УДК 624.046.2

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ В СТЕРЖНЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Бакушев Сергей Васильевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Зарипова Гульнара Музамиловна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

студент.

Аннотация

Рассматривается задача определения центральной линии в стержнях, находящихся в условиях плоского поперечного изгиба, поперечное сечение которых изменяется по длине стержня. Дано математическое описание алгоритма формирования уравнения центральной линии, если верхняя сторона балки описывается произвольной кривой. В качестве примера рассматривается задача формирования уравнения центральной линии для случая, когда верхняя сторона балки описывается дугой окружности.

Ключевые слова: стержень, плоский поперечный изгиб, переменное сечение, центральная линия.

TO THE QUESTION ABOUT BUILDING THE CENTRAL LINE IN THE ROD OF VARIABLE SECTION

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Zaripova Gulnara Muzamilovna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Student.

Abstract

The problem of determining center line in terminals, under flat transverse bending, the cross-section of which varies according to the length of the rod. Given a mathematical description of the algorithm of the formation of the central line of the equations, if the upper beam is described by an arbitrary curve. As an example, the problem of the formation of the central line of the equation for the case when the upper side beams describes an arc of a circle.

Keywords: rod, flat transverse bending, variable cross-section, central line.

Особенностью расчёта стержня переменного сечения с поперечным сечением, не симметричным относительно продольной оси (например, стержня типа двускатной балки) является то, что в этом случае стержень, при действии на него поперечной нагрузки, будет находиться в условиях сложного сопротивления – поперечного изгиба со сжатием, либо растяжением, причём положение центральной оси ZC заранее неизвестно [1, 2]. Некоторые вопросы расчёта изгибаемых стержней переменного сечения, симметричных относительно продольной оси, представлены в работе [3].

Рассмотрим изгибаемый стержень, у которого верхняя сторона описывается произвольной кривой, например, дугой окружности, дугой параболы или какой-либо произвольной функцией $y = f(z)$. В этом случае центральная ось, вообще говоря, будет отличаться от прямой, и описываться, например, некоторой функцией $y = \varphi(z)$.

Для стержня прямоугольного поперечного сечения, верхняя сторона которого описывается уравнением $y = f(z)$ (рисунок 1), рассмотрим задачу нахождения уравнения центральной линии, то есть нахождения вида функции $y = \varphi(z)$.

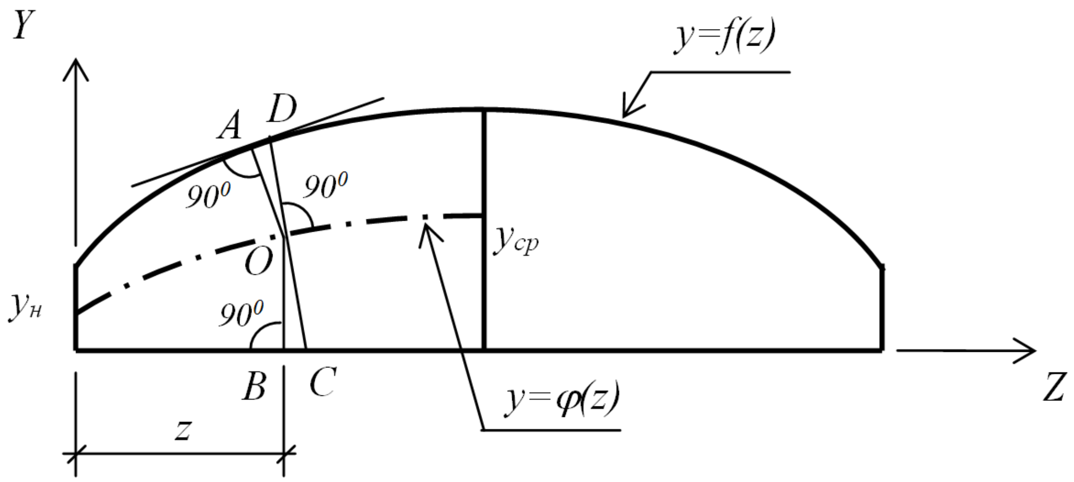

Рисунок 1 – Изгибаемый стержень, верхняя сторона которого описывается произвольной кривой

Уравнение нормали к кривой $y = f(z)$ в точке $A(z_a, y_a)$ имеет вид:

$$y = -\frac{1}{f'(z_a)} z + l, \qquad (1)$$

где l – параметр.

Для определения параметра l запишем уравнение нормали (1) в точке О:

$$y_o = -\frac{1}{f'(z_a)} z_o + l,$$

откуда, учитывая что $y_o = \varphi(z_o)$, найдём

$$l = \varphi(z_o) + \frac{1}{f'(z_a)} z_o.$$

Теперь уравнение нормали (1) получает вид:

$$y = -\frac{1}{f'(z_a)}(z - z_o) + \varphi(z_o). \qquad (2)$$

Вертикальная координата z_a точки $A(z_a, y_a)$ может быть определена как из уравнения $y = f(z)$, так и из уравнения (2), т.е. получаем соотношение:

$$f(z_a) = -\frac{1}{f'(z_a)}(z_a - z_o) + \varphi(z_o). \qquad (3)$$

Функциональное уравнение (3) позволяет найти координату z_a как функцию от $\varphi(z_o)$.

По условию задачи для прямоугольного поперечного сечения стержня *OA*=*OB*. Так как $OA^2 = (z_o - z_a)^2 + (y_o - y_a)^2$, а $OB = \varphi(z_o)$, и, кроме того $y_o = \varphi(z_o)$, то получаем уравнение

$$\varphi^2(z_0) = (z_o - z_a)^2 + [\varphi(z_o) - y_a]^2. \qquad (4)$$

Полагая координату z_o текущей, то есть равной z, на основании соотношения (4) получаем функциональное уравнение, для определения функции $\varphi(z)$

$$\varphi^2(z) = (z - z_a)^2 + [\varphi(z) - y_a]^2. \qquad (5)$$

Здесь координата z_a определяется на основании соотношения (3):

$$f(z_a) = -\frac{1}{f'(z_a)}(z_a - z) + \varphi(z). \qquad (6)$$

Получив уравнение центральной линии $y = \varphi(z)$, найдём расчётное сечение, перпендикулярное к центральной оси. Возьмём произвольную точку *O* на кривой $y = \varphi(z)$.

Уравнение нормали к кривой $y = \varphi(z)$ в точке $O(z_o, y_o)$имеет вид:

$$y = -\frac{1}{\varphi'(z_o)} z + m, \qquad (7)$$

где *m* – параметр.

Параметр *m* найдём из условий в точке $O(z_o, y_o)$: при $z = z_o$, имеем $y_o = \varphi(z_o)$, то есть $\varphi(z_o) = -\frac{1}{\varphi'(z_o)} z_o + m$. Отсюда $m = \varphi(z_o) + \frac{1}{\varphi'(z_o)} z_o$. Теперь уравнение нормали (7) получает вид:

$$y = \frac{1}{\varphi'(z_o)}(z_o - z) + \varphi(z_o). \qquad (8)$$

Координаты точки$C(z_c, y_c)$ – точки пересечения нормали (8) осью *Z* будут равны:

$$z_c = \left[\frac{1}{\varphi'(z_o)} z_o + \varphi(z_0)\right]\varphi'(z_o), y_c = 0. \qquad (9)$$

Координаты точки $D(z_d, y_d)$ – точки пересечения нормали (8) с линией $y = f(z)$, могут быть найдены из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_d &= f(z_d), \\ y_d &= \frac{1}{\varphi'(z_o)}(z_o - z_d) + \varphi(z_o). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Длины отрезков OC и OD будут равны:

$$OC = \sqrt{\varphi^2(z_o) + (z_c - z_o)^2}\,, \tag{11}$$

$$OD = \sqrt{(z_d - z_o)^2 + (y_d - y_o)^2}\,. \tag{12}$$

Таким образом, при построении эпюр нормальных и касательных напряжений в расчётных сечениях стержня, координата yc будет изменяться в пределах от $yc = 0$ до $yc = -OC$ для участка расчётного сечения ниже центральной оси ZC; от $yc = 0$ до $yc = OD$ для участка расчётного сечения выше центральной оси ZC.

В качестве примера рассмотрим изгибаемый стержень, у которого верхняя сторона описывается дугой окружности

$$(z - z_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2. \tag{13}$$

Здесь z_c, y_c – координаты центра окружности; R – радиус окружности.

Для определения параметров дуги окружности имеем условия (см. рисунок 1):

$$\begin{aligned} &\text{- при } z = 0, \text{ имеем } y = y_н; \\ &\text{- при } z = \frac{l}{2}, \text{ имеем } y = y_{ср}; \\ &\text{- при } z = l, \text{ имеем } y = y_н. \end{aligned} \tag{14}$$

Применяя условия (14) к уравнению (13), получим:

$$z_c = \frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{4\left(y_{ср}^2 - y_н^2\right) - l^2}{8\left(y_{ср} - y_н\right)}, \quad R^2 = \frac{l^2}{4} + \left[y_н - \frac{4\left(y_{ср}^2 - y_н^2\right) - l^2}{8\left(y_{ср} - y_н\right)}\right]^2 \tag{15}$$

Следовательно, уравнение дуги (13) получает вид:

$$\left(z-\frac{l}{2}\right)^2+\left[y-\frac{4\left(y_{ср}^2-y_н^2\right)-l^2}{8\left(y_{ср}-y_н\right)}\right]^2=\frac{l^2}{4}+\left[y_н-\frac{4\left(y_{ср}^2-y_н^2\right)-l^2}{8\left(y_{ср}-y_н\right)}\right]^2. \qquad (16)$$

Запишем уравнение дуги (16) в форме $y=f(z)$:

$$y=y_c+\sqrt{R^2-\left(z-z_c\right)^2}. \qquad (17)$$

Здесь перед радикалом взят знак «+» ввиду того, что кривая $y=f(z)$ располагается в первом квадранте, то есть для всех $0\le z\le l$ величина $y>0$.

Далее, в соответствии с описанным выше алгоритмом, получаем алгебраическое уравнение для определения функции $\varphi(z)$, то есть уравнения $y=\varphi(z)$, описывающего центральную линию:

$$\begin{gathered}
16\left(z-z_c\right)^4\left[2z_c\left(z-z_c\right)R-\left(z^2+y_c^2-z_c^2+R^2\right)R\right]^2B(\varphi)- \\
+8\left(z-z_c\right)^2\left[C(\varphi)+4\left(z^2+y_c^2-z_c^2+R^2\right)z_c\left(z-z_c\right)-4z_c^2\left(z-z_c\right)^2\right]\times \\
\times\left[\left(z-z_c\right)^2R^2+\frac{1}{4}R^2A(\varphi)\right]B(\varphi)- \\
-8\left(z-z_c\right)^4R^2A(\varphi)\left[\left(z-z_c\right)^2R^2+\frac{1}{8}R^2A(\varphi)\right]- \\
-\left[C(\varphi)+4\left(z^2+y_c^2-z_c^2+R^2\right)z_c\left(z-z_c\right)-4z_c^2\left(z-z_c\right)^2\right]^2B^2(\varphi)- \\
-16\left(z-z_c\right)^8R^4=0.
\end{gathered} \qquad (18)$$

Здесь

$A(\varphi)=4\left[\varphi(z)-y_c\right]^2$;

$B(\varphi)=\left(z-z_c\right)^2+\left[\varphi(z)+y_c\right]^2$;

$C(\varphi)=B(\varphi)R^2-\left(z^2+y_c^2-z_c^2+R^2\right)^2+4\left(z^2+y_c^2-z_c^2+R^2\right)y_c\varphi(z)-4y_c^2\varphi^2(z)$.

Судя по виду уравнения (18), записать в явном виде функцию $y=\varphi(z)$ не представляется возможным. Поэтому для построения функции $y=\varphi(z)$ воспользуемся численным построением кривой $y_i=\psi(z_i)$, $i=1, 2, 3, \ldots$ по точкам и затем аппроксимацией полученной таблицы значений $\left(z_i, y_i\right)$ какой-либо функцией, например параболой четвёртого порядка. Здесь $\psi(z)-$ правая часть уравнения (18).

Для поиска функции $\varphi(z)$ была написана программа на языке С++, которая позволяет на равномерной сетке с произвольными параметрами для каждого z_i найти соответствующую точку $\psi(z_i)$ и построить график соответствующей функции $y = \varphi(z)$.

Для построения центральной линии на рисунке 2 были использованы следующие начальные данные:

- длина стержня $l = 6$ м;
- высота сечения в начале координат $y_н = 0{,}5$ м;
- высота сечения в середине пролёта $y_{ср} = 1{,}0$ м

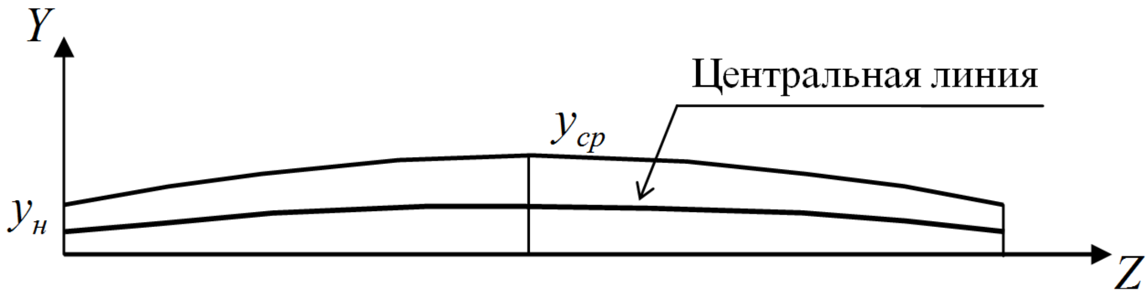

Рисунок 2 – Построение центральной линии

Полученные в статье результаты могут найти применение при оценке несущей способности и жёсткости стержней переменного сечения с поперечным сечением не симметричным относительно продольной оси, находящихся под действием поперечной нагрузки.

Библиографический список:

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / под ред. А.В. Александрова. 3-е изд., испр. М.: Высшая Школа, 2003. 560 с.

2. Бакушев С.В., Зарипова Г.М. К вопросу об изгибе стержня переменного сечения // Актуальные проблемы механики в современном строительстве: материалы III международ. науч.-техн. конф. Пенза: ПГУАС, 2014. С. 9-21.

3. Бакушев С.В., Зарипова Г.М. К вопросу о расчёте стержней переменного сечения, работающих на изгиб // Актуальные проблемы механики в современном строительстве: материалы III международ. науч.-техн. конф. Пенза: ПГУАС, 2014. С. 4-9.