

УДК 539.3/.6

К ВОПРОСУ ОБ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Шереметьева Марина Ивановна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

студент.

Аннотация

Рассматривается однородный и неоднородный упругий стержень, находящийся в условиях осевого растяжения-сжатия. Показано, что в однородном упругом стержне продольная сила приложена в центре тяжести поперечного сечения. Что касается неоднородного упругого стержня, то, оставаясь в рамках гипотезы плоских сечений, показано, что равнодействующая продольных сил, действующих в каждой однородной части стержня, не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного поперечного сечения. Координаты точки приложения равнодействующей не зависят от величины действующей внешней нагрузки на стержень. Точка приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне может совпасть с центром тяжести неоднородного поперечного сечения стержня при определённых условиях.

Ключевые слова: стержень, неоднородность, упругость, осевое растяжение-сжатие.

**ON THE ISSUE OF AXIAL TENSION-COMPRESSION OF
INHOMOGENEOUS ELASTIC MEMBERS**

Bakushev Sergey Vasilevish,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Physics".

Sheremeteva Marina Ivanovna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

A homogeneous and inhomogeneous elastic rod under conditions of axial tension-compression is considered. It is shown that in a homogeneous elastic rod, the longitudinal force is applied at the center of gravity of the cross-section. As for the inhomogeneous elastic member, remaining within the framework of the hypothesis of plane sections, it is shown that the resultant of the longitudinal forces acting in each homogeneous part of the member does not coincide, generally speaking, with the center of gravity of the inhomogeneous cross-section. The coordinates of the point of application of the resultant do not depend on the magnitude of the external load on the member. The point of application of the resultant internal longitudinal forces in an inhomogeneous elastic member can coincide with the center of gravity of the inhomogeneous cross-section of the member under certain conditions.

Keywords: rod, heterogeneity, elasticity, axial tension-compression.

Введение.

Под неоднородным упругим стержнем будем понимать такой стержень, различные части которого составляющие единое целое, имеют различные механические характеристики и геометрические размеры, и под действием нагрузки работают упруго. Для неоднородного упругого стержня остается справедливой гипотеза плоских сечений [1]. Вопросам расчёта неоднородных стержней из условия прочности и жёсткости посвящены многие работы, в частности работы [2 - 5].

Однородный упругий стержень.

Рассмотрим однородный упругий достаточно длинный стержень, находящийся в условиях осевого растяжения или сжатия под действием сосредоточенных сил, приложенных по торцам стержня (Рис. 1). Введём декартову систему координат X, Y, Z так, чтобы ось Z совпадала с продольной осью стержня, а начало координат располагалось в центре тяжести поперечного сечения.

Вполне понятно, что в окрестностях торцевых сечений напряжённое состояние стержня будет сложным. Но в областях, достаточно удалённых от торцевых сечений напряжённое состояние стержня, в соответствии с принципом Сен-Венана, выравнивается и становится однородным, соответствующим осевому растяжению.

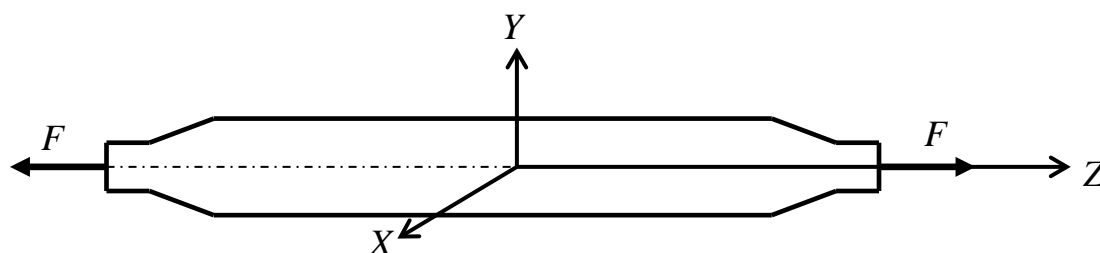


Рисунок 1 – Однородный упругий стержень

Связь продольной силы N с нормальным напряжением $\sigma_z = (x, y)$ в поперечном сечении площадью A , в части стержня, соответствующей осевому растяжению, описывается соотношением:

$$N = \int_A \sigma_z(x, y) \cdot dA. \quad (1)$$

На основании данных эксперимента, показывающих одинаковое удлинение волокон стержня при его растяжении, и гипотезой плоских сечений Бернулли, делается вывод [1], [6] о равномерном распределении напряжений $\sigma_z = (x, y)$ по площади поперечного сечения стержня. Таким образом, связь

между продольной силой N и нормальным напряжением $\sigma_z = Const$ в поперечном сечении стержня определяется, на основании (1), зависимостью:

$$N = \sigma_z A \quad (2)$$

При этом продольная сила предполагается приложенной в центре тяжести поперечного сечения, так как она определяется методом сечений, в соответствии с которым внутренние усилия приводятся к главному вектору и главному моменту внутренних сил, приложенных в центре тяжести поперечного сечения.

Покажем, что если в поперечном сечении стержня при осевом растяжении нормальное напряжение $\sigma_z = Const$, то продольная сила будет определяться по формуле (2) и будет приложена в центре тяжести поперечного сечения.

Действительно, если $\sigma_z = Const$ в заданном сечении стержня при его растяжении, то из формулы (1) следует соотношение (2). Поскольку при осевом растяжении стержень сохраняет свою продольную ось прямолинейной, то внутренние изгибающие моменты относительно осей координат X и Y в поперечном сечении будут равны нулю:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_z y dA = \sigma_z \int_A y dA = \sigma_z S_x = 0; \\ M_y &= \int_A \sigma_z x dA = \sigma_z \int_A x dA = \sigma_z S_y = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

то есть $S_x = 0$ и $S_y = 0$.

Равенство нулю статических моментов S_x и S_y относительно осей координат X и Y говорит о том, что оси координат X и Y являются центральными, а точка их пересечения есть центр тяжести поперечного сечения.

Если бы продольная сила N была бы приложена по отношению к центру тяжести поперечного сечения с эксцентриситетами e_x и e_y , то она относительно осей X и Y создавала бы не равные нулю внутренние изгибающие моменты $M_x = N \cdot e_y$ и $M_y = N \cdot e_x$. Но, поскольку в соответствии

с формулами (3) $M_x = 0$ и $M_y = 0$, то $e_x = 0$ и $e_y = 0$. Следовательно, продольная сила N приложена в центре тяжести поперечного сечения однородного упругого стержня.

Неоднородный упругий стержень.

Рассмотрим неоднородный упругий стержень I-го типа [7]. Пусть стержень длиной l состоит из двух частей (рис. 2). Механические характеристики первой части обозначим E_1, A_1 , второй части соответственно E_2, A_2 . Здесь E_1, E_2 - модули упругости, A_1, A_2 - площади первой и второй части поперечного сечения стержня.

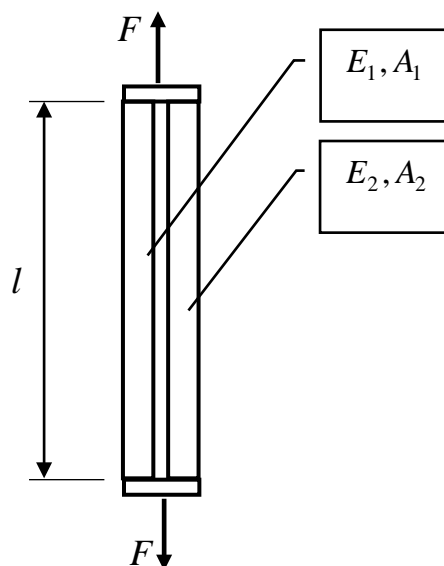


Рисунок 2 – Неоднородный упругий стержень, состоящий из двух частей

Так как для неоднородных упругих стержней гипотеза плоских сечений остается справедливой, то продольная сила в каждой однородной части поперечного сечения будет определяться по формулам [7]:

$$N_1 = \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}}; \quad N_2 = \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}; \quad (4)$$

причём,

$$N_1 + N_2 = F. \quad (5)$$

Для нормальных напряжений, равномерно распределённых по площади каждой однородной части, имеем связь между продольными силами и нормальными напряжениями:

$$N_1 = \sigma_{1z} A_1; \quad N_2 = \sigma_{2z} A_2. \quad (6)$$

Так как стержень при осевом растяжении сохраняет прямолинейную форму, то внутренние изгибающие моменты относительно осей координат X и Y (ось Z – направлена вдоль продольной оси стержня, но, возможно, не совпадает с ней) в поперечном сечении будут равны нулю:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{A_1} \sigma_{1z} \cdot y \cdot dA + \int_{A_2} \sigma_{2z} \cdot y \cdot dA = \sigma_{1z} \int_{A_1} y \cdot dA + \sigma_{2z} \int_{A_2} y \cdot dA = \\ &= \sigma_{1z} \cdot S_{1x} + \sigma_{2z} \cdot S_{2x} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{A_1} \sigma_{1z} \cdot x \cdot dA + \int_{A_2} \sigma_{2z} \cdot x \cdot dA = \sigma_{1z} \int_{A_1} x \cdot dA + \sigma_{2z} \int_{A_2} x \cdot dA = \\ &= \sigma_{1z} \cdot S_{1y} + \sigma_{2z} \cdot S_{2y} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (4), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{1z} \cdot S_{1x} + \sigma_{2z} \cdot S_{2x} &= \frac{1}{A_1} \frac{S_{1x}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} + \frac{1}{A_2} \frac{S_{2x}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} = 0; \\ \sigma_{1z} \cdot S_{1y} + \sigma_{2z} \cdot S_{2y} &= \frac{1}{A_1} \frac{S_{1y}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} + \frac{1}{A_2} \frac{S_{2y}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В системе (7)

$$S_{1x} = -A_1 \cdot y_N^I; \quad S_{2x} = -A_2 \cdot y_N^{II}; \quad S_{1y} = -A_1 \cdot x_N^I; \quad S_{2y} = -A_1 \cdot x_N^{II}. \quad (8)$$

При этом предполагается, что начало координат системы X, Y, Z совпадает с точкой приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 , причём оси X, Y располагаются между центрами тяжести первой и второй частями поперечного сечения стержня (рис. 3).

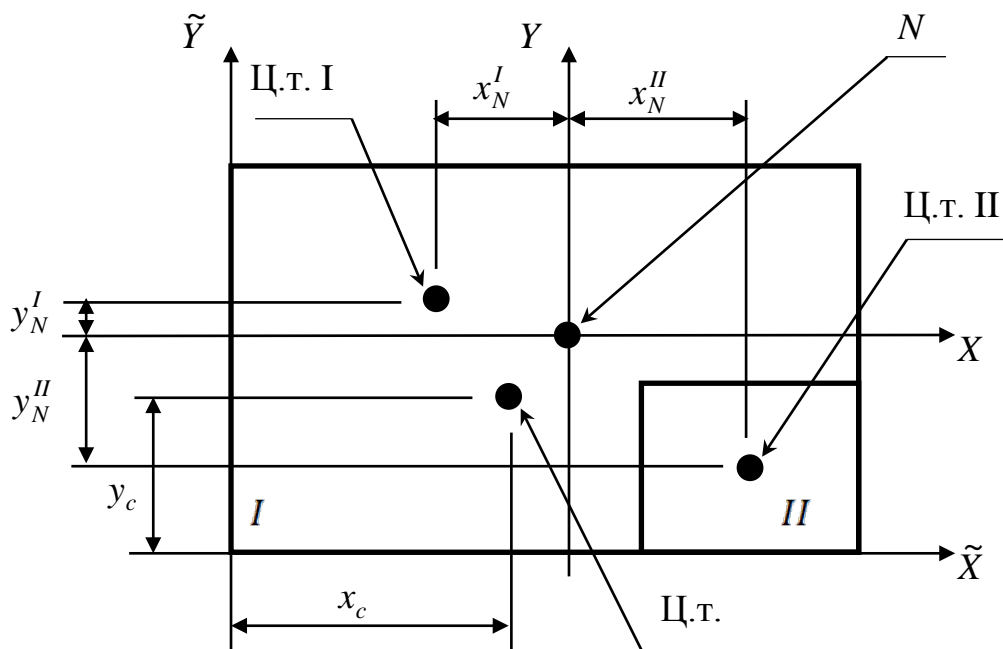


Рисунок 3 – Поперечное сечение

В соотношениях (8)

x_N^I, x_N^{II} – расстояния вдоль оси Y от центров тяжести первой и второй частей плоской фигуры до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 , то есть до оси Y ;

y_N^I, y_N^{II} – расстояния вдоль оси X от центров тяжести первой и второй частей плоской фигуры до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 , то есть до оси X .

Рассматривая геометрию поперечного сечения неоднородного стержня, можно найти соотношение между величинами x_N^I, x_N^{II} , а также между величинами y_N^I, y_N^{II} :

$$x_N^I = f_1(x_N^{II}); \quad y_N^I = f_2(y_N^{II}). \quad (9)$$

Из уравнений (7), с учётом соотношений (8) и (9) можно найти координаты точки приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_2 в поперечном сечении стержня:

$$-\frac{f_2(y_N^{\prime\prime})}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} + \frac{y_N^{\prime\prime}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} = 0; \quad -\frac{f_1(X_N^{\prime\prime})}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} + \frac{X_N^{\prime\prime}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} = 0. \quad (10)$$

Для неоднородной плоской фигуры единичной толщины, расположенной перпендикулярно к оси \tilde{Z} , направленной к центру земли, центр тяжести в некоторой вспомогательной системе координат \tilde{X}, \tilde{Y} определяется формулами [8]

$$x_c = \frac{\int_A x \cdot \gamma_s(x, y) \cdot dA}{\int_A \gamma_s(x, y) \cdot dA}; \quad y_c = \frac{\int_A y \cdot \gamma_s(x, y) \cdot dA}{\int_A \gamma_s(x, y) \cdot dA}. \quad (11)$$

Здесь $\gamma_s(x, y)$ – вес единицы площади плоской фигуры;

$\int_A x \cdot \gamma_s(x, y) \cdot dA$ – вес всей плоской фигуры.

Центр тяжести плоской фигуры, состоящей из двух частей с разными объёмными весами, будет определяться в системе вспомогательных координат \tilde{X}, \tilde{Y} , (рис. 3), в соответствии с формулами (11), соотношениями

$$x_c = \frac{\int_{A_1} x \cdot \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} x \cdot \gamma_2 \cdot dA}{\int_{A_1} \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} \gamma_2 \cdot dA} = \frac{\gamma_1 \int_{A_1} x \cdot dA + \gamma_2 \int_{A_2} x \cdot dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2} = \frac{\gamma_1 S_{1x} + \gamma_2 S_{2x}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}, \quad (12)$$

$$y_c = \frac{\int_{A_1} y \cdot \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} y \cdot \gamma_2 \cdot dA}{\int_{A_1} \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} \gamma_2 \cdot dA} = \frac{\gamma_1 \int_{A_1} y \cdot dA + \gamma_2 \int_{A_2} y \cdot dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2} = \frac{\gamma_1 S_{1y} + \gamma_2 S_{2y}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}.$$

Здесь γ_1, γ_2 – объёмные веса первой и второй частей плоской фигуры.

Сопоставляя формулы (7) и (12) можно утверждать, что точка приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_2 не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного плоского поперечного сечения стержня. В силу этого обстоятельства внешнюю сосредоточенную силу следует прикладывать в точке приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_2 для обеспечения осевого растяжения-сжатия стержня.

Зная координаты центра тяжести неоднородного поперечного сечения стержня во вспомогательной системе координат \tilde{X}, \tilde{Y} , а также привязав точку приложения равнодействующей сил N_1 и N_2 к вспомогательной системе координат \tilde{X}, \tilde{Y} , можно найти условия, при выполнении которых точка приложения равнодействующей будет совпадать с центром тяжести поперечного сечения стержня. При этом, как показывают численные исследования, потребуется изменить площади первой и второй частей неоднородного поперечного сечения стержня.

Пример.

Рассмотрим неоднородный стержень с прямоугольным поперечным сечением размерами $a \times b$ (рис. 4).

Стержень состоит из двух частей, выполненных из материала с разными объёмными весами γ_1 и γ_2 . Ширина первой части поперечного сечения ma , ширина второй части - na , причём $m + n = 1$.

Введём систему декартовых координат X, Y . Ось X совместим с горизонтальной осью симметрии плоской фигуры, а ось Y проведём, например, между центрами тяжести первой и второй фигур.

$$\text{Тогда } S_{1x} = 0; S_{2x} = 0; S_{1y} = -A_1 x_N^I; S_{2y} = -A_2 x_N^{II}.$$

$$\text{Здесь } A_1 = ma \cdot b; A_2 = na \cdot b.$$

$$\text{Кроме того, } \frac{1}{2}ma + x_N^I + x_N^{II} + \frac{1}{2}na = a, \text{ то есть } x_N^I = \frac{1}{2}a - x_N^{II}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{1y} = -ma \cdot b \left(\frac{1}{2}a - x_N^{II} \right); S_{2y} = na \cdot b \cdot x_N^{II}.$$

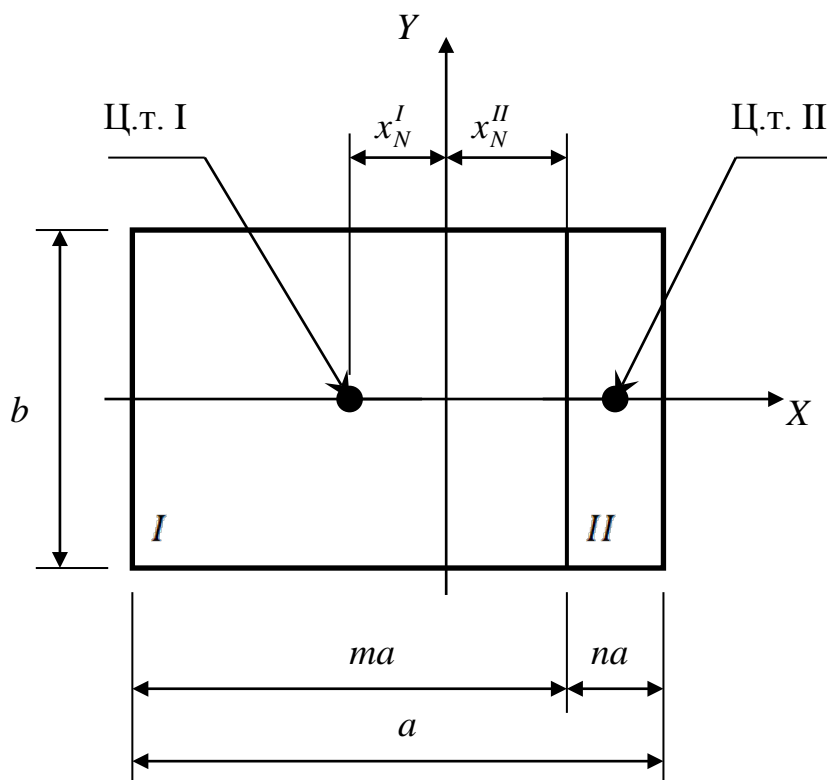


Рисунок 4 – К примеру

Таким образом, система (7) сводится к одному уравнению:

$$B_1 S_{1y} + B_2 S_{2y} = 0,$$

где $B_1 = \frac{1}{A_1} \frac{1}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}}$; $B_2 = \frac{1}{A_2} \frac{1}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}$.

Или $-B_1 ma \cdot b \left(\frac{1}{2} a - x_N^{II} \right) + B_2 na \cdot b \cdot x_N^{II} = 0,$

то есть $x_N^{II} = -\frac{B_1 ma}{2(B_1 m - B_2 n)}.$

По полученному значению x_N^{II} уточняется положение оси Y .

Найдём положение центра тяжести плоской фигуры (рис. 3). Введём вспомогательную систему координат \tilde{X}, \tilde{Y} (рис. 5).

Тогда

$$x_{ц.м.}^I = \frac{1}{2}ma ; y_{ц.м.}^I = 0 ; A_1 = ma \cdot b .$$

$$x_{ц.м.}^{II} = ma + \frac{1}{2}na ; y_{ц.м.}^{II} = 0 ; A_2 = na \cdot b .$$

Следовательно, $y_c = 0$; $x_c = \frac{\gamma_1 A_1 x_{ц.м.}^I + \gamma_2 A_2 x_{ц.м.}^{II}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}$.

Исходные данные:

Первая часть стержня выполнена из бетона с объёмным весом $\gamma_1 = 2400 \frac{\text{кГ}}{\text{м}^3}$; вторая часть стержня – это сталь с объёмным весом $\gamma_2 = 7800 \frac{\text{кГ}}{\text{м}^3}$. Модуль упругости бетона $E_1 = 20000 \text{МПа}$; модуль упругости стали $E_2 = 20000 \text{МПа}$. Размеры поперечного сечения: $a = 0.6 \text{м}$; $b = 0,4 \text{м}$. Коэффициенты: $m = 0.5 \div 0,8$; $n = 0,5 \div 0,2$.

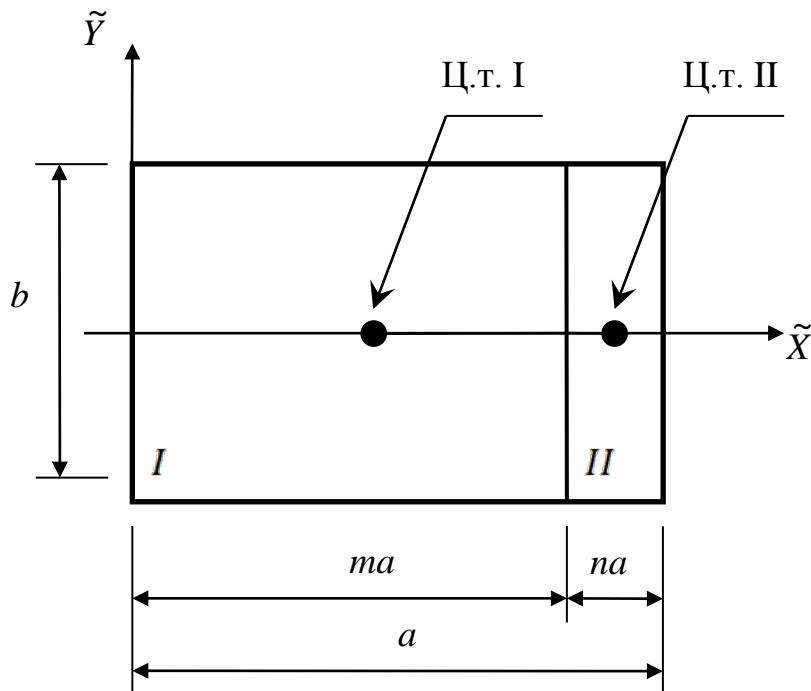


Рисунок 5 – Центр тяжести

Результаты вычислений представлены в таблице:

№	m	n	X_N^I , см.	X_N^{II} , см.	X_N , см.	$X_{Ц.м.}^I$, см.	$X_{Ц.м.}^{II}$, см.	X_c , см.	Δx , см.
1	0,5	0,5	26,67	3,33	41,67	15	45	37,94	3,73
2	0,6	0,4	24,71	5,29	42,71	18	48	38,53	4,18
3	0,7	0,3	20,87	9,13	41,87	21	51	38,46	3,41
4	0,8	0,2	10,0	20	34,00	24	54	37,45	-3,44

В таблице обозначены:

x_N^I, x_N^{II} – расстояния от центров тяжести первой и второй частей плоской фигуры до точки приложения равнодействующей;

x_N – расстояние от левой стороны плоской фигуры до точки приложения равнодействующей;

$x_{Ц.м.}^I, x_{Ц.м.}^{II}$ – координаты центров тяжести первой и второй частей плоской фигуры;

X_c – координата центра тяжести всей плоской фигуры;

Δx – расстояние между центром тяжести всей фигуры и точкой приложения равнодействующей.

Как следует из таблицы, при некотором значении параметров m и n точка приложения равнодействующей может совпадать с центром тяжести всей плоской фигуры. Это возможно, если выполняется равенство:

$$\frac{1}{2}ma + x_N^I = x_c,$$

то есть,
$$\frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}a + \frac{B_1ma}{2[B_1m - B_2(1-m)]} = \frac{\gamma_1 A_1 x_{ц.м.}^I + \gamma_2 A_2 x_{ц.м.}^{II}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}.$$

Отсюда следует квадратное уравнение для определения параметра m при котором точка приложения равнодействующей совпадёт с центром тяжести всего сечения:

$$a(B_1 + B_2)m^2 + 2 \left[aB_1 - (B_1 + B_2) \frac{\gamma_1 A_1 x_{y.m.}^I + \gamma_2 A_2 x_{y.m.}^{II}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2} \right] m + \left(2 \frac{\gamma_1 A_1 x_{y.m.}^I + \gamma_2 A_2 x_{y.m.}^{II}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2} - a \right) B_2 = 0.$$

Обобщения.

Обобщая приведённое выше решение на упругий неоднородный стержень, состоящий из n частей (рис. 6), получим:

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n = F; \quad (13)$$

$$\frac{N_1 l}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l}{E_2 A_2} = \dots = \frac{N_n l}{E_n A_n}. \quad (14)$$

Решая систему уравнений (13), (14), находим:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}}; \\ N_2 &= \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}; \\ N_3 &= \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1}; \\ N_n &= \frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}; \end{aligned} \quad (15)$$

Величина внутренних изгибающих моментов относительно некоторых вспомогательных осей координат X, Y будет, очевидно, вычисляться по формулам:

$$\begin{aligned} M_x &= \sigma_{1z} \cdot S_{1x} + \sigma_{2z} \cdot S_{2x} + \dots + \sigma_{nz} \cdot S_{nx} = 0; \\ M_y &= \sigma_{1z} \cdot S_{1y} + \sigma_{2z} \cdot S_{2y} + \dots + \sigma_{nz} \cdot S_{ny} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

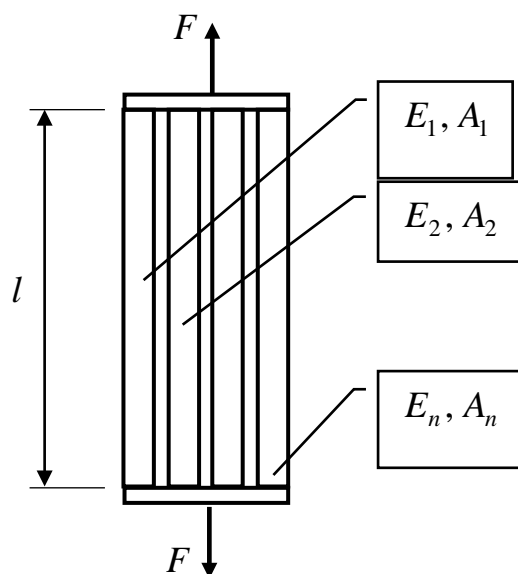


Рисунок 6 – Неоднородный
упругий стержень,
состоящий из n - частей

С учётом зависимостей (15), запишем формулы для определения координат точки приложения равнодействующей сил N_1, N_2, \dots, N_n в системе декартовых координат X, Y :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1z} \cdot S_{1x} + \sigma_{2z} \cdot S_{2x} + \dots + \sigma_{nz} \cdot S_{nx} &= \frac{1}{A_1} \frac{S_{1x}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} + \\
 &+ \frac{S_{2x}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_2}{E_1 A_1} + \frac{S_{3x}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_3}{E_1 A_1} + \\
 &\dots + \frac{S_{nx}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_n}{E_1 A_1} = 0;
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{1z} \cdot S_{1y} + \sigma_{2z} \cdot S_{2y} + \dots + \sigma_{nz} \cdot S_{ny} &= \frac{1}{A_1} \frac{S_{1y}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} + \\
&+ \frac{S_{2y}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_2}{E_1 A_1} + \frac{S_{3y}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_3}{E_1 A_1} + \\
&\dots + \frac{S_{ny}}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \dots + \frac{E_n A_n}{E_1 A_1}} \frac{E_n}{E_1 A_1} = 0.
\end{aligned}$$

Центр тяжести плоской фигуры, состоящей из n частей с разными объёмными весами, в системе вспомогательных координат \tilde{X}, \tilde{Y} , будет определяться соотношениями

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{\int_{A_1} x \cdot \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} x \cdot \gamma_2 \cdot dA + \dots + \int_{A_n} x \cdot \gamma_n \cdot dA}{\int_{A_1} \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} \gamma_2 \cdot dA + \dots + \int_{A_n} \gamma_n \cdot dA} = \\
&= \frac{\gamma_1 \int_{A_1} x \cdot dA + \gamma_2 \int_{A_2} x \cdot dA + \dots + \gamma_n \int_{A_n} x \cdot dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \dots + \gamma_n A_n} = \\
&= \frac{\gamma_1 S_{1x} + \gamma_2 S_{2x} + \dots + \gamma_n S_{nx}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \dots + \gamma_n A_n}; \\
y_c &= \frac{\int_{A_1} y \cdot \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} y \cdot \gamma_2 \cdot dA + \dots + \int_{A_n} y \cdot \gamma_n \cdot dA}{\int_{A_1} \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} \gamma_2 \cdot dA + \dots + \int_{A_n} \gamma_n \cdot dA} = \\
&= \frac{\gamma_1 \int_{A_1} y \cdot dA + \gamma_2 \int_{A_2} y \cdot dA + \dots + \gamma_n \int_{A_n} y \cdot dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \dots + \gamma_n A_n} = \\
&= \frac{\gamma_1 S_{1y} + \gamma_2 S_{2y} + \dots + \gamma_n S_{ny}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \dots + \gamma_n A_n}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – объёмные веса первой, второй, ..., n -ой частей плоской фигуры.

Сопоставляя формулы (17) и (18) можно утверждать, то точка приложения равнодействующей продольных сил N_1, N_2, \dots, N_m не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного плоского поперечного сечения стержня.

Дальнейшее решение по определению координат точки приложения равнодействующей сил N_1, N_2, \dots, N_n повторяет алгоритм решения для неоднородного стержня с двумя частями и здесь не приводится.

Выводы.

1. Продольная сила N приложена в центре тяжести поперечного сечения однородного упругого стержня.
2. Точка приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного поперечного сечения стержня.
3. Положение точки приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне не зависит от действующей внешней нагрузки на стержень.
4. Точка приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне может совпасть с центром тяжести неоднородного поперечного сечения стержня при определённых условиях.
5. Для соблюдения условий осевого растяжения-сжатия неоднородного стержня необходимо внешнюю силу прикладывать в точке приложения равнодействующей внутренних продольных сил.

Библиографический список:

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учеб для вузов/А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. Под ред. А.В. Александрова. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2008. – 560 с.: ил.

2. Горбачев В.И. Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов. // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2016. № 6 (69). С. 56-72.

3. *Мищенко А.В., Ромадинов И.В.* Оценка прочности гибкого слоисто-неоднородного стержня при термосиловом воздействии. // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. 2020. № 2 (53). С. 78-85.
4. *Мищенко А.В., Ромадинов И.В.* Продольно-поперечный изгиб слоистого стержня при термосиловом воздействии. // Труды Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). 2019. Т. 22. № 4 (74). С. 82-93.
5. *Труфанов А.Н., Лесникова Ю.И., Труфанов Н.А., Сметанников О.Ю.* Выбор критерия конструкционной прочности неоднородного кварцевого стержня на основе натуральных и вычислительных экспериментов. // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 1. С. 97-108.
6. Соппротивление материалов. Под. Ред. А.Ф. Смирнова, Учебник для вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М., «Высш. школа», 1975. 480 с.
7. *Бакушев С.В.* К вопросу о равнопрочности неоднородных упругих стержней [Электронный ресурс]//Моделирование и механика конструкций. 2021. №13.
8. *Бутенин Н.В., Луниц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. В двух томах. Т. 1. Статика и кинематика. – 3-е изд., стереотип. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 272 с.