II} \right)$ ;  $S_{2y} = a_2 b x_N^{II}$ .

Система (13) при этом получает вид:

$$\frac{N_1}{A_1} S_{1y} + \frac{N_2}{A_2} S_{2y} = 0, \quad (17)$$

причём, при упругой работе стержня (формулы (6))

$$N_1 = \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}}; \quad N_2 = N_1 \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}; \quad (18)$$

при упругопластической работе (формулы (9))

$$N_1 = \frac{F - \sigma_{2T} K_2 A_2 D_2}{1 + \frac{D_2 A_2}{E_1 A_1}}; N_2 = N_1 \frac{D_2 A_2}{E_1 A_1} + \sigma_{2T} K_2 A_2 D_2; K_2 = \frac{E_2 - D_2}{E_2 D_2}. \quad (19)$$

При пластической работе (формулы (11))

$$N_1 = \frac{F - A_2 D_2 (\sigma_{2T} K_2 - \sigma_{1T} K_1)}{1 + \frac{D_2 A_2}{D_1 A_1}}; \quad (20)$$

$$N_2 = N_1 \frac{D_2 A_2}{D_1 A_1} + A_2 D_2 (\sigma_{2T} K_2 - \sigma_{1T} K_1).$$

Здесь ;  $K_1 = \frac{E_1 - D_1}{E_1 D_1}$  ; ;  $K_2 = \frac{E_2 - D_2}{E_2 D_2}$ .

Из уравнения (17) находим

$$x_N^{II} = \frac{\frac{1}{2} a a_1 \frac{N_1}{A_1}}{a_1 \frac{N_1}{A_1} + a_2 \frac{N_2}{A_2}}. \quad (21)$$

По полученным значениям  $x_N^I, x_N^{II}$  (формулы (16) и (21)) уточняется положение оси  $Y$ .

Найдём положение центра тяжести плоской фигуры во вспомогательной системе координат  $\tilde{X}, \tilde{Y}$ . Имеем:

$$x_{ц.т.}^I = \frac{1}{2} a_1; y_{ц.т.}^I = 0; A_1 = a_1 b; x_{ц.т.}^{II} = a_1 + \frac{1}{2} a_2; y_{ц.т.}^{II} = 0; A_2 = a_2 b.$$

Следовательно, в соответствии с формулами (18),

$$y_c = 0; x_c = \frac{\gamma_1 A_1 x_{ц.т.}^I + \gamma_2 A_2 x_{ц.т.}^{II}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}.$$

Исходные данные:

Первый слой стержня выполнен из бетона с объёмным весом  $\gamma_1 = 2400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ; второй слой стержня – это сталь с объёмным весом  $\gamma_2 = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Модуль упругости бетона  $E_1 = 20000$  МПа; модуль упругости стали  $E_2 = 200000$  МПа. Модуль упрочнения бетона примем равным

$D_1 = 10000$  МПа; модуль упрочнения стали примем равным  $D_2 = 100000$  МПа .  
Предел текучести бетона  $\sigma_{1T} = 30$  МПа; предел текучести стали  $\sigma_{2T} = 240$  МПа  
. Размеры поперечного сечения:  $a_1 = 0,3$  м;  $b_1 = b_2 = b = 0,25$  м;  $a_2 = 0,2$  м .

Решение показывает:

Стержень будет работать в упругой стадии, если  $F \leq 13500$  кН .

При этом, для  $F = 13500$  кН имеем:  $x_N^I = 21,73$  см;  $x_N^{II} = 3,26$  см .

$$N_1 = 1760,87 \text{ кН}; N_2 = 11739,13 \text{ кН} .$$

$$\sigma_{1z} = 23,48 \text{ МПа}; \sigma_{2z} = 234,78 \text{ МПа} .$$

Стержень будет работать в пластической стадии, если  $F \geq 19000$  кН .

При этом, для  $F = 19000$  кН имеем:  $x_N^I = 21,48$  см;  $x_N^{II} = 3,52$  см .

$$N_1 = 2673,91 \text{ кН}; N_2 = 16326,09 \text{ кН} .$$

$$\sigma_{1z} = 35,65 \text{ МПа}; \sigma_{2z} = 326,52 \text{ МПа} .$$

Стержень будет работать в упругопластической стадии, если  $13500 < F < 19000$  кН .

При этом, для  $F = 15000$  кН имеем:  $x_N^I = 23,04$  см;  $x_N^{II} = 1,96$  см .

$$N_1 = 1173,91 \text{ кН}; N_2 = 13826,09 \text{ кН} .$$

$$\sigma_{1z} = 15,65 \text{ МПа}; \sigma_{2z} = 276,52 \text{ МПа} .$$

Центр тяжести поперечного сечения рассматриваемого многослойного неоднородного стержня располагается в точке с координатами  $x_c = 32,105$  см;  $y_c = 0,0$  см .

## **Выводы.**

1. Точка приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном многослойном упругопластическом стержне не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного поперечного сечения стержня.
2. Положение как точки приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном многослойном упругопластическом

стержне, так и значение продольных сил в каждом слое стержня определяется не только механическими характеристиками материалов неоднородностей, но и соотношением площадей поперечных сечений неоднородностей.

3. Для соблюдения условий осевого растяжения-сжатия неоднородного многослойного стержня необходимо внешнюю силу прикладывать в точке приложения равнодействующей внутренних продольных сил, действующих в каждом слое стержня.
4. Оценку прочности неоднородного слоистого стержня при осевом растяжении-сжатии следует выполнять по максимальному нормальному напряжению в каждом слое.
5. Оценку жёсткости неоднородного слоистого стержня при осевом растяжении-сжатии следует выполнять только по одному слою.

#### **Заключение.**

Полученные в статье результаты могут быть использованы при проектировании многослойных упругопластических стержней, работающих в условиях осевого растяжения-сжатия.

#### **Библиографический список:**

1. *Александров А.В.* Сопротивление материалов: Учеб для вузов/А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. Под ред. А.В. Александрова. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2008. – 560 с.: ил.
2. *Болотин, В.В.* Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. - М.: Машиностроение, 1980. - 375 с.
3. *Старовойтов, Э.И.* Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский. - М.: Изд-во МАИ, 2016. - 184 с.
4. *Анарова Ш.А., Шокиров Д.А., Исмоилов Ш.М.* Современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных стержней // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2022. № 4 (42). С. 54-78.

5. *Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А.* Математическая модель деформации трёхслойных стержней при пространственных нагрузках // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2023. № 5 (52). С. 56-82.
6. *Егоров А.В.* Конечно-элементный анализ продольно сжатого стержня // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2018. № 4. С. 114-118.
7. *Леоненко Д.В.* Термосиловое нагружение трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем на упругом основании // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2018. № 6 (111). С. 67-73.
8. *Бакушев С.В.* К вопросу о равнопрочности неоднородных упругих стержней [Электронный ресурс]//Моделирование и механика конструкций. 2021. №13.
9. *Бакушев С.В., Шереметьева М.И.* К вопросу об осевом растяжении-сжатии неоднородных упругих стержней. [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2024. №20. С. 17.
10. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. В двух томах. Т. 1. Статика и кинематика. – 3-е изд., стереотип. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 272 с.