

УДК 624.042.8

**ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЁСТКОСТИ СТЕРЖНЯ ПРИ ЕГО
ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ
УРАВНЕНИЮ**

Евсеев Александр Евгеньевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Машин Валерий Михайлович,

*ООО «СпецПроектЦентр»,
г.Пенза,*

кандидат технических наук.

Евсеев Илья Александрович,

*ООО «СФ ТЦС»,
г.Москва,*

инженер-конструктор.

Аннотация

В рамках настоящего исследования разработана унифицированная методология построения матриц жесткости для плоских стержневых конструкций, базирующаяся на дифференциальном уравнении равновесия в перемещениях. Предложенная методика позволяет проводить комплексный анализ деформирования данных систем под воздействием статических и динамических нагрузок, с учетом влияния упругого основания и внутренних диссипативных сил.

Особое внимание уделено применению аппарата комплексных переменных и соответствующих им комплексных матриц жесткости для расчета вынужденных гармонических колебаний стержневых конструкций.

Данная методология обеспечивает точное моделирование динамического поведения систем с учетом внутренних диссипативных процессов.

Проведенная верификация предложенной методики посредством сопоставления полученных матриц жесткости с эталонными решениями классического метода перемещений подтвердила ее высокую эффективность и корректность, включая граничные случаи нулевых параметров гармонических колебаний и внутренней продольной силы. Это свидетельствует о применимости разработанного подхода для решения широкого спектра задач механики стержневых систем в условиях различных внешних и внутренних воздействий.

Ключевые слова: строительная механика, матрица жесткости, колебания, деформации, дифференциальные уравнения.

CONSTRUCTION OF ROD STRIFFNESS MATRIXES UNDER ITS BENDING DEFORMATIONS ACCORDING TO THE DIFFERENTIAL EQUATION

Evseev Alexander Evgenievich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics "

Machine Valery Mikhailovich,

LLC "Special Project Center", Penza,

Candidate of Sciences.

Evseev Ilya Aleksandrovich,

LLC "SF TTS", Moscow,

Design Engineer.

Abstract

In the framework of this study, a unified methodology for constructing stiffness matrices for flat rod structures based on the differential equation of equilibrium in displacements has been developed. The proposed technique allows for a comprehensive analysis of the deformation of these systems under the influence of static and dynamic loads, taking into account the influence of the elastic base and internal dissipative forces.

Special attention is paid to the application of the apparatus of complex variables and their corresponding complex stiffness matrices for calculating forced harmonic vibrations of rod structures. This methodology provides accurate modeling of the dynamic behavior of systems, taking into account internal dissipative processes.

The verification of the proposed technique by comparing the obtained stiffness matrices with reference solutions of the classical displacement method confirmed its high efficiency and correctness, including the boundary cases of zero harmonic vibration parameters and internal longitudinal force. This indicates the applicability of the developed approach to solving a wide range of problems in the mechanics of core systems under various external and internal influences.

Keywords: structural mechanics, stiffness matrix, vibrations, deformations, differential equations

Настоящая публикация представляет собой систематизированное и логически последовательное обобщение результатов цикла ранее проведенных исследований [1-6], охватывающих временной промежуток с 2021 по 2024 год. В рамках данного этапа анализа осуществляется интеграция накопленных эмпирических данных и теоретических выводов в более широкий концептуальный контекст научного дискурса. Это позволяет сформировать целостное и многогранное понимание

исследуемой проблематики, обеспечивая ее всестороннее осмысление и научную интерпретацию.

Рассмотрим произвольную плоскую стержневую конструкцию, подверженную воздействию узловых статических или динамических нагрузок, изменяющихся по гармоническому закону. Элементы системы могут быть соединены с упругим винклеровским основанием. Для анализа такой конструкции будем применять метод конечных элементов в форме метода перемещений, учитывая продольно-поперечный изгиб, что соответствует деформационному расчёту.

Построение матрицы жёсткости (МЖ) для стержневых элементов системы становится тривиальной задачей в случае отсутствия учёта явления продольно-поперечного изгиба и при рассмотрении только статического нагружения системы, не связанной с упругим основанием. Как известно [7], МЖ может быть сформирована на основе общих матричных уравнений строительной механики, путём задания поля перемещений в виде кубического многочлена [8] или с использованием табличных значений единичных реакций традиционного метода перемещений.

Однако задача существенно усложняется при проведении деформационного расчёта системы, связанной с упругим основанием и подверженной динамическим нагрузкам. В этом контексте необходимо учитывать дополнительные факторы, влияющие на распределение напряжений и деформаций в конструкции.

Деформационный расчёт статически неопределимых стержневых систем традиционно осуществляется с применением итерационных процедур или шагового метода. При использовании итерационного метода, такого как метод Ньютона-Рафсона, или шагового метода, помимо обычных матриц жёсткости необходимо формировать так называемые касательные матрицы жёсткости. Однако, как показывает практика, метод

простых итераций, не требующий построения касательных матриц, также может быть успешно применён для решения подобных задач.

Анализ плоских стержневых систем с учетом продольно-поперечного изгиба и динамических нагрузок представляет собой нетривиальную инженерную задачу, требующую применения современных методов численного анализа и учета множества факторов, влияющих на поведение конструкции. В рамках данной проблематики Н.Н. Шапошников предложил подход к построению матриц жесткости (МЖ) с использованием дифференциальных уравнений изогнутой оси. Другие исследователи, такие как Караманский [8] и Штюсси [9], разработали приближенные методики построения МЖ, основанные на различных формах аппроксимации изогнутой оси элементов и полей перемещений, что позволило им получить приближенные матрицы жесткости для ряда частных случаев.

Настоящая статья посвящена вопросам построения МЖ для плоских стержневых систем в общем случае, включая продольно-поперечный изгиб, упругое основание и динамические нагрузки, с учетом и без учета сил внутреннего сопротивления по В. Фойгту. В работе представлено обоснование точной методики, основанной на дифференциальном уравнении, и приближенной методики, а также исследуется сходимость приближенных МЖ к точным путем предельного перехода. Дается численная оценка точности приближенных матриц жесткости.

Исследование охватывает прямолинейные стержни постоянного сечения, изготовленные из линейно-упругого материала. Матрицы жесткости строятся в местной (локальной) системе координат, связанной со стержнем. Начало этой системы координат совпадает с начальным сечением стержня, обозначаемым как "н", а конец стержня соответствует сечению "к".

Как известно, МЖ стержня состоит из двух независимых частей: одна отражает продольные реакции стержня, другая — изгибные. Эти части могут быть получены независимо друг от друга, что позволяет упростить процесс построения МЖ. Переход от локальной системы координат к глобальной осуществляется с использованием общепринятых методов [7].

Введём обозначения:

l — длина стержня;

b — ширина стержня;

m — погонная масса стержня;

E — модуль упругости стержня;

J — момент инерции стержня;

F — площадь поперечного сечения стержня;

и правила знаков, используемые в дальнейшем. На рис.1 изображён стержень в местной системе координат и указаны положительные направления перемещений (рис. 1.а), реакций (рис. 1.б) его концов и внутренних усилий (рис. 1.в).

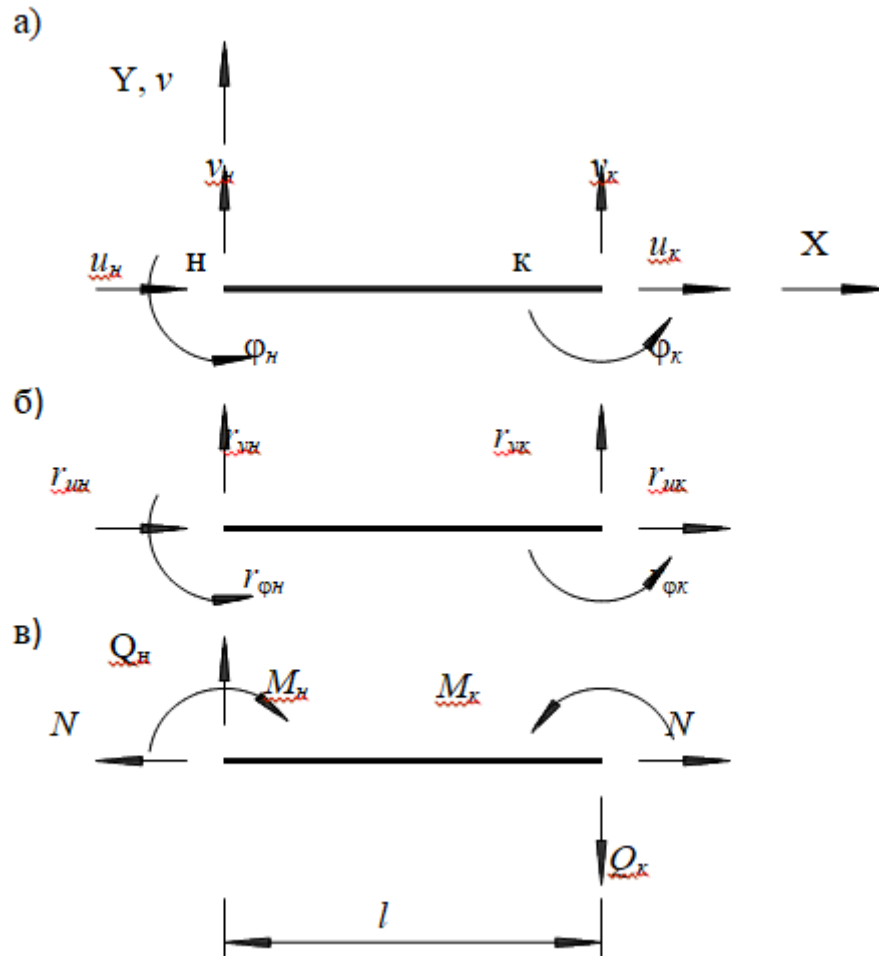


Рисунок 1 - Положительные направления перемещений, внутренних усилий и реакций концов стержня

Рассмотрим дифференциальное уравнение равновесия стержня, опирающегося на упругое основание Винклера, в условиях установившихся вынужденных поперечных гармонических колебаний, вызванных узловой нагрузкой $P(t) = P \cdot \sin(\Theta \cdot t)$. Учёт продольно-поперечного изгиба стержня в рамках теории перемещений приводит к следующему математическому выражению:

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} \pm \frac{|N|}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{k \cdot b}{E \cdot J} \cdot V = 0, \quad (1)$$

где $V = V(x, t)$ — функция прогибов стержня; N — внутренняя продольная сила в стержне; k — коэффициент постели упругого

основания; t — время. Здесь знак "+" перед вторым слагаемым соответствует сжато-изогнутому стержню, а знак "-" — растянуто-изогнутому. Считаем, что функция прогибов также изменяется во времени по закону синуса

$$V = v(x) \cdot \sin(\Theta \cdot t), \quad (2)$$

где $v = v(x)$ — амплитудная функция прогибов; Θ — круговая частота поперечных колебаний. Подставляя (2) и производные от него в (1), получим дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, записанное через амплитудную функцию прогибов:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} \pm \frac{|N|}{E \cdot J} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{k \cdot b - m \cdot \Theta^2}{E \cdot J} \cdot v = 0. \quad (3)$$

Введём обозначения

$$\alpha^2 = \pm \frac{|N|}{E \cdot J}; \quad \beta^4 = \frac{k \cdot b - m \cdot \Theta^2}{E \cdot J}. \quad (4)$$

С учётом этих обозначений дифференциальное уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \alpha^2 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \beta^4 \cdot v = 0, \quad (5)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения может быть представлено в форме

$$v(x) = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + a_3 \cdot f_3(x) + a_4 \cdot f_4(x), \quad (6)$$

где $f_i(x)$ - линейно-независимые решения дифференциального уравнения (5); a_i - произвольные постоянные, $i = 1 \div 4$.

Вид решений $f_i(x)$ зависит от корней соответствующего характеристического уравнения. Запишем выражение (6) в матричной форме

$$v(x) = \vec{H}^T(x) \cdot \vec{a}, \quad (7)$$

где $\vec{H}^T(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x) \ f_4(x)]$ — вектор линейно-независимых решений дифференциального уравнения (3); $\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]^T$ — вектор произвольных постоянных.

Выразим вектор перемещений $\vec{z} = [v_n \ \varphi_n \ v_k \ \varphi_k]^T$ через общее решение (7) дифференциального уравнения (5) следующим образом:

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(l) \\ v'(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{H}^T(0) \\ d\vec{H}^T(0)/dx \\ \vec{H}^T(l) \\ d\vec{H}^T(l)/dx \end{bmatrix} \cdot \vec{a} = L \cdot \vec{a}, \quad (8)$$

где L - квадратная матрица четвёртого порядка, элементами которой являются значения функций $f_i(x)$ и их производных $f_i'(x)$ при $x=0$ и $x=l$. Исходя из этого выражения, вектор произвольных постоянных $\vec{a}$ можно представить следующим образом

$$\vec{a} = L^{-1} \cdot \vec{z}. \quad (9)$$

Теперь общее решение принимает вид

$$v(x) = \vec{H}^T(x) \cdot L^{-1} \cdot \vec{z}. \quad (10)$$

Для определения вектора реакций стержня $\vec{r}$ воспользуемся известными дифференциальными зависимостями внутренних усилий от перемещений

$$M = E \cdot J \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}; \quad Q = E \cdot J \cdot \left(\frac{d^3 v}{dx^3} + \alpha^2 \cdot \frac{dv}{dx} \right).$$

Подставляя эти выражения в матрицу жесткости, получим

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \begin{bmatrix} Q_H \\ -M_H \\ -Q_K \\ M_K \end{bmatrix} = E \cdot J \cdot \begin{bmatrix} v'''(0) + \alpha^2 \cdot v'(0) \\ -v''(0) \\ -v'''(l) - \alpha^2 \cdot v'(l) \\ v''(l) \end{bmatrix} = \\
&= E \cdot J \cdot \begin{bmatrix} d^3 \vec{H}^T(0) / dx^3 + \alpha^2 \cdot d\vec{H}^T(0) / dx \\ -d^2 \vec{H}^T(0) / dx^2 \\ -d^3 \vec{H}^T(l) / dx^3 - \alpha^2 \cdot d\vec{H}^T(l) / dx \\ d^2 \vec{H}^T(l) / dx^2 \end{bmatrix} \cdot L^{-1} \cdot \vec{z} = L_1 \cdot L^{-1} \cdot \vec{z}
\end{aligned} \tag{11}$$

Что позволяет определить матрицу жёсткости как произведение двух матриц

$$r = L_1 \cdot L^{-1}. \tag{12}$$

Конкретный вид матриц L и L_1 зависит от вида корней характеристического уравнения и типа решаемой задачи. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Для этого проанализируем параметры α^2 и β^4 , (блок-схема этого анализа показана на рис. 2).

Если $\alpha^2 = 0$, $\beta^4 = 0$, то имеем простой изгиб стержня. Матрица жёсткости принимает вид, широко освещённый в литературе [1, 3].

Если $\alpha^2 = 0$, $\beta^4 > 0$ и $\Theta = 0$, то получаем стержень на упругом основании.

Если $\alpha^2 = 0$, $\beta^4 < 0$ и $k = 0$, то имеем вынужденные гармонические поперечные колебания стержня.

Если $\alpha^2 > 0$, $\beta^4 = 0$, то получаем сжато-изогнутый стержень.

Если $\alpha^2 < 0$, $\beta^4 = 0$, то получаем растянуто-изогнутый стержень.

Если $\alpha^2 \neq 0$, $\beta^4 \neq 0$ или $\alpha^2 = 0$, $k \neq 0$, $\Theta \neq 0$, то имеем общий случай воздействий на стержень.

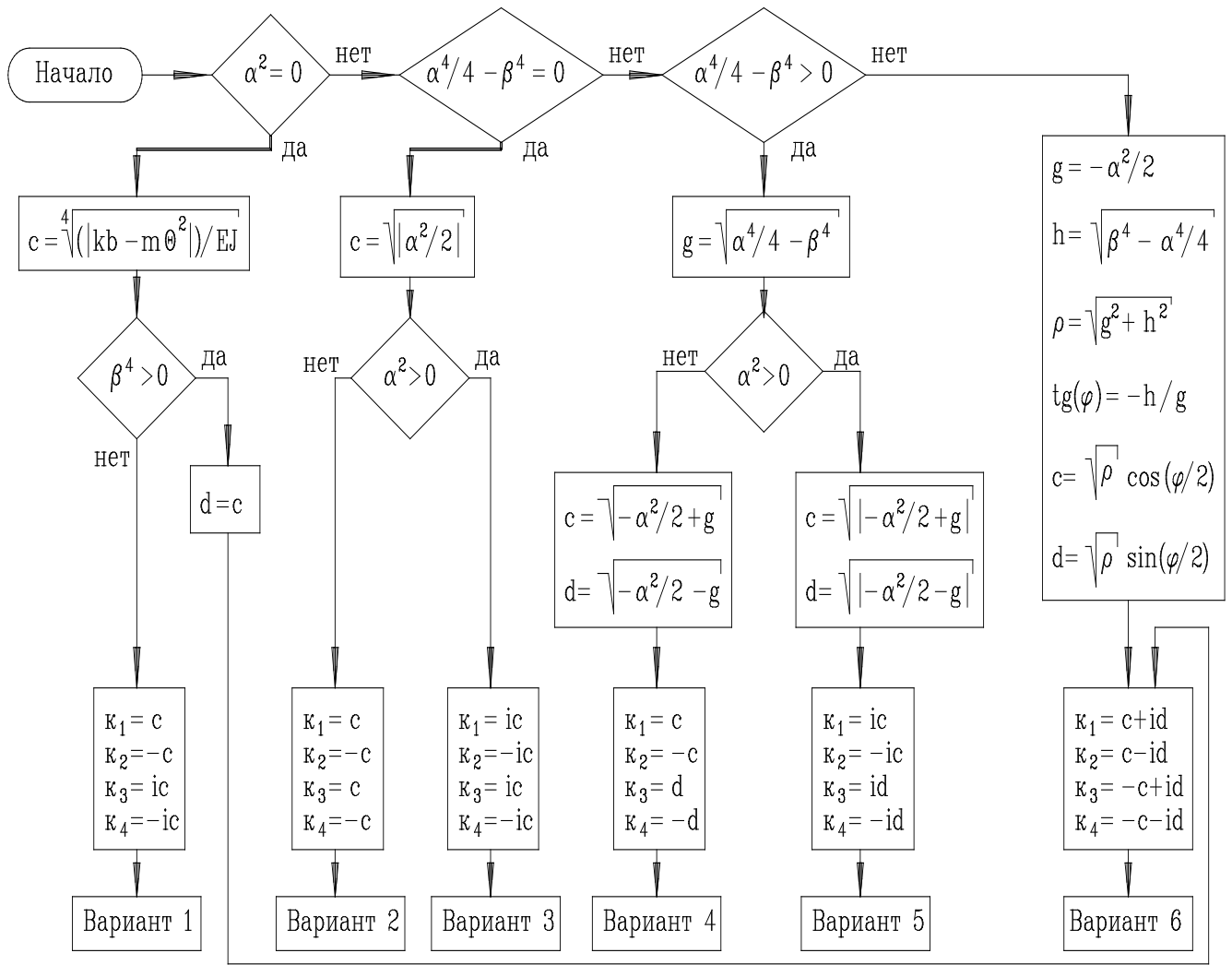


Рисунок 3 - Блок-схема выбора решения дифференциального уравнения

Вариант 1 (корни действительные и мнимые: $\kappa_1=c$, $\kappa_2=-c$, $\kappa_3=i \cdot c$, $\kappa_4=-i \cdot c$)

$$\vec{H} = [e^{cx} e^{-cx} \cos(cx) \sin(cx)]^T, \quad (15)$$

Вариант 2 (корни действительные кратные: $\kappa_1=\kappa_3=c$, $\kappa_2=\kappa_4=-c$)

$$\vec{H} = [e^{cx} e^{-cx} x \cdot e^{cx} x \cdot e^{-cx}]^T. \quad (16)$$

Вариант 3 (корни мнимые кратные: $\kappa_1=\kappa_3=i \cdot c$, $\kappa_2=\kappa_4=-i \cdot c$)

$$\vec{H} = [\cos(cx) \sin(cx) x \cdot \cos(cx) x \cdot \sin(cx)]^T. \quad (17)$$

Вариант 4 (корни действительные: $\kappa_1=c$, $\kappa_2=d$, $\kappa_3=-c$, $\kappa_4=-d$)

$$\vec{H} = [e^{cx} e^{dx} e^{-cx} e^{-dx}]^T. \quad (18)$$

Вариант 5 (корни мнимые: $\kappa_1=i \cdot c$, $\kappa_2=-i \cdot c$, $\kappa_3=i \cdot d$, $\kappa_4=-i \cdot d$)

$$\vec{H} = [\cos(cx) \sin(cx) \cos(dx) \sin(dx)]^T. \quad (19)$$

Вариант 6 (корни комплексные: $\kappa_1=c+i \cdot d$, $\kappa_2=c-i \cdot d$, $\kappa_3=-c+i \cdot d$, $\kappa_4=-c-i \cdot d$)

$$\vec{H} = [e^{cx} \cdot \cos(dx) \ e^{cx} \cdot \sin(dx) \ e^{-cx} \cdot \cos(dx) \ e^{-cx} \cdot \sin(dx)]^T. \quad (20)$$

При построении матрицы жёсткости $r = L_I \cdot L^{-1}$ в каждом конкретном случае обращение матрицы L необходимо осуществлять численно.

При получении матриц реакций целесообразно представлять все возможные линейно независимые решения дифференциального уравнения (5) в виде экспоненциальных функций от действительных или комплексных переменных, в зависимости от корней соответствующего характеристического уравнения. При этом константы интегрирования, а также матрицы L и L_I могут принимать комплексные значения. Тем не менее, произведение этих матриц, согласно формуле (12), обеспечивает действительные значения элементов матрицы жёсткости. Такой подход существенно упрощает процесс выбора оптимального решения дифференциального уравнения.

Проиллюстрируем это на примере гармонических колебаний с учётом демпфирования по модели В. Фойгта для стержня, расположенного на упругом основании и подверженного продольно-поперечному изгибу. Дифференциальное уравнение, описывающее движение данного стержня, имеет следующий вид:

$$E \cdot J \cdot \left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \chi \cdot \frac{\partial^5 V}{\partial x^4 \partial t} \right) \pm |N| \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + m \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + k \cdot b \cdot V = 0. \quad (21)$$

Предположим, что узловaя нагрузка и функция прогибов изменяются во времени по закону

$$P(t) = P_0 \cdot e^{i\theta t}, \quad (22)$$

$$V = v \cdot e^{i\theta t}. \quad (23)$$

Выражение (23) можно разложить по формуле Эйлера

$$V = v \cdot (\cos(\Theta \cdot t) + i \cdot \sin(\Theta \cdot t)) = V_c + i \cdot V_s, \quad (24)$$

где $V_c = v \cdot \cos(\Theta \cdot t)$ — функция прогибов при действии внешней нагрузки, изменяющейся по закону косинуса; $V_s = v \cdot \sin(\Theta \cdot t)$ — функция прогибов при действии внешней нагрузки, изменяющейся по закону синуса.

Подставляя выражение (23) в (21), получим

$$e^{i \cdot \Theta \cdot t} \cdot \left(E \cdot J \cdot \frac{d^4 v}{dx^4} \cdot (1 + i \cdot \gamma) \pm |N| \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + (k \cdot b - m \cdot \Theta^2) \cdot v \right) = 0$$

или

$$\frac{d^4 v}{dx^4} \pm \frac{|N| \cdot (1 - i \cdot \gamma)}{E \cdot J \cdot (1 + \gamma^2)} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{(k \cdot b - m \cdot \Theta^2) \cdot (1 - i \cdot \gamma)}{E \cdot J \cdot (1 + \gamma^2)} \cdot v = 0. \quad (25)$$

Введём обозначения

$$\alpha^2 = \pm \frac{|N| \cdot (1 - i \cdot \gamma)}{E \cdot J \cdot (1 + \gamma^2)}; \quad \beta^4 = \frac{(k \cdot b - m \cdot \Theta^2) \cdot (1 - i \cdot \gamma)}{E \cdot J \cdot (1 + \gamma^2)}$$

и получим полный аналог формулы (5) с той лишь разницей, что параметры α^2 и β^4 здесь являются комплексными числами. В дальнейшем при выводе матрицы жёсткости следует иметь в виду, что элементы всех векторов и матриц, а также внутренние усилия будут комплексными.

В этом случае значительно упрощается алгоритм определения варианта общего решения дифференциального уравнения (25) в зависимости от значения параметров α^2 и β^4 . Блок-схема представлена на рис. 4. При этом для определения корней характеристического уравнения (13) использовалась формула (14).

Согласно обозначениям, принятым на этом рисунке, приведём возможные варианты вектора независимых решений $\vec{H}$:

Вариант 1 (все корни равны нулю: $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0$)

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}^T, \quad (26)$$

Вариант 2 (корни комплексные сопряжённые и некрратные: $\kappa_1 = c + i \cdot d$, $\kappa_2 = -c - i \cdot d$, $\kappa_3 = e + i \cdot f$, $\kappa_4 = -e - i \cdot f$)

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} e^{\kappa_1 \cdot x} & e^{\kappa_2 \cdot x} & e^{\kappa_3 \cdot x} & e^{\kappa_4 \cdot x} \end{bmatrix}^T, \quad (27)$$

Вариант 3 (корни комплексные сопряжённые и кратные: $\kappa_1 = g + i \cdot h$, $\kappa_2 = -g - i \cdot h$, $\kappa_3 = g + i \cdot h$, $\kappa_4 = -g - i \cdot h$)

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} e^{\kappa_1 \cdot x} & e^{\kappa_2 \cdot x} & x \cdot e^{\kappa_3 \cdot x} & x \cdot e^{\kappa_4 \cdot x} \end{bmatrix}^T, \quad (28)$$

где значения величин c , d , e , f , g , h определяются численно для конкретных значений α^2 и β^4 .

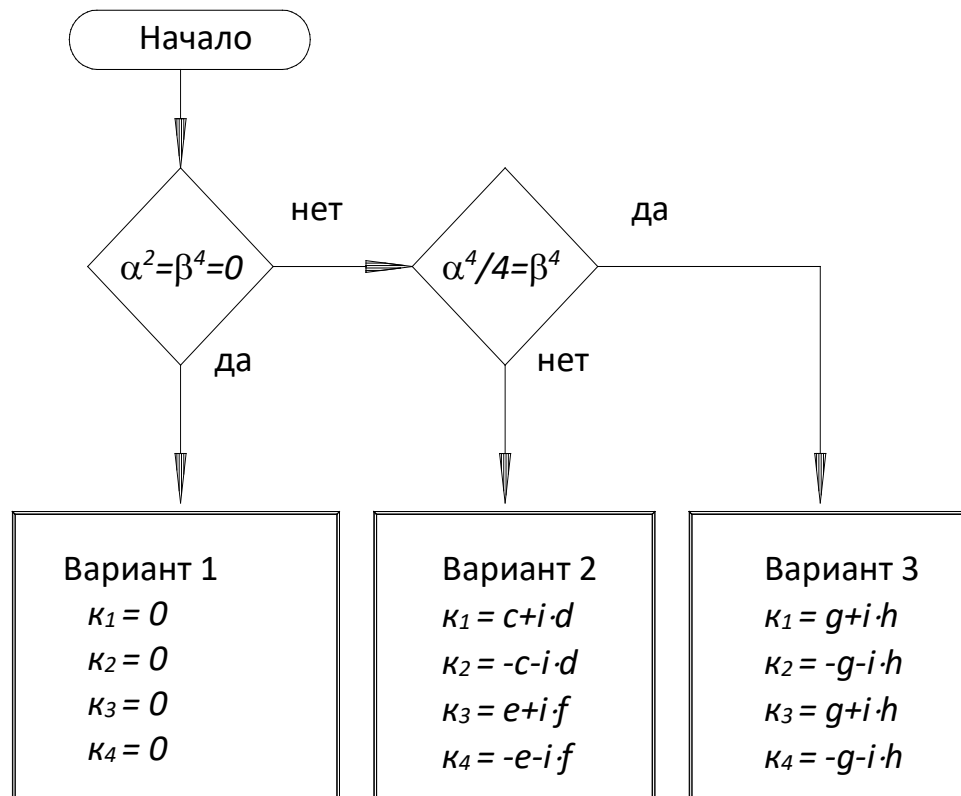


Рисунок 4 - Выбор варианта решения при комплексной матрице жёсткости

Матрица L строится согласно выражения (7). Для построения матрицы L_1 необходимо найти амплитудные значения внутренних усилий M_0 и Q_0 . Изгибающий момент и поперечная сила при продольно-поперечном изгибе будут иметь вид:

$$M = E \cdot J \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \chi \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial t} \right) \quad (29)$$

$$Q = E \cdot J \cdot \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \chi \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial t} \right) \pm \left(N \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (30)$$

Подставим (23) в (29) и (30), получим

$$M = e^{i \cdot \Theta \cdot t} \cdot E \cdot J \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = M_0 \cdot e^{i \cdot \Theta \cdot t}, \quad (31)$$

$$Q = e^{i \cdot \Theta \cdot t} \cdot E \cdot J \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot \left(\frac{d^3 v}{dx^3} + \alpha^2 \cdot \frac{dv}{dx} \right) = Q_0 \cdot e^{i \cdot \Theta \cdot t}. \quad (32)$$

Тогда матрица L_I в общем случае имеет вид

$$L_I = E \cdot J \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot \begin{bmatrix} d^3 \vec{H}^T(0) / dx^3 + \alpha^2 \cdot d\vec{H}^T(0) / dx & -d^2 \vec{H}^T(0) / dx^2 \\ -d^3 \vec{H}^T(l) / dx^3 - \alpha^2 \cdot d\vec{H}^T(l) / dx & d^2 \vec{H}^T(l) / dx^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

В результате детерминирования матрицы жесткости, которая определяется как произведение двух матриц в соответствии с формулой (12), достигается полное понимание динамики системы. Введение комплексных чисел в матрицу реакций стержня позволило установить прямую пропорциональность между матрицей реакций и частотно-независимым фактором γ , который представляет собой коэффициент неупругого сопротивления. Таким образом, проблема, связанная с гипотезой вязкого трения, была успешно решена.

Путем решения системы уравнений, составленной на основе матриц жесткости всех элементов стержневой системы, были определены амплитудные значения перемещений узлов, представленные в виде комплексных чисел. Эти амплитудные значения включают как линейные, так и угловые перемещения узлов стержневой системы. Они могут быть вычислены по следующей формуле:

$$v_n = v_{n\partial} + i \cdot v_{nm} \quad (34)$$

или

$$v_n = v_{np} \cdot (\cos(\varphi_l) + i \cdot \sin(\varphi_l)) = v_{np} \cdot e^{i \cdot \varphi_l}, \quad (35)$$

где $v_{np} = \sqrt{v_{n\partial}^2 + v_{nm}^2}$; $\operatorname{tg}(\varphi_l) = v_{nm}/v_{n\partial}$.

Подставляя (35) в (23), можно получить значения этих перемещений в любой момент времени

$$V_n = v_{np} \cdot e^{i \cdot \varphi_l} \cdot e^{i \cdot \Theta \cdot t} = v_{np} \cdot e^{i \cdot (\Theta \cdot t + \varphi_l)}. \quad (36)$$

Тогда в случае действия нагрузки, изменяющейся по закону синуса или косинуса, согласно (24), для n -ого перемещения можно соответственно записать

$$V_{nc} = v_{np} \cdot \cos(\Theta \cdot t + \varphi_l), \quad (37)$$

$$V_{ns} = v_{np} \cdot \sin(\Theta \cdot t + \varphi_l). \quad (38)$$

Таким образом в рамках настоящей статьи разработана унифицированная методология формирования матриц жёсткости для анализа плоских стержневых конструкций, базирующаяся на дифференциальном уравнении равновесия в перемещениях. Разработанная методика обеспечивает возможность проведения деформационного анализа таких систем при статических и динамических воздействиях, с учётом влияния упругого основания и сил внутреннего трения.

Особое внимание уделено целесообразности применения комплексных переменных и соответствующих матриц жёсткости при исследовании вынужденных гармонических колебаний стержневых систем в условиях действия сил внутреннего трения. Комплексный подход позволяет существенно упростить аналитическое решение задач динамики и повысить точность моделирования поведения конструкций под воздействием гармонических нагрузок.

Библиографический список:

1. Евсеев, А.Е. Методика построения матриц жёсткости по дифференциальному уравнению / А.Е. Евсеев, И.А. Евсеев, В.М. Машин // Моделирование и механика конструкций. – 2021. – № 14. – С. 33-38.
2. Евсеев, А.Е. Построение матрицы жёсткости сжато-изогнутого стержня по дифференциальному уравнению / А.Е. Евсеев, И.А. Евсеев, В.М. Машин // Моделирование и механика конструкций. – 2022. – № 15. – С. 43-47.
3. Евсеев, А.Е. Построение матрицы жёсткости растянуто-изогнутого стержня по дифференциальному уравнению / А.Е. Евсеев, И.А. Евсеев, В.М. Машин // Моделирование и механика конструкций. – 2022. – № 16. – С. 73-77.
4. Евсеев, А.Е. Формирование матрицы жёсткости стержня на упругом основании по дифференциальному уравнению / А.Е. Евсеев, И.А. Евсеев, В.М. Машин // Моделирование и механика конструкций. – 2023. – № 18. – С. 54-59.
5. Евсеев, А.Е. Способ получения матрицы жёсткости стержневого конечного элемента для деформационного расчета по дифференциальному уравнению / А.Е. Евсеев, И.Н. Гарькин, Ф.М. Ахметов // Системные технологии. – 2024. – № 2(51). – С. 5-13.
6. Евсеев, А.Е. Формирование матриц жесткости стержня по дифференциальному уравнению при его изгибе / А.Е. Евсеев, И.Н. Гарькин, Э.Ю. Абдуллазянов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2024. – № 3(49). – С. 57-65.
7. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. -М.: Высшая школа, 1986. -607 с.
8. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики. / Под ред. Г.К.Клейна. Перевод с болгарского. -М.: Стройиздат, 1981. - 436 с.

9. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. - Л.: Изд. ЛГУ, 1976.