

УДК 539.3/.6

**ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ,
СОДЕРЖАЩИХ n -НЕОДНОРОДНОСТЕЙ**

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация.

Рассматривается неоднородный упругий стержень, находящийся в условиях осевого растяжения-сжатия. Стержень содержит n -неоднородностей. Показано, что равнодействующая продольных сил, действующих в каждой однородной части стержня, не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного поперечного сечения. Координаты точки приложения равнодействующей не зависят от величины действующей внешней нагрузки на стержень. Неоднородный стержень под действием осевых нагрузок будет находиться в условиях внецентренного растяжения-сжатия и испытывать кривой изгиб на стыках неоднородных участков. Оценку прочности на каждом однородном участке стержня следует выполнять по методике расчёта внецентренно сжатого (растянутого) стержня.

Ключевые слова: стержень, неоднородность, упругость, осевое растяжение-сжатие.

**AXIAL TENSION-COMPRESSION OF ELASTIC MEMBERS
CONTAINING n -INHOMOGENEITIES**

Bakushev Sergey Vasilevish

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Abstract

An inhomogeneous elastic rod under conditions of axial tension-compression is considered. The rod contains n -inhomogeneities. It is shown that the resultant of the longitudinal forces acting in each homogeneous part of the member does not coincide, generally speaking, with the center of gravity of the inhomogeneous cross-section. The coordinates of the point of application of the resultant do not depend on the magnitude of the external load on the member. An inhomogeneous member under the influence of axial loads will be in conditions of eccentric tension-compression and will experience oblique bending at the joints of heterogeneous sections. The strength assessment on each homogeneous section of the member should be carried out according to the method of calculating the extra-centered compressed (tensioned) member.

Keywords: rod, heterogeneity, elasticity, axial tension-compression.

Введение.

Под неоднородным упругим стержнем будем понимать такой стержень, различные части которого составляющие единое целое, имеют различные механические характеристики и геометрические размеры. Под действием внешней осевой нагрузки неоднородный стержень работает упруго. Для неоднородного упругого стержня остается справедливой гипотеза плоских сечений [1]. Вопросам расчёта неоднородных стержней из условия прочности и жёсткости посвящены многие работы. Так в работе [2] для построения инженерной теории сопротивления неоднородных стержней использована интегральная формула, по которой перемещения точек тела в исходной задаче теории упругости неоднородного тела представляют через перемещения точек в такой же задаче, только для однородного упругого тела (сопутствующая задача). В результате решения определяются как компоненты вектора перемещения любой точки неоднородного стержня, так и напряжения, а также внутренние силовые факторы в сечении – продольная сила и два изгибающих момента. В статье [3] построена объемная конечно-элементная модель деформирования гибкого неоднородного стержня при осевом сжатии. При

допущении об отсутствии разрушения стержня установлен процесс его формоизменения, связанный с большими перемещениями, и указан момент времени достижения в верхнем тонком слое на выпуклой поверхности изогнутого стержня предельной деформации. Решение задачи выполнялось с использованием программных комплексов ANSYS и LS-DYNA. В работе [4] исследуется устойчивость шарнирно опёртого по концам непризматического неоднородного по длине упругого стержня. Показано, что конструированием неоднородности можно увеличить (уменьшить) критическую силу и тем самым в определённом смысле оптимизировать конструкцию. В статье [5] приводятся варианты компоновки составных сечений железобетонных стержней и метод расчета напряженно-деформированного состояния стержней, составленных из двух или более бетонных ветвей.

Теоретические основы.

Рассмотрим упругий неоднородный стержень II-го типа [6], состоящий из n – неоднородных частей (рис. 1). Каждая часть имеет свою длину l_1, l_2, \dots, l_n , площадь поперечного сечения A_1, A_2, \dots, A_n , модуль упругости E_1, E_2, \dots, E_n , удельный вес материала $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. При этом соблюдается условия, что $l_1 = l_2 + l_3 + \dots + l_n$.

Следует отметить, что распределение неоднородностей по длине стержня может быть самым разнообразным, причём неоднородности длинами l_2, l_3, \dots, l_n могут располагаться в разных частях стержня. Поперечное сечение неоднородностей также может быть совершенно произвольным.

Для определения внутренних усилий, действующих в каждом неоднородном участке стержня, имеем уравнения равновесия

$$N_1 + N_2 = F; N_1 + N_3 = F; \dots; N_1 + N_n = F \quad (1)$$

и уравнения совместности деформаций

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 + \Delta l_3 + \dots + \Delta l_n,$$

или

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{N_n l_n}{E_n A_n}. \quad (2)$$

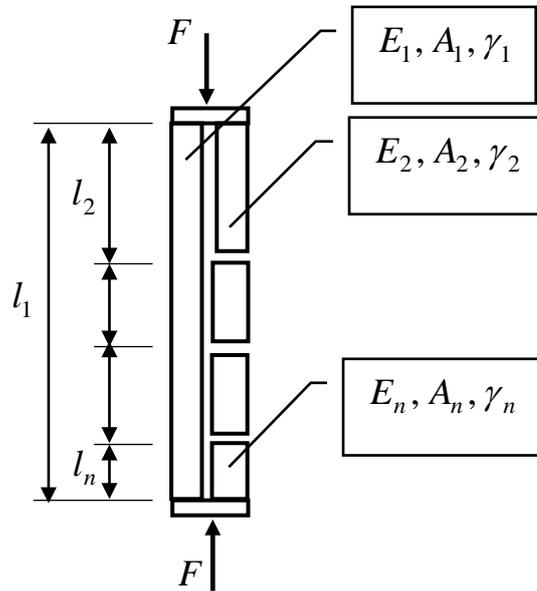


Рисунок 1 – Неоднородный упругий стержень, состоящий из n – частей

Решая совместно систему уравнений (1), (2), найдём внутренние усилия в каждой неоднородности стержня:

$$N_1 = F \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}; \quad (3)$$

$$N_2 = N_3 = \dots = N_n = F \left(1 - \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}} \right).$$

Продольные силы в каждой однородной части поперечного сечения связаны с нормальными напряжениями соотношениями:

$$N_1 = \sigma_{1z} A_1; \quad N_2 = \sigma_{2z} A_2; \quad \dots; \quad N_n = \sigma_{nz} A_n. \quad (4)$$

Будем считать, что на каждом неоднородном участке, то есть в пределах длин l_2, l_3, \dots, l_n , стержень сохраняет прямолинейную форму. В силу того, что стержень находится в условиях осевого растяжения (сжатия), прямолинейная форма стержня должна сохраняться на всей длине l_1 . Покажем, что это условие не выполняется.

Действительно, найдём координаты точки приложения равнодействующей внутренних усилий N_1, N_k где $k = 2, 3, \dots, n$.

Точка приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_k на участке длиной l_k определяется из условия, что внутренние изгибающие моменты от продольных сил N_1 и N_k относительно осей X_k, Y_k , проходящих через точку приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_k , равны нулю:

$$M_x = \int_{A_1} \sigma_{1z} y dA + \int_{A_k} \sigma_{kz} y dA = \sigma_{1z} \int_{A_1} y dA + \sigma_{kz} \int_{A_k} y dA = \sigma_{1z} S_{1x_k} + \sigma_{kz} S_{kx_k} = 0;$$

$$M_y = \int_{A_1} \sigma_{1z} x dA + \int_{A_k} \sigma_{kz} x dA = \sigma_{1z} \int_{A_1} x dA + \sigma_{kz} \int_{A_k} x dA = \sigma_{1z} S_{1y_k} + \sigma_{kz} S_{ky_k} = 0.$$

Учитывая соотношения (3), получим:

$$\sigma_{1z} S_{1x_k} + \sigma_{kz} S_{kx_k} = \frac{F \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{A_1 \frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}} S_{1x_k} +$$

$$+ \frac{F}{A_k} \left(1 - \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}} \right) S_{kx_k} = 0;$$

(5)

$$\sigma_{1z} S_{1y_k} + \sigma_{kz} S_{ky_k} = \frac{F}{A_1} \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}} S_{1y_k} +$$

$$+ \frac{F}{A_k} \left(1 - \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}} \right) S_{ky_k} = 0.$$

В системе (5), в соответствии с рис. 2

$$S_{1x_k} = A_1 y_{kN}^I; S_{kx_k} = -A_k y_{kN}^K; S_{1y_k} = -A_1 y_{kN}^I; S_{ky_k} = -A_k y_{kN}^K. \quad (6)$$

В соотношениях (6), см. рис. 2

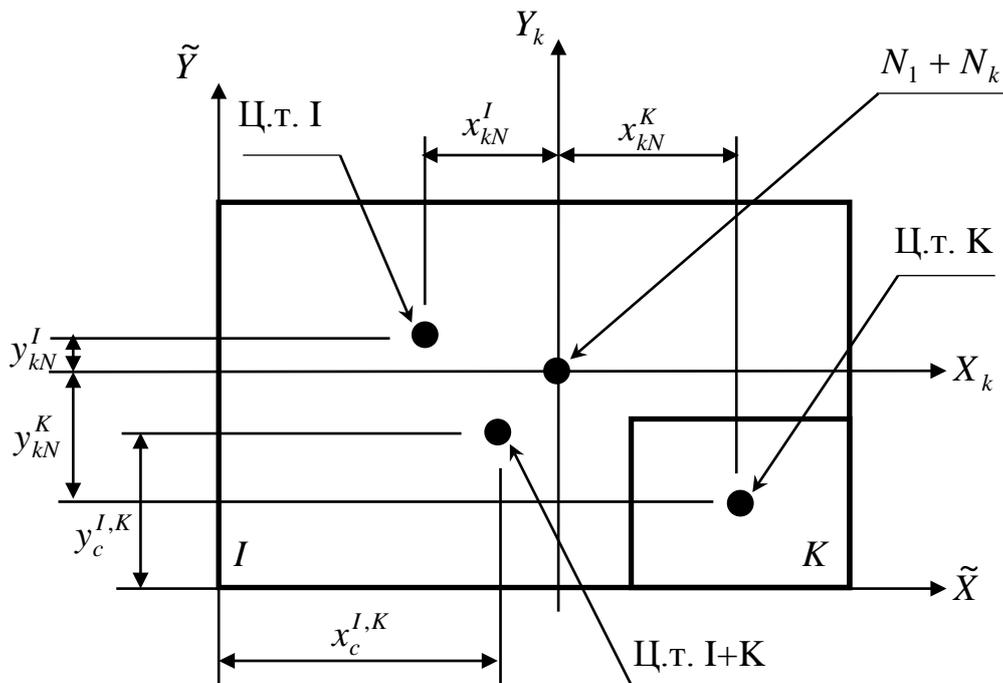


Рисунок 2 – Поперечное сечение

x_{kN}^I, x_{kN}^K – расстояния вдоль оси X_k от центров тяжести первой и второй частей плоской фигуры поперечного сечения до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_k , то есть до оси Y_k ;

y_{kN}^I, y_{kN}^K – расстояния вдоль оси Y_k от центров тяжести первой и второй частей плоской фигуры поперечного сечения до точки приложения равнодействующей сил N_1 и N_k , то есть до оси X_k .

При этом предполагается, что начало системы координат X_k, Y_k, Z_k совпадает с точкой приложения равнодействующей сил N_1 и N_k , причём оси X_k, Y_k располагаются между центрами тяжести первой и второй частями поперечного сечения стержня.

Рассматривая геометрию поперечного сечения неоднородного стержня на участке l_k , можно найти соотношение между величинами x_{kN}^I, x_{kN}^K , а также между величинами y_{kN}^I, y_{kN}^K :

$$x_{kN}^I = f_1(x_{kN}^K), \quad y_{kN}^I = f_k(y_{kN}^K). \quad (7)$$

Из уравнений (5), с учётом соотношений (6) и (7) можно найти координаты точки приложения равнодействующей продольных сил N_1 и N_k в поперечном сечении стержня на участке l_k :

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}} f_k(y_{kN}^K) - \\ & - \left(1 - \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}} \right) y_{kN}^K = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}} f_1(x_{kN}^K) - \\ & - \left(1 - \frac{\frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{l_n}{E_n A_n}} \right) x_{kN}^K = 0. \end{aligned}$$

Центр тяжести.

Для неоднородной плоской фигуры единичной толщины, расположенной перпендикулярно к оси \tilde{Z} , направленной к центру земли, центр тяжести в некоторой вспомогательной системе координат \tilde{X}, \tilde{Y} определяется формулами [7]

$$x_c = \frac{\int_A x \gamma_s(x, y) dA}{\int_A \gamma_s(x, y) dA}; \quad y_c = \frac{\int_A y \gamma_s(x, y) dA}{\int_A \gamma_s(x, y) dA}. \quad (9)$$

Здесь $\gamma_s(x, y)$ – вес единицы площади плоской фигуры толщиной равной единице;

$\int_A \gamma_s(x, y) dA$ – вес всей плоской фигуры.

Центр тяжести плоской фигуры, состоящей из двух частей с разными объёмными весами, будет определяться в системе вспомогательных координат \tilde{X}, \tilde{Y} (рис. 2), в соответствии с формулами (9), на участке l_k соотношениями

$$x_c = \frac{\int_{A_1} x \gamma_1 dA + \int_{A_k} x \gamma_k dA}{\int_{A_1} \gamma_1 dA + \int_{A_k} \gamma_k dA} = \frac{\gamma_1 \int_{A_1} x dA + \gamma_k \int_{A_k} x dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_k A_k} = \frac{\gamma_1 S_{1\tilde{x}} + \gamma_k S_{k\tilde{x}}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_k A_k};$$
$$y_c = \frac{\int_{A_1} y \gamma_1 dA + \int_{A_k} y \gamma_k dA}{\int_{A_1} \gamma_1 dA + \int_{A_k} \gamma_k dA} = \frac{\gamma_1 \int_{A_1} y dA + \gamma_k \int_{A_k} y dA}{\gamma_1 A_1 + \gamma_k A_k} = \frac{\gamma_1 S_{1\tilde{y}} + \gamma_k S_{k\tilde{y}}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_k A_k}. \quad (10)$$

В формулах (10) $\gamma_1, \gamma_k, k = 2, 3, \dots, n$ – объёмные веса первой, второй, ..., k – ой частей неоднородного стержня.

Анализ результатов.

Следует отметить, что координаты центров тяжести поперечного сечения стержня на участках l_2, l_3, \dots, l_n в системе вспомогательных координат \tilde{X}, \tilde{Y} , вообще говоря, не совпадают.

Сопоставляя формулы (8) и (10), можно утверждать, что точки приложения равнодействующей продольных сил N_1, N_k где $k = 2, 3, \dots, n$ на участках l_2, l_3, \dots, l_n не совпадают, вообще говоря, с центрами тяжести неоднородного плоского поперечного сечения стержня на соответствующих участках l_2, l_3, \dots, l_n . Кроме того, анализ формул (8) показывает, что точки приложения равнодействующей R_{1k} продольных сил N_1 и N_k на участках l_2, l_3, \dots, l_n имеют разные координаты и не совпадают.

Следовательно, продольные силы R_{1k} и R_{1k+1} создают относительно друг друга внутренний момент M_R в сечении на стыке участков l_k и l_{k+1} . Плоскость действия этого момента зависит в самом общем случае от геометрии рассматриваемого неоднородного стержня, а также его механических характеристик.

Таким образом, рассматриваемый неоднородный стержень на стыке участков l_k и l_{k+1} будет испытывать, вообще говоря, кривой изгиб. Кроме того, для обеспечения напряжённо-деформированного состояния неоднородного стержня соответствующего, вообще говоря, условиям осевого растяжения-сжатия, внешнюю сосредоточенную силу F следует прикладывать в точке поперечного сечения, расположенной как можно ближе к проекциям точек приложения равнодействующих сил $R_{12}, R_{13}, \dots, R_{1n}$ на эту плоскость поперечного сечения. Но поскольку силы $R_{12}, R_{13}, \dots, R_{1n}$ действуют на разных участках стержня, то в этом случае внешняя сила F будет приложена вне точек приложения равнодействующих сил $R_{12}, R_{13}, \dots, R_{1n}$.

Таким образом, неоднородный стержень будет находиться в условиях внецентренного растяжения-сжатия и испытывать кривой изгиб на стыке участков.

Принимая гипотезу плоских сечений для неоднородного стержня при определении внутренних усилий в каждой однородной части (формулы (3)), мы, фактически, пренебрегаем изгибающим моментом, возникающим на

каждом участке l_2, l_3, \dots, l_n за счёт наличия разнородности. В силу этого, после определения координат точек приложения равнодействующей продольных сил N_1, N_k где $k = 2, 3, \dots, n$ и на участках l_2, l_3, \dots, l_n , оценку прочности на каждом однородном участке стержня следует выполнять по методике расчёта внецентренно сжатого (растянутого) стержня.

Выводы.

1. Положения точек приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне не зависят от действующей внешней нагрузки на стержень.
2. Точки приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне в рассматриваемых сечениях не совпадают, вообще говоря, с центрами тяжести рассматриваемых неоднородных поперечных сечений стержня.
3. Точка приложения равнодействующей внутренних продольных сил в неоднородном упругом стержне может совпасть с центром тяжести неоднородного поперечного сечения стержня при определённых условиях.
4. Для обеспечения напряжённо-деформированного состояния неоднородного стержня соответствующего, вообще говоря, условиям осевого растяжения-сжатия, внешнюю сосредоточенную силу F следует прикладывать в точке, наиболее близко расположенной к проекциям на плоскость поперечного сечения стержня точек приложения равнодействующих сил $R_{12}, R_{13}, \dots, R_{1n}$.
5. В неоднородном упругом стержне на стыке участков возникает внутренний, вообще говоря, кривой изгиб.
6. Неоднородный стержень под действием осевых нагрузок будет находиться в условиях внецентренного растяжения-сжатия и испытывать кривой изгиб на стыках неоднородных участков.

Библиографический список:

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учеб для вузов/А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. Под ред. А.В. Александрова. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2008. – 560 с.: ил.
2. Горбачев В.И. Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов. // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2016. № 6 (69). С. 56-72.
3. Егоров А.В. Прогибы неоднородного стержня при осевом сжатии. // Труды МАИ. 2018. № 101. С. 3.
4. Амензаде Р.Ю., Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. Устойчивость неоднородного по длине упругого стержня // Доклады Академии наук. 2003. Т. 393. № 5. С. 615-617.
5. Узунова Л.В. Несущая способность сжатых составных железобетонных стержней при различных вариантах компоновки сечения // Известия КГТУ. 2011. № 21. С. 137-143.
6. Бакушев С.В. К вопросу о равнопрочности неоднородных упругих стержней [Электронный ресурс]//Моделирование и механика конструкций. 2021. №13.
7. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В двух томах. Т. 1. Статика и кинематика. – 3-е изд., стереотип. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 272 с.